

УДК 539.3; 537.8

МАГНИТОУПРАВЛЯЕМЫЕ ПОЛИДИСПЕРСНЫЕ ОДНОНАПРАВЛЕННО ВОЛОКНИСТЫЕ НАМАГНИЧЕННЫЕ СТРУКТУРЫ¹

Паньков А.А.

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
г. Пермь, Россия*

РЕЗЮМЕ

Предложена двухуровневая структурная модель магнитодеформационного эффекта волокнистого стержня под воздействием внешнего квазистатического магнитного поля и получены новые точные аналитические решения для возникающих магнитоупругих полей на микро и макро уровнях на основе обобщения известных полидисперсных моделей механики композитов на новый класс задач магнитоуправляемых эластомеров с ориентировано намагниченными волокнами. Даны новые аналитические решения для эффективной остаточной намагниченности и для деформационного поля в эластомере составной цилиндрической ячейки композита от действия на волокно вращающего магнитного момента. Проведен анализ влияния объемной доли намагниченных волокон на крутильную деформативность композитного стержня во внешнем магнитном поле. Установлен немонотонный характер этой зависимости, определены оптимальные значения объемной доли волокон и сделан вывод о необходимости выбора эластомера с высокой магнитной проницаемостью и малой жесткостью на растяжение. Определены координаты макроточек полого стержня и внутренние (в макроточках) локальные координаты точек межфазной поверхности волокна с максимальными значениями окружных касательных напряжений для случая высоко магнитопроницаемого эластомера и жестких волокон. Проведен анализ влияния относительного размера полости стержня и величины объемной доли жестких волокон на максимальные значения межфазных касательных напряжений: установлен немонотонный характер этой зависимости и определены значения объемной доли волокон, при которых достигаются наименьшие значения максимальных напряжений.

Ключевые слова: магнитное поле; магнитоуправляемый эластомер; намагниченная структура; композит; эффективные свойства

MAGNETOOPERATED POLYDISPERSE UNIDIRECTIONALLY FIBROUS MAGNETIZED STRUCTURES

Pan'kov A.A.

State National Research Politechnical University of Perm, Perm, Russia

SUMMARY

The two-level structural model of magnetodeformation effect of a fibrous core under the influence of an external quasistatic magnetic field is offered and new exact analytical decisions for arising magnetoelastic fields at micro and macro levels on the basis

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ р_офи_м 14-48-08011.

of generalization of known polydisperse models of mechanics of composites are received on a new class of problems of magnetooperated elastomers with is focused by the magnetized fibers. New analytical decisions for effective residual magnetization and for a deformation field in an elastomer of a compound cylindrical cell of a composite from action on fiber of the rotating magnetic moment are given. The analysis of influence of a volume fraction of the magnetized fibers on a torsional deformativnost of a composite core in an external magnetic field is carried out. Nonmonotonic nature of this dependence is established, optimum values of a volume fraction of fibers are defined and the conclusion is drawn on need of a choice of an elastomer with high magnetic permeability and small rigidity on stretching. Coordinates of macropoints of hollow core and internal (in macropoint) local coordinates of points of interphase surface of fiber with the maximum values of district tangent tension for case of highly magnetopermeable elastomer and rigid fibers are determined. The analysis of influence of the relative size of cavity of core and size of volume fraction of rigid fibers on the maximum values of interphase tangent tension is carried out. Nonmonotonic nature of this dependence is established and values of volume fraction of fibers at which the smallest values of the maximum tension are reached are defined.

Key words: magnetic field; magnetooperated elastomer; magnetized structure; composite; effective properties

ВВЕДЕНИЕ

Магнитные материалы [1] широко применяются в электротехнике, радиотехнике, автоматике. Магнитоуправляемые эластомеры – это новые магнитореологические интеллектуальные материалы, способные изменять свои свойства под действием внешних магнитных полей [2-6]. Магнитоэластомеры представляют собой полимерные матрицы с внедренными в них магнитными частицами нано и/или микро размера. Магнитные силы между частицами наполнителя соизмеримы с возникающими в полимере упругими силами, что приводит к магнитодеформационному эффекту - уникальной способности композита к быстрым и контролируемым деформациям в магнитных полях [2]. Магнитное поле действует на распределенные в эластомере намагниченные частицы и их смещения вызывают деформирование полимера и композита в целом. Дополнительно, в результате магнитоуправляемого структурирования частиц наполнителя и, как следствие, быстрых и управляемых изменений вязкоупругих свойств магнитоэластомер проявляет магнитореологический эффект, эффект памяти формы и эффект пластичности [2,5,6]. Цель работы – обобщение известных аналитических решений для упругих [7,8] и пьезоупругих [9] полидисперсных композитов на новый класс задач магнитоуправляемых структур с намагниченными полидисперсными однонаправленными волокнами под воздействием внешнего магнитного поля.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим кручение внешним магнитным полем \hat{H}^* магнитоэластомерного двухфазного ($f = 1,2$) упругого полого цилиндрического стержня с однонаправлено намагниченными в поперечной плоскости полидисперсными круглоцилиндрическими волокнами ($f = 1$) в эластомере ($f = 2$) (рис.1). Стержень с осью на координатной оси z_* (рис.1,в) закреплен по внешнему ($\rho = R$) контуру полого торцевого сечения при $z_* = l$ в цилиндрической системе

координат $\rho \in (R_0; R)$, $\beta \in (0; 2\pi)$, $z_* \in (0; l)$. Отметим, что такое закрепление стержня использовано, в частности, при решении задач анизотропной теории упругости в [10].

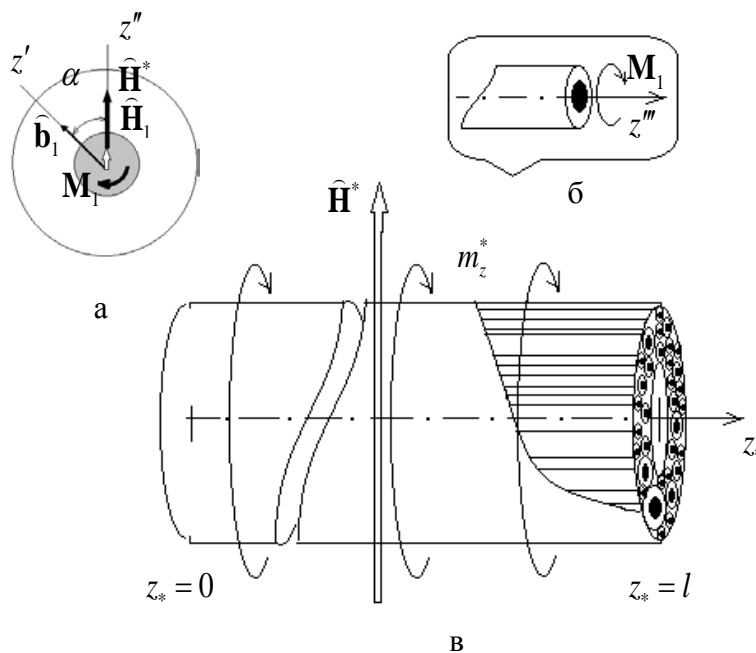


Рис.1. Поперечное сечение (а) цилиндрической ячейки с намагниченным волокном (б) и закручивание магнитоволоконного стержня во внешнем \hat{H}^* магнитном поле (в).

Начало координат ($z_* = 0$) - на свободном незакрепленном торце стержня. Из условия закрепления стержня следует, в частности, что сечения волокон на обоих торцах стержня не закреплены. Магнитоупругие свойства фаз: волокон и матрицы изотропны, а композита – трансверсально-изотропны. Поперечные размеры составных цилиндрических ячеек – волокон с цилиндрическими оболочками из эластомера (рис.1,а,б), намного меньше характерных размеров стержня и варьируются до бесконечно малых значений (рис.1,в) [7]. Представительная ячейка – цилиндрическое волокно с однородным векторным полем начальной магнитной индукции \hat{b}_1 , ортогональной оси волокна с круговым поперечным сечением радиуса a , окруженное соосным цилиндрическим слоем радиуса b эластомера (рис.1,а). Величины относительных объемных долей фаз v_f

$$v_1 = (a/b)^2, \quad v_2 = 1 - v_1 \tag{1}$$

в ячейке (рис.1,а,б) и в композите (рис.1,в) совпадают, $v_1, v_2 \subset (0; 1)$.

Во всех ячейках полидисперсной структуры векторы начальной магнитной индукции \hat{b}_1 в волокнах имеют одинаковую величину, ориентацию z' и лежат в плоскости ортогональной оси волокна z''' и стержня z_* . Вектор начальной магнитной индукции \hat{b}_1 составляет угол α с напряженностью \hat{H}^* внешнего магнитного поля (рис.1,а,в).

Объемный крутящий момент m_1 одинаков для всех волокон и не зависит от вариаций абсолютных размеров волокон рассматриваемой полидисперсной

структуры из однотипных цилиндрических ячеек, так как \mathbf{m}_1 рассчитывается через векторное произведение [1]

$$\mathbf{m}_1 = \widehat{\mathbf{J}}_1 \times \widehat{\mathbf{B}}_{01} \quad (2)$$

одинаковых для всех волокон векторов их намагниченности

$$\widehat{\mathbf{J}}_1 = \widehat{\mathbf{j}}_1 + \chi_1 \cdot \widehat{\mathbf{H}}_1 \quad (3)$$

и магнитной индукции внешнего поля

$$\widehat{\mathbf{B}}_{01} = \mu_0 \cdot \widehat{\mathbf{H}}_1 \quad (4)$$

в занимаемой ими области \mathbf{V}_1 , где начальная намагниченность $\widehat{\mathbf{j}}_1$, магнитная восприимчивость $\chi_1 = \mu_1 / \mu_0 - \delta$, магнитная проницаемость μ_1 и напряженность магнитного поля $\widehat{\mathbf{H}}_1$ волокон, единичный тензор второго ранга δ , магнитная постоянная вакуума $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Тл·м/А [1], области волокон $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V} \setminus \mathbf{V}_2$, стержня \mathbf{V} и эластомера \mathbf{V}_2 .

Между начальными намагниченностью $\widehat{\mathbf{j}}_1$ и индукцией $\widehat{\mathbf{b}}_1$ волокон имеем зависимость

$$\widehat{\mathbf{j}}_1 = \chi_1 \cdot \mu_1^{-1} \cdot \widehat{\mathbf{b}}_1 \quad (5)$$

Для рассматриваемого случая изотропии магнитоупругих свойств фаз и трансверсальной изотропии композита направления векторов напряженностей в фазах и на макроуровне $\widehat{\mathbf{H}}^*$ совпадают, поэтому $\widehat{\mathbf{H}}_1 = h_{(1)}^H \widehat{\mathbf{H}}^*$, где коэффициент концентрации напряженности магнитного поля в волокнах вычисляется

$$h_{(1)}^H = \frac{\mu_{\rho\beta}^* - \mu_{(2)}}{v_1 (\mu_{(1)} - \mu_{(2)})} \quad (6)$$

через известное точное решение Хашина-Штрикмана [11] для эффективной магнитной проницаемости

$$\mu_{\rho\beta}^* = \mu_{(2)} \left(1 + \frac{v_1}{\frac{1-v_1}{2} + \frac{\mu_{(2)}}{\mu_{(1)} - \mu_{(2)}}} \right) \quad (7)$$

в трансверсальной плоскости изотропии полидисперсного (рис.1) композита, где магнитные проницаемости волокон $\mu_{(1)}$ и эластомера $\mu_{(2)}$. Отметим, что эффективная магнитная проницаемость композита вдоль волокон

$$\mu_z^* = \sum_{f=1}^2 v_f \mu_{(f)}.$$

Таким образом, в волокнах вращательный объемный момент $m_{(1)z} = \mu_0 \widehat{\mathbf{j}}_{(1)} \widehat{\mathbf{H}}_{(1)} \sin \alpha$ (см. 2) или

$$m_{(1)z} = \frac{\mu_0}{1 + \frac{1-v_1}{2} \left(\frac{\mu_{(1)}}{\mu_{(2)}} - 1 \right)} \widehat{\mathbf{j}}_{(1)} \widehat{\mathbf{H}}^* \sin \alpha \quad (8)$$

с учетом (2)-(7), начальная намагниченность

$$\widehat{\mathbf{j}}_{(1)} = \left(1 / \mu_0 - 1 / \mu_{(1)} \right) \widehat{\mathbf{b}}_{(1)} \quad (9)$$

выражается через $\widehat{b}_{(1)}$ начальную магнитную индукцию (5).

Опуская промежуточные выкладки, приведем полученное новое аналитическое точное решение

$$\widehat{b}_z^* = \widehat{\beta}_{(1)z}^* \widehat{b}_{(1)z} \quad (10)$$

для эффективной остаточной по оси z' (рис.1,а) магнитной индукции \widehat{b}_z^* композита с однонаправленно намагниченными в поперечной плоскости полидисперсными волокнами в эластомере, где коэффициент

$$\widehat{\beta}_{(1)z}^* = \frac{v_1}{1 + (1 - v_1) \frac{\mu_{(1)} - \mu_{(2)}}{2\mu_{(2)}}}, \quad (11)$$

векторы $\widehat{\mathbf{b}}^*$, $\widehat{\mathbf{b}}_1$ сонаправлены.

2. МАГНИТОУПРУГИЕ ПОЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЯЧЕЙКЕ

На основе принципа суперпозиции магнитные и деформационные упругие поля в цилиндрической ячейке полидисперсной структуры цилиндрического полого стержня с намагниченными волокнами во внешнем магнитном поле $\widehat{\mathbf{H}}^*$ (рис.1,в) представим суммой решений трех (без учета поправок к упругим полям (раздел 3)) осесимметричных по осям z' , z'' , z''' (рис.1,а) задач:

1) расчет магнитного поля в ячейке через потенциалы

$$\begin{aligned} \psi_1' &= A_1' r \cos \theta', \quad r \in (0; a), \\ \psi_2' &= \left(A_2' r + \frac{B_2'}{r} \right) \cos \theta', \quad r \in (a; b) \end{aligned}$$

в сферической системе координат r , φ' , θ' от действия начальной намагниченности $\widehat{\mathbf{b}}_1 \neq 0$ по оси z' волокна ($\widehat{\mathbf{H}}^* = 0$), где $\theta' \in (0; \pi)$, константы интегрирования находим из условий непрерывностей потенциала $\psi_1' = \psi_2'$ и индукции $\widehat{B}'_r = \widehat{B}'_r$ на границе при $r = a$ и условия $\widehat{H}'_z \equiv \langle \widehat{H}'_z \rangle = 0$ отсутствия внешнего магнитного поля

$$\begin{aligned} A_1' a &= A_2' a + \frac{B_2'}{a}, \quad \widehat{b}_{(1)z} - \mu_{(1)} A_1' = \widehat{b}_{(2)z} - \mu_{(2)} \left(A_2' - \frac{B_2'}{a^2} \right), \\ \langle \widehat{H}'_z \rangle &= v_1 A_1' + v_2 A_2' = 0; \end{aligned}$$

2) расчет магнитного поля в ячейке

$$\begin{aligned} \psi_1'' &= A_1'' r \cos \theta'', \quad r \in (0; a), \\ \psi_2'' &= \left(A_2'' r + \frac{B_2''}{r} \right) \cos \theta'', \quad r \in (a; b) \end{aligned}$$

в сферической системе координат r , φ'' , θ'' от действия внешнего магнитного поля с напряженностью $\widehat{\mathbf{H}}^* \neq 0$ по оси z'' ($\widehat{\mathbf{b}}_1 = 0$) [7], константы интегрирования находим из условий

$$A_1'' a = A_2'' a + \frac{B_2''}{a}, \quad \mu_{(1)} A_1'' = \mu_{(2)} \left(A_2'' - \frac{B_2''}{a^2} \right),$$

$$\langle \widehat{H}_z'' \rangle = \nu_1 A_1'' + \nu_2 A_2'' = \widehat{H}_z^* \neq 0;$$

3) расчет поля напряжений

$$\sigma_{(2)r\varphi}''' = \frac{1}{2\pi l} \frac{M_{(1)z}}{r^2} \quad (12)$$

в цилиндрической системе координат r , φ''' , z''' в цилиндрическом слое эластомера $r \in (a; b)$ от действия на жесткое волокно крутящего момента

$$M_{(1)z} = m_{(1)z} \pi a^2 l \quad (13)$$

вокруг оси z''' (рис.1,а), обусловленного взаимодействием $\widehat{\mathbf{b}}_1 \neq 0$ и $\widehat{\mathbf{H}}^* \neq 0$ (8), (9) при отсутствии перемещений внешних цилиндрических границ всех ячеек композитного полого стержня - следствие принятого в этой вспомогательной задаче условия отсутствия перемещений на всех внешних цилиндрических границах стержня; торцевые сечения волокон и ячеек не закреплены. В результате подстановки (13) в (12) получим решение

$$\sigma_{(2)r\varphi}''' = \frac{1}{2} m_{(1)z} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \quad (14)$$

Решения (12), (14) следуют из общих решений

$$u_\varphi''' = Ar + \frac{B}{r}, \quad \gamma_{r\varphi}''' = r \frac{d}{dr} \left(\frac{u_\varphi'''}{r} \right) = -\frac{2B}{r^2}, \quad \sigma_{r\varphi}''' = G_{r\varphi} \gamma_{r\varphi}''' \quad (15)$$

для отличных от нуля полей окружных перемещений u_φ''' , углов сдвига $\gamma_{r\varphi}'''$ и касательных напряжений $\sigma_{r\varphi}'''$, где A , B - константы интегрирования, $G_{r\varphi}$ - модуль сдвига в трансверсальной плоскости изотропии материала.

Отметим, что решения (12)-(15) получены для случая, когда торцевые сечения волокон и ячеек не закреплены, и волокна, поворачиваясь вокруг своей оси z''' , однородно по длине закручивают эластомер в каждой из ячеек. В результате на произвольном $z_* \in (0; l)$ сечении полого композитного стержня (рис.1,б) и, в частности, на обоих его торцевых сечениях напряжения равны нулю, а перемещения равны нулю лишь по внутреннему, внешнему контурам сечения стержня и по внешним контурам всех полидисперсных кольцевых сечений (в плоскости сечения стержня) ячеек и отличны от нуля ($u_\varphi''' \neq 0$) внутри ячеек (15).

Далее, на основе решения (14), рассчитываем макроскопические реактивные однородные по внутренней и внешней поверхностям полого цилиндрического стержня «окружные» (для случая произвольной формы поперечного сечения стержня) касательные напряжения

$$\tau^* \equiv \sigma_{(2)r\varphi}|_{r=b} = \frac{1}{2} m_{(1)z} \left(\frac{a}{b} \right)^2 = \frac{1}{2} m_{(1)z} \nu_1 \quad (16)$$

на обеих цилиндрических поверхностях полого стержня с полидисперсной однонаправленной волокнистой структурой. Касательные напряжения τ^* на внутренней и внешней поверхностях полого стержня не зависят от геометрической формы поперечного сечения стержня; для случая кольцевого сечения окружные реактивные касательные поверхностные напряжения $\tau_{\rho\beta}^* = \tau^*$ в цилиндрической системе координат ρ , β , z_* (рис.1,в).

Теперь на основе принципа суперпозиции необходимо рассмотреть решение дополнительной упругой (без магнитных взаимодействий) задачи о кручении композитного стержня однородными полями касательных напряжений $-\tau^*$ на его цилиндрических внешних границах и получить искомые поправки к упругим полям (14), (15) в ячейках стержня.

3. МАКРОДЕФОРМИРОВАНИЕ КОМПОЗИТНОГО СТЕРЖНЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УПРУГИЕ ПОЛЯ В ЯЧЕЙКАХ

Решение этой новой задачи о кручении композитного полого стержня, закрепленного по внешнему ($\rho = R$) контуру кольцевого сечения при $z_* = l$ и нагруженного касательными напряжениями $-\tau^*$ (16) на его цилиндрических границах, получим из последовательного решения двух задач теории упругости на макро- и микроуровнях:

- расчет поля макронапряжений $\sigma^*(\rho)$ в полом стержне с эффективными трансверсально-изотропными упругими свойствами от действия касательных напряжений $-\tau^*$ на основе методов [10] теории упругости анизотропных сред, $\rho = \{\rho, \beta, z_*\}$;

- расчет по «трехфазной модели» - составной цилиндрической ячейке в эффективной упругой среде [7] поля напряжений в волокне и эластомере ячейки для найденных ранее значений напряжений σ^* в «макроточке» ρ .

Отметим, что в вырожденном случае, когда композитный стержень в «закрепленном» сечении может свободно проворачиваться вокруг оси z_* , тогда под действием внешнего магнитного поля \hat{H}^* каждая цилиндрическая ячейка свободно без закручивания поворачивается вокруг своей оси z''' и оси стержня z_* на угол α (рис.1,а) без возникновения в ячейках результирующего напряженного состояния (рис.1).

3.1. Решение теории упругости.

Общее решение осесимметричной задачи о кручении окружными касательными напряжениями $-\tau^*$ на внешней и внутренней цилиндрических поверхностях однородного трансверсально-изотропного полого стержня длиной l с кольцевым поперечным сечением и закрепленного по внешнему контуру торцевого сечения при $z_* = l$ получим [10] из совместного решения системы дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \sigma_{\rho\beta}^*}{\partial \rho} + \frac{\partial \sigma_{z\beta}^*}{\partial z} + \frac{2\sigma_{\rho\beta}^*}{\rho} = 0, \quad 2\varepsilon_{\rho\beta}^* = \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{u_\beta^*}{\rho} \right), \quad 2\varepsilon_{z\beta}^* = \frac{\partial u_\beta^*}{\partial z},$$

$$\sigma_{\rho\beta}^* = 2G_{\rho\beta}^* \varepsilon_{\rho\beta}^*, \quad \sigma_{z\beta}^* = 2G_{z\beta}^* \varepsilon_{z\beta}^*$$

для окружных перемещений

$$u_\beta^* = A_1 \left(\rho^3 - \frac{4}{\xi} \rho z_*^2 \right) + \frac{A_2}{\rho} + A_0 \rho, \quad (17)$$

касательных напряжений

$$\sigma_{\rho\beta}^* = 2G_{\rho\beta}^* (A_1 \rho^2 - A_2 / \rho^2), \quad \sigma_{z\beta}^* = -8G_{\rho\beta}^* A_1 \rho z_*, \quad (18)$$

где коэффициент $\xi = G_{z\beta}^*/G_{\rho\beta}^*$ сдвиговой анизотропии, эффективные модули сдвига полидисперсной волокнистой структуры вдоль $G_{z\beta}^*$ и поперек $G_{\rho\beta}^*$ волокон, константы интегрирования: A_0, A_1, A_2 . Константу A_0 находим из условия $u_{\beta|\rho=R, z_*=l}^* = 0$ неподвижности внешнего контура на торце при $z_* = l$ стержня; другой торец при $z_* = 0$ свободен от нагрузки и закрепления. Константы A_1, A_2 - из условий нагружения

$$\sigma_{\rho\beta|\rho=R}^* = -\tau^*, \quad \sigma_{\rho\beta|\rho=R_0}^* = -\tau^*$$

на обеих цилиндрических поверхностях стержня (16).

Касательные напряжения $\sigma_{z\beta}^*$ (18) в стержне выразим

$$\sigma_{z\beta}^*(\rho, z_*) = \frac{m_z^*}{J_\rho^*} \rho z_*, \quad (19)$$

через интенсивность приложенного распределенного крутящего момента (рис.1,в)

$$m_z^* = 2\pi\tau^*(R^2 - R_0^2),$$

так как результирующий крутящий момент

$$M_z^* \equiv \int_S \rho \sigma_{z\beta}^* dS = m_z^* z_*$$

в произвольном с координатой z_* поперечном сечении стержня, где напряжения $\sigma_{z\beta}^*$ (19), полярный момент инерции сечения $J_\rho^* = \pi(R^4 - R_0^4)/2$.

Таким образом, имеем

$$\sigma_{\rho\beta}^* = -\frac{v_1 m_{(1)z}}{2(R^2 + R_0^2)} \left(\rho^2 + \left(\frac{R_0 R}{\rho} \right)^2 \right), \quad \sigma_{z\beta}^* = \frac{2v_1 m_{(1)z}}{R^2 + R_0^2} \rho z_* \quad (20)$$

с учетом (19) и найденных в решении (17), (18) констант интегрирования

$$A_1 = -\frac{\tau^*}{2G_{\rho\beta}^*(R^2 + R_0^2)}, \quad A_2 = -R^2 R_0^2 A_1, \quad A_0 = \left(\frac{4}{\xi} l^2 + R_0^2 - R^2 \right) A_1$$

Переход от макронапряжений $\sigma_{\rho\beta}^*, \sigma_{z\beta}^*$ (20), например, к осредненным по фазам: волокну $\sigma_1 = \langle \sigma \rangle_1$ и матрице $\sigma_2 = \langle \sigma \rangle_2$ напряжениям выполним

$$\sigma_{(f)\rho\beta} = \frac{G_{(f)}}{G_{\rho\beta}^*} \sigma_{\rho\beta}^* n_{(f)\rho\beta}^\gamma, \quad \sigma_{(f)z\beta} = \frac{G_{(f)}}{G_{z\beta}^*} \sigma_{z\beta}^* n_{(f)z\beta}^\gamma \quad (21)$$

через коэффициенты концентраций сдвиговых деформаций $\gamma_{(f)\rho\beta}, \gamma_{(f)z\beta}$ в фазах ячейки

$$n_{(1)\rho\beta}^\gamma \equiv \frac{\gamma_{(1)\rho\beta}}{\gamma_{\rho\beta}^*} = \frac{G_{\rho\beta}^* - G_{(2)}}{v_1(G_{(1)} - G_{(2)})}, \quad n_{(2)\rho\beta}^\gamma \equiv \frac{\gamma_{(2)\rho\beta}}{\gamma_{\rho\beta}^*} = (1 - v_1 n_{(1)\rho\beta}^\gamma) / v_2,$$

$$n_{(1)z\beta}^\gamma \equiv \frac{\gamma_{(1)z\beta}}{\gamma_{z\beta}^*} = \frac{G_{z\beta}^* - G_{(2)}}{v_1(G_{(1)} - G_{(2)})}, \quad n_{(2)z\beta}^\gamma \equiv \frac{\gamma_{(2)z\beta}}{\gamma_{z\beta}^*} = (1 - v_1 n_{(1)z\beta}^\gamma) / v_2$$

и эффективные модули сдвига однонаправленного волокнистого композита в поперечной (плоскости изотропии) $G_{\rho\beta}^*$ и продольной $G_{z\beta}^*$ плоскостях, модули сдвига волокон $G_{(1)}$ и эластомера $G_{(2)}$, макроскопический угол сдвига

$\gamma^* = \sum_{f=1}^2 v_f \gamma_f$. В локальной цилиндрической системе координат r, φ, z''' составной

цилиндрической ячейки компоненты напряжений σ_1, σ_2 в фазах рассчитываем

$$\begin{aligned} \sigma_{(f)rr} &= -\sigma_{(f)\varphi\varphi} = \sigma_{(f)\rho\beta} \sin 2\varphi, \quad \sigma_{(f)zz} = 0, \\ \sigma_{(f)r\varphi} &= \sigma_{(f)\rho\beta} \cos 2\varphi, \quad \sigma_{(f)zr} = \sigma_{(f)z\beta} \sin \varphi, \quad \sigma_{(f)z\varphi} = \sigma_{(f)z\beta} \cos \varphi \end{aligned}$$

через соответствующие напряжения $\sigma_{(f)\rho\beta}, \sigma_{(f)z\beta}$ (21) в фазах ячейки в системе координат ρ, β, z_* стержня.

В результате в эластомере результирующее напряжение

$$\sigma_{(2)r\varphi} = \sigma_{(2)r\varphi}''' + \sigma_{(2)\rho\beta} \cos 2\varphi$$

или

$$\sigma_{(2)r\varphi} = \frac{1}{2} v_1 m_{(1)z} \left[\left(\frac{b}{r} \right)^2 - T_1 \cos 2\varphi \right], \quad (22)$$

другие отличные от нуля напряжения

$$\sigma_{(2)rr} = -\sigma_{(2)\varphi\varphi} = \frac{1}{2} v_1 m_{(1)z} T_1 \sin 2\varphi, \quad (23)$$

$$\sigma_{(2)zr} = 2v_1 m_{(1)z} T_2 \sin \varphi, \quad \sigma_{(2)z\varphi} = 2v_1 m_{(1)z} T_2 \cos \varphi$$

с учетом допустимых значений $\rho \in (R_0; R), r \in (a; b), \varphi \in (0; 2\pi)$ обозначений

$$T_1 = \frac{\left(\frac{G_{(1)}}{G_{\rho\beta}^*} - 1 \right) \left(\left(\frac{\rho}{R} \right)^2 + \left(\frac{R_0}{\rho} \right)^2 \right)}{(1-v_1)(g_G-1)(1+q^2)}, \quad T_2 = \frac{\left(\frac{G_{(1)}}{G_{z\beta}^*} - 1 \right) \rho z_*}{(1-v_1)(g_G-1)(R^2 + R_0^2)}, \quad (24)$$

$$g_G \equiv G_{(1)}/G_{(2)}, \quad q = R_0/R$$

и решений (14), (20). Среднее значение составляющей $\sigma_{(2)r\varphi}'''$ (14) поля напряжений в эластомере равно нулю, так как в осях ρ, β компоненты этого поля имеют вид

$$\sigma_{(2)\rho\beta}''' = \sigma_{(2)r\varphi}''' \cos 2\varphi, \quad \sigma_{(2)\beta\beta}''' = -\sigma_{(2)\rho\rho}''' = \sigma_{(2)r\varphi}''' \sin 2\varphi$$

и оператор усреднения

$$\langle \dots \rangle_2 = \frac{1}{\pi(b^2 - a^2)} \int_a^b \int_0^{2\pi} \dots r d\varphi dr$$

Точное решение для эффективного продольного модуля сдвига $G_{z\beta}^*$ однонаправленного волокнистого композита с полидисперсной структурой (рис.1) не известно [7], поэтому в (24) воспользуемся решением Хашина-Штрикмана

$$G_{z\beta}^* = G_{(2)} \left[1 + \frac{2v_1(g_G - 1)}{1 + v_1 + (1 - v_1)g_G} \right], \quad (25)$$

являющееся нижней границей одноименной «вилки» для случая жестких ($G_{(1)} \succ G_{(2)}$) волокон. Отметим, что аналогичные (25) решения Хашина-Штрикмана для других эффективных констант, например, объемного модуля плоской деформации $k_{\rho\beta}^*$ и магнитной проницаемости $\mu_{\rho\beta}^*$ (7) в плоскости изотропии двухфазного однонаправленного волокнистого композита в точности совпадают с известными решениями [7] для полидисперсной структуры (рис.1),

полученными из расчетной схемы: волокно с прослойкой матрицы в эффективной трансверсально-изотропной среде. Решения Хашина-Штрикмана для поперечного модуля сдвига

$$G_{\rho\beta}^* = G_{(2)} \left[1 + \frac{v_1(1+\zeta)(g_G - 1)}{\zeta + v_1 + (1-v_1)g_G} \right] \quad (26)$$

однонаправленного волокнистого композита, где параметры $\zeta = \frac{3\kappa + 1}{3\kappa + 7}$, $\kappa = k_{(2)}/G_{(2)}$, объемный модуль плоской деформации эластомера $k_{(2)}$.

Для оценки прочности эластомера могут быть использованы главные значения $\lambda_{1,2,3}$ тензора напряжений в локальной точке \mathbf{r} эластомера внутри макроточки \mathbf{p} стержня, являющихся корнями кубического уравнения

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 - I_2\lambda - I_3 = 0,$$

где коэффициенты

$$I_1 = 0, \quad I_2 = \sigma_{(2)rr}^2 + \sigma_{(2)zr}^2 + \sigma_{(2)z\varphi}^2 + \sigma_{(2)r\varphi}^2,$$

$$I_3 = 2\sigma_{(2)zr}\sigma_{(2)z\varphi}\sigma_{(2)r\varphi} + \sigma_{(2)rr}(\sigma_{(2)zr}^2 - \sigma_{(2)z\varphi}^2)$$

или

$$I_2 = \frac{1}{4}v_1^2 m_{(1)z}^2 \left[T_1^2 + 16T_2^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^4 - 2T_1\left(\frac{b}{r}\right)^2 \cos 2\varphi \right],$$

$$I_3 = 2v_1^3 m_{(1)z}^3 T_2^2 \left[\left(\frac{b}{r}\right)^2 \sin 2\varphi - T_1 \sin 4\varphi \right]$$

с учетом решений (22)-(24). Отметим, что из равенства нулю производных $\partial\sigma_{r\varphi}/\partial\varphi = 0$, $\partial\sigma_{r\varphi}/\partial\rho = 0$ окружных касательных напряжений $\sigma_{r\varphi}$ (22)-(24), например, на границах волокон при $r = a$ для случая высокомагнитопроницаемого эластомера ($\mu_{(2)} \gg \mu_{(1)}$) и жестких волокон ($G_{(1)} \gg G_{(2)}$) следует, что напряжения $\sigma_{r\varphi}$ принимают максимальные значения

$$\sigma_{r\varphi}^{\max} = \mu_0 S_{r\varphi}^{\max} \hat{j}_{(1)} \hat{H}^* \sin \alpha, \quad (27)$$

где функция концентрации напряжений

$$S_{r\varphi}^{\max}(v_1) = \frac{1}{1+v_1} \left(1 + \frac{2v_1 q}{(1-v_1)(1+q)g_{z\beta}^*(v_1)} \right) \quad (28)$$

в точках межфазных границ с локальной координатой $\varphi = \pi/2 + \pi k$ в макроточках стержня с координатой $\rho = R\sqrt{q}$, где $g_{z\beta}^*(v_1) = G_{z\beta}^*(v_1)/G_{(2)}$, целые числа $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ с учетом (25). В предельном случае для $q \rightarrow 0$ имеем

$$\sigma_{r\varphi}^{\max} = \frac{\mu_0}{1+v_1} \hat{j}_{(1)} \hat{H}^* \sin \alpha$$

3.2. Решение сопротивления материалов.

В упрощенной постановке можно от касательных напряжений τ^* (16) на внутренней и внешней цилиндрических поверхностях полого стержня перейти к распределенному по оси стержня крутящему моменту с интенсивностью

$m_z^* \equiv \frac{dM_z^*}{dz_*}$, где M_z^* - результирующий крутящий момент в сечении с координатой

z_* . Например, для полого цилиндрического стержня с кольцевым поперечным сечением (рис.1) интенсивность

$$m_z^* = \pi v_1 m_{(1)z} (R^2 - R_0^2) \quad (29)$$

рассчитывается через плотность $m_{(1)z}$ объемного крутящего магнитного момента.

Таким образом, в произвольном с координатой $z_* \in (0;l)$ поперечном сечении полого стержня действует результирующий крутящий момент

$$M_z^* = m_z^* z_* \quad (30)$$

Отметим, что решение (30) с учетом (29) в точности совпадает с результирующим (по «отсеченной» сечением с координатой z_* области $\mathbf{V}(z_*)$ стержня) моментом

$$M_z^*(z_*) = m_{(1)z} V_1(z_*),$$

где объем включений $V_1(z_*) = v_1 V(z_*)$, объем «отсеченной» части $V(z_*) = \pi(R^2 - R_0^2)z_*$ длиной z_* .

На макроуровне градиент относительного угла закручивания

$$\theta_{,z}^* \equiv \frac{d\theta^*}{dz_*} = \frac{m_z^*}{G_{z\beta}^* J_\rho^*} \quad (31)$$

композитного намагниченного волокнистого стержня во внешнем магнитном поле, где эффективный «продольный» модуль сдвига $G_{z\beta}^*$ композита и полярный момент инерции J_ρ^* кольцевого поперечного сечения стержня. Зависимость градиента относительного угла закручивания

$$\theta_{,z}^* = f_v f_q \frac{2\mu_0}{G_{(2)} R^2} \hat{j}_{(1)} \hat{H}^* \sin \alpha$$

полидисперсного композитного стержня (8), (29), (31) от объемной доли v_1 намагниченных волокон определяется концентрационной функцией

$$f_v(v_1) = v_1 / \left(\left[1 + \frac{1-v_1}{2} (g_\mu - 1) \right] g_{z\beta}^*(v_1) \right), \quad (32)$$

зависимость $\theta_{,z}^*$ от параметра $q = R_0 / R$ - функцией

$$f_q(q) = 1 / (1 + q^2)$$

интенсивности закручивания, где $q \in (0;1)$, параметр $g_\mu \equiv \mu_{(1)} / \mu_{(2)}$ относительной магнитной проницаемости фаз, относительный эффективный продольный модуль сдвига

$$g_{z\beta}^*(v_1) = G_{z\beta}^*(v_1) / G_{(2)}. \quad (33)$$

с использованием решения Хашина-Штрикмана (25).

4. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

Численный расчет на рис.2 функции $f_v = f_v(v_1)$ (32) проведен при значениях коэффициентов Пуассона волокон $\nu_{(1)} = 0.1$, матрицы $\nu_{(2)} = 0.45$,

при варьировании жесткостного параметра g_G и фиксированных значениях: $g_\mu = 10$ (рис. 2,а), $g_\mu \rightarrow 0$ (рис. 2,б) фаз с учетом (25), (32), (33).

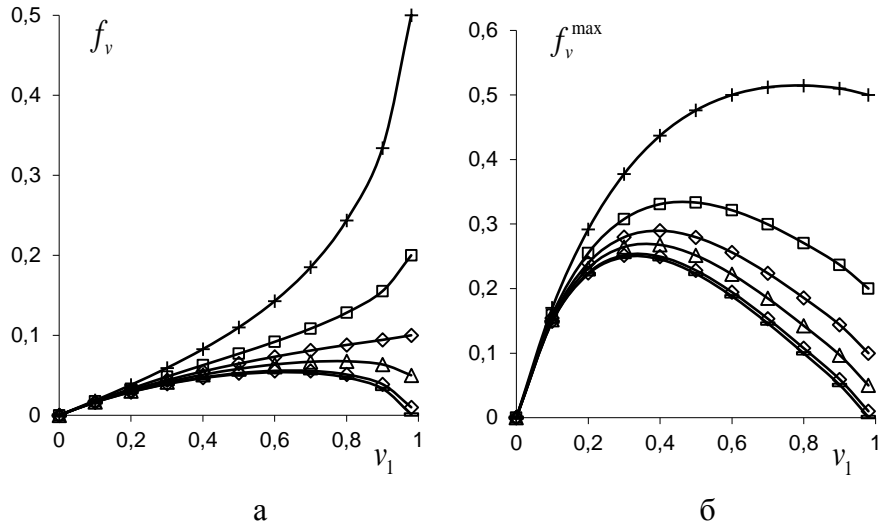


Рис.2. Зависимости интенсивности закручивания f_v от объемной доли v_1 волокон, параметр $g_G = 1000$ (—), 100 (○), 20 (△), 10 (◇), 5 (□), 2 (+).

Видно (рис.2,а), что для жестких волокон (—), (○), (△) зависимость $f_v = f_v(v_1)$ имеет существенно немонотонный характер и максимальный градиент $\theta_{z,z}^*$ относительного угла закручивания полидисперсного композитного стержня с намагниченными жесткими волокнами во внешнем магнитном поле достигается при относительном объемном содержании жестких $v_1 \approx 0.7$ (—), (○) и менее жестких $v_1 \approx 0.8$ (△) волокон. Отметим, что для магнитоэластомера имеет место сильное различие в упругих свойствах жестких намагниченных включений (волокон) и податливой эластомерной матрицы [2-6].

Для повышения крутильной податливости стержня во внешнем магнитном поле необходимо выбирать для матрицы композита низко модульный эластомер с высокой магнитной проницаемостью, так как выполняется неравенство для производной $\partial f_v / \partial g_\mu < 0$ функции f_v (32) для всех значений $v_1 \in (0;1)$, $g_G > 0$. Для предельного случая $g_\mu \rightarrow 0$ (рис.2,б) из (32) получим

$$f_v^{\max}(v_1) = \frac{2v_1}{(1+v_1)g_{z\beta}^*(v_1)} \quad (34)$$

Из сравнения соответствующих кривых: f_v (31) на рис. 2,а и f_v^{\max} (34) на рис.2,б, например, для магнитоэластомера с жесткими (—) намагниченными волокнами при оптимальной объемной доле $v_1 \approx 0.3$ следует, что повышением магнитной проницаемости эластомера можно примерно в 5 раз увеличить крутильную деформируемость композитного стержня во внешнем магнитном поле.

На рис.3,а приведены результаты расчета зависимостей максимальных значений концентраций $S_{r\varphi}^{\max}$ (28) межфазных касательных напряжений $\sigma_{r\varphi}^{\max}$ (27) от объемной доли v_1 жестких волокон в эластомере с высокой магнитной

проницаемостью при различных значениях параметра q относительного размера полости стержня. На рис.3,б изображено кольцевое поперечное сечение стержня, полярные углы β , φ и расположение точек с координатами: $\rho = R\sqrt{q}$, $r = a$, $\varphi = \pm\pi/2$ на поверхностях волокон, где действуют максимальные касательные напряжения $\sigma_{r\varphi}^{\max}$. Видно, что графики (—), (○), (△), (◇), (□) зависимости $S_{r\varphi}^{\max}(v_1)$ имеют немонотонный характер и наименьшие значения максимальных напряжений $\sigma_{r\varphi}^{\max}$ достигаются при объемной доле волокон $v_1 \approx 0.9$.

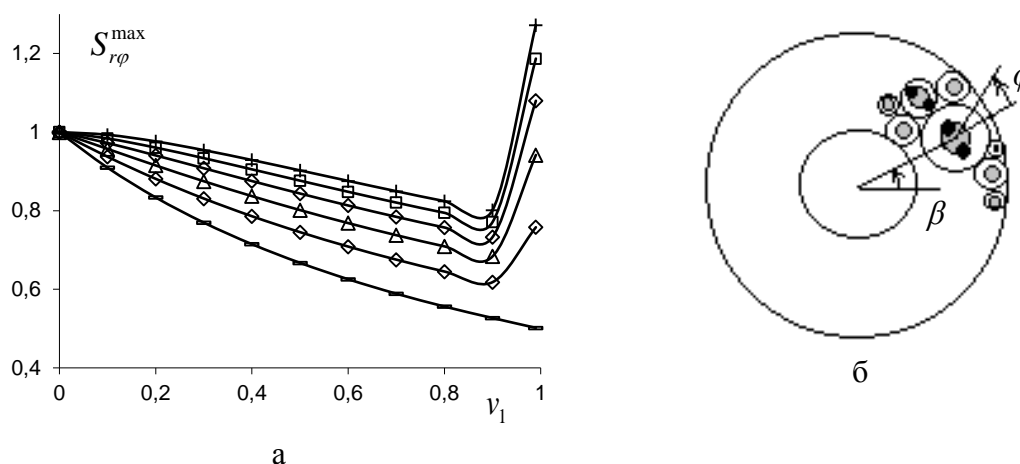


Рис.3. Зависимости (а) максимальных значений концентраций $S_{r\varphi}^{\max}$ межфазных касательных напряжений (в черных точках (б)) от объемной доли v_1 волокон, параметр $q=0,001$ (—), $0,2$ (○), $0,4$ (△), $0,6$ (◇), $0,8$ (□), $0,999$ (+).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена двухуровневая структурная модель магнитодеформационного эффекта волокнистого композитного стержня под воздействием внешнего квазистатического магнитного поля и получены новые точные аналитические решения для возникающих магнитоупругих полей на микро и макро уровнях на основе обобщения известных полидисперсных моделей механики композитов на новый класс задач магнитоуправляемых эластомеров с ориентировано намагниченными волокнами. Даны новые аналитические решения для эффективной остаточной намагниченности композита и для деформационного упругого поля в эластомере составной цилиндрической ячейки от действия на волокно вращающего магнитного момента. Получено решение краевой задачи теории упругости для нахождения макроуровневых полей деформирования с формулировкой граничных условий в напряжениях на внутренней и наружной цилиндрических поверхностях полого стержня с однородными эффективными трансверсально-изотропными упругими свойствами. Проведен анализ влияния объемной доли намагниченных волокон на крутильную деформативность композитного стержня во внешнем магнитном поле. Установлен немонотонный характер этой зависимости, определены оптимальные значения объемной доли волокон и сделан вывод о необходимости выбора эластомера с высокой магнитной проницаемостью и малой жесткостью на растяжение. Определены

координаты макроточки полого стержня и внутренние (в макроточке) локальные координаты точки межфазной поверхности волокна, где действуют максимальные значения окружных касательных напряжений $\sigma_{r\varphi}^{\max}$ для случая высокомагнитопроницаемого эластомера и жестких волокон. Проведен анализ влияния параметра q относительного размера полости стержня и величины объемной доли жестких волокон v_1 на максимальные значения $\sigma_{r\varphi}^{\max}$ межфазных касательных напряжений: установлен немонотонный характер зависимости $\sigma_{r\varphi}^{\max}(v_1)$ и определены значения v_1 , при которых достигаются наименьшие значения максимальных напряжений.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вонсовский С.В.* Магнетизм. Магнитные свойства диа-, пара-, ферро-, антиферро- и ферримагнетиков. - М.: Наука, 1971. - 1032 с.
2. *Чертович А.В., Степанов Г.В., Крамаренко Е.Ю.* Магнитоуправляемые эластомеры: синтез, свойства, применение / XVII Зимняя школа по механике сплошных сред. Сборник статей. - Пермь, 2011. - С.328.
3. *Chertovich A.V., Stepanov G.V., Kramarenko E.Yu., Khokhlov A.R.* New composite elastomers with giant magnetic response // *Macromolecular Materials and Engineering*. – 2010. – Vol.295. - P. 336
4. *Stolbov O. V., Raikher Yu. L., Balasoiu M.* Modeling of magnetodipolar striction in soft magnetic elastomers // *Soft Matter*. – 2011. – N7. - P.8484-8487.
5. *Столбов О.В., Райхер Ю.Л., Степанов Г.В., Чертович А.В., Крамаренко Е.Ю., Хохлов А.Р.* Низкочастотная реология магнитоуправляемых эластомеров с изотропной структурой // *Высокомолекулярные соединения. Серия А*. – 2010. – №12. – С.2158-2169.
6. *Melenev P., Raikher Yu., Stepanov G., Rusakov V., Polygalova L.* Modeling of the field-induced plasticity of soft magnetic elastomers // *J. Intelligent Material Systems and Structures*. – 2011. – Vol.22. – P.531-538.
7. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. - М.: Мир, 1982. - 334 с.
8. *Паньков А.А.* Методы самосогласования механики композитов. - Пермь: Изд-во ПГТУ, 2008. - 253 с.
9. *Паньков А.А.* Самосогласованные решения для коэффициентов электромагнитной связи волокнистого пьезокомпозита // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2013. – Т.19. – №2. - С.233-243.
10. *Лехницкий С.Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. – М.: Наука, 1971. – 240 с.
11. *Шермергор Т.Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. - М.: Наука, 1977. - 399 с.

Поступила в редакцию 16 октября 2014 года.

Сведения об авторе:

Паньков Андрей Анатольевич – д.ф.-м.н., проф., Кафедра механики композиционных материалов и конструкций, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия; e-mail: a_a_pankov@mail.ru