

УДК 539.37

НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ КОЛЬЦЕВОЙ ТРЕХСЛОЙНОЙ ВОЛОКНИСТОЙ КОМПОЗИТНОЙ ПЛАСТИНКИ, СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПО ВНУТРЕННЕЙ И ЗАЩЕМЛЕННОЙ ПО ВНЕШНЕЙ КРОМКАМ

Джагангиров А.А.

Азербайджанский Технический Университет, г. Баку, Азербайджан

РЕЗЮМЕ

Исследуется несущая способность трехслойной кольцевой пластинки свободно опертой по внутреннему и защемленной по внешнему контурам, покрытой с лицевых сторон тонкими слоями, средний слой которой армирован волокнами. Предполагается, что материалы матрицы, волокон и покрытий являются идеально-пластическими без упрочнения, причем их свойства различны при растяжении и сжатии, а волокна и покрытие настолько тонкие, что их поперечными размерами можно пренебречь. Контакт между матрицей с покрытиями, и с волокнами считается идеальным. Показано, что пластинки разбиваются на пять кольцевых зон, в каждой из которых реализуется различные пластические состояния. Определены статические поля моментов и кинематические поля скоростей прогибов, найдены уравнения для неизвестных радиусов, разделяющих различные пластические зоны, а также уравнения для определения опорной реакции и предельной нагрузки в случае равномерно распределенной поперечной нагрузки.

Ключевые слова: волокнистый трехслойный композит; несущая способность; изгиб; предельная нагрузка; ассоциированный закон течения

LOAD-CARRYING CAPACITY OF A FIBER – REINFORCED ANNULAR THREE LAYER COMPOSITE PLATE, FREE SUPPORTED ON INTERNAL AND CLAMPED ON EXTERNAL CONTOURS

Jahangirov A.A.

Azerbaijan Technical University, Baku, Azerbaijan

SUMMARY

The load-carrying capacity of annular plate made of a fiber-reinforced three layer composite and loaded with uniformly distributed transverse forces is investigated in the paper. The plate is clamped on external and free supported on internal contours. There used the plastic yield condition which is found by using the limit forces of all components of composite and the characterized geometrical parameters. The outside thin layers (covers) are isotropic and homogeneous. The materials of central layer (matrix), fibers and covers are perfectly plastic with different yield limits in tension and compression. The matrix is reinforced with four layers of fibers on both sides of the middle surface, each layer of which consists of one family and follows the lines of principal stress directions. The statically allowable fields of bending moments and the corresponding allowable fields of the rate of deflections are determined.

Key words: four layers of fiber-reinforced; three layered composite; bending; limit load; perfectly plastic; different yield limits in tension and compression

ВВЕДЕНИЕ

Конструкции, изготовленные из композитных материалов, широко применяются в различных областях: в авиационной и космической технике, корабле- и машиностроении, строительстве, в морских нефтяных платформах, эстакадах, в трубопроводной транспортировке и др., поэтому исследование несущей способности композитных оболочек и пластин является актуальной задачей механики. При наступлении предельного состояния конструкция неспособна сопротивляться внешним воздействиям или получает недопустимые по условиям эксплуатации повреждения и деформации. Расчеты предельных нагрузок позволяют более правильно и экономно определять размеры конструкций и сооружений. Для полного определения пластического состояния требуются также соотношения, описывающие связь между обобщенными усилиями и соответствующими им обобщенными скоростями перемещений. Такие соотношения в теории предельного равновесия даются в виде ассоциированного закона течения.

Для различных условий пластичности гиперповерхность текучести в обобщенных напряжениях будет различной. В работе [1] рассмотрено предельное равновесие оболочек вращения из волокнистого композита, материалы матрицы и волокон которого являются идеально жесткопластическими. В работах [2-4] эти результаты применены к решениям конкретных задач. В [5] обсуждается аппроксимация поверхностей текучести для цилиндрических оболочек. В [6] предлагается метод построения поверхности текучести двоякопериодического однонаправленного композиционного материала с осреднением напряжений. Различные вопросы построения поверхностей текучести обсуждаются в работах [7-9]. Несущая способность круглых трехслойных пластинок, средний слой которой армирован волокнами, находящихся под воздействием равномерно распределенных нагрузок, исследован в работах [10,11], соответственно для защемленных и свободно опертых контуров. Определены статически допустимые поля изгибающих моментов и кинематические допустимые поля скоростей прогибов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим пластический (без растяжений) изгиб кольцевой композитной пластины, занимающей область $A \leq R \leq B$, $-H/2 \leq z \leq H/2$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ при осесимметричной нагрузке интенсивностью $q=q(R)$, цилиндрической системе координат R , φ , z , где ось z направлена вниз. Пластинка свободно оперта по внутренней и защемлена по внешней кромкам.

Предположим, что нагрузка q направлена вниз, а толщина пластины H постоянна. Пластина остается недеформируемой вплоть до достижения предельной нагрузки (характеризующей несущую способность пластины). Композитная пластина представляет собой идеально пластическую матрицу, соответствующую модифицированному условию текучести Треска [1,13,14], имеющую различные напряжения текучести $k\sigma_0$ и σ_0 ($0 < k \leq 1$) при растяжении и сжатии, армированную волокнами в двух ортогональных направлениях,

совпадающих с осями главных изгибающих моментов. Пластина покрыта с обеих сторон тонкими слоями. Материалы волокон и покрытий также считаются идеально жесткопластическими. Пусть $S_{0i}^+ = S_{0i}$ и $S_{0i}^- = \mu_i S_{0i}^+$ – предельные усилия для волокон при растяжении и сжатии соответственно; $S_{0i}^+ = F_i^+ \sigma_{0i}^+$, $S_{0i}^- = F_i^- \sigma_{0i}^-$, F_i^- , F_i^+ – площади поперечного сечения волокон; σ_{0i}^+ , σ_{0i}^- – пределы текучести для волокон при растяжении и сжатии; $i=1, 2$ – ортогональные направления, совпадающие с осями главных изгибающих моментов. Волокна укладываются в каждом направлении в два слоя, не симметричных относительно срединной плоскости конструкции. Их количество различно в каждом направлении. Покрытия являются достаточно тонкими слоями, материал которых однородный изотропный идеально пластический с пределами текучести Q_0 и $Q_0^- = \nu Q_0$ ($0 \leq \nu \leq 1$) при растяжении и сжатии соответственно. Приближенное условие текучести в плоскости главных изгибающих моментов имеет вид различных неправильных шестиугольников в зависимости от механических свойств матрицы, волокон и покрытий, а также характерных геометрических параметров [13,14].

Обозначим отнесенные к единице длины главные изгибающие моменты в радиальном и окружном направлениях как M_1 и M_2 и примем следующие безразмерные величины

$$r = \frac{R}{H}, \quad a = \frac{A}{H}, \quad b = \frac{B}{H}, \quad P = \frac{q}{4\sigma_0}, \quad m_i = \frac{4M_i}{\sigma_0 H^2}.$$

Тогда уравнение равновесия будет иметь вид

$$(rm_1)' - m_2 = -T^{ar} + Ta \quad \left(T^{ar} = \int_a^r P(\eta) \eta d\eta \right) \tag{1}$$

где штрих означает производную по r , T – неизвестная опорная реакция на внутреннем контуре, отнесенная к единице длины.

Скорости изменения кривизны в радиальном и окружном направлениях χ_1 и χ_2 выражены через производные скорости прогиба w

$$\chi_1 = -w'', \quad \chi_2 = -(w'/r). \tag{2}$$

Уравнение (1) является обыкновенным дифференциальным уравнением с двумя неизвестными m_1 и m_2 . Второе уравнение между этими величинами дается условием пластического течения (рис.1).

Предположим, что пластинка подчиняется условию текучести, которое в плоскости $m_1 m_2$ представляет собой неправильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис.1). Пластина разбивается на кольцевые области, в каждой из которых условие текучести линейное и интегрирование уравнения (2) легко осуществляется. На окружности, разделяющей кольцевые области различных решений, должны быть непрерывны в силу условий равновесия изгибающий момент m_1 и срезающее усилие, изгибающий же момент m_2 может быть разрывным.

Для сторон AB и AF шестиугольника имеем следующие предельные значения положительных и отрицательных изгибающих моментов [13,14]

$$m_i = m_{0i}^+ = c_0 + c_{1i}^+ s_{0i} - c_{2i} s_{0i}^2 + c_3 q_0 - c_4 q_0^2 - c_{5i} s_{0i} q_0,$$

для сторон CD и DE

$$m_i = -m_{0i}^- = -[c_0 + c_{1i}^- s_{0i} - c_{2i} s_{0i}^2 + c_3 q_0 - c_4 q_0^2 - c_{5i} s_{0i} q_0],$$

а для сторон EF и BC

$$m_2 = \alpha m_1 + \beta_1, \quad m_2 = \alpha m_1 + \beta_2,$$

соответственно.

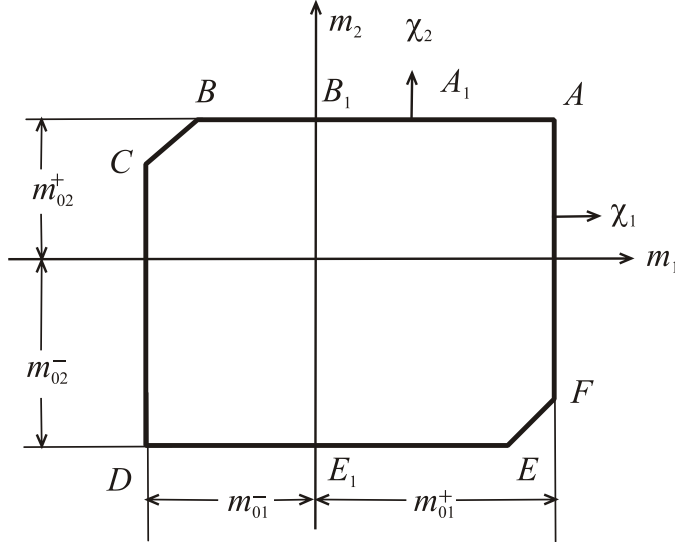


Рис.1. Шестиугольник текучести.

Здесь приняты следующие обозначения для коэффициентов

$$c_0 = \frac{2k}{1+k}, \quad c_{1i}^+ = 4 \left(d_i'' + \mu d_i' + \frac{1-\mu_i}{2} \frac{1-k}{1+k} \right),$$

$$c_{2i} = \frac{2(1-\mu_i)^2}{1+k}, \quad c_3 = 4 \frac{1+\nu k}{1+k}, \quad c_4 = \frac{2(1-\nu)^2}{1+k},$$

$$c_{5i} = \frac{4(1-\mu_i)(1-\nu)}{1+k} \quad (i=1, 2), \quad c_{1i}^- = 4 \left(d_i + \mu d_i'' + \frac{1-\mu_i}{2} \frac{1-k}{1+k} \right),$$

$$\alpha = \frac{(1-k)[(1-\mu_2)s_{02} + (1-\nu)q_0] + k}{(1-k)[(1-\mu_1)s_{01} + (1-\nu)q_0] + k}, \quad i=1, 2; \quad q_0 = \frac{Q_0}{\sigma_0 H^2},$$

$$\beta_1 = a_2 - \alpha a_1, \quad \beta_2 = a_4 - \alpha a_3, \quad s_{0i} = \frac{S_{0i}}{\sigma_0 H^2},$$

$$a_1 = \frac{1}{1-k^2} \left\{ k(1-k) + (1+k^2)[(1-\mu_1)s_{01} + (1-\nu)q_0] - \right. \\ \left. - 2k[(1-\mu_2)s_{02} + (1-\nu)q_0] \right\} + 4(d_1'' + \mu_1 d_1') s_{01}^+ + 2(1+\nu)q_0,$$

$$a_2 = -\frac{1}{1-k^2} \left\{ k(1-k) - (1+k^2)[(1-\mu_2)s_{02} + (1-\nu)q_0] + \right. \\ \left. + 2k[(1-\mu_1)s_{01} + (1-\nu)q_0] \right\} - 4(d_2' + \mu_2 d_2'') s_{02} - 2(1+\nu)q_0,$$

$$a_3 = -a_1 - 4(1-\mu_1)(d_1' - d_1'') s_{01}, \quad a_4 = -a_2 - 4(1-\mu_2)(d_2' - d_2'') s_{02},$$

d_i' и d_i'' – безразмерные расстояния (отнесенные к толщине H) от срединной плоскости до верхних и нижних слоев волокон.

Уравнение (1) будет решено при соблюдении следующих граничных условий: на свободно опертом краю $m_1 = 0$, $w = 0$; вдоль заделанного края $w = 0$,

$$dw/dr = 0 \text{ или } m_1 = -m_{10}^-.$$

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Поведение пластинки зависит от соотношения предельных значений главных изгибающих моментов. Из формы изгиба пластины (рис.2) видно, что скорость кривизны χ_2 меняет знак.

Рассмотрим частные случаи.

Для указанного на рисунке вида нагрузки и краевых условий радиальный изгибающий момент будет иметь положительное значение (растяжение нижних, сжатие верхних слоев) вплоть до области примыкающих к заземленному внешнему контуру, где радиальный изгибающих момент имеет отрицательное значение. В этом случае пластическое состояние пластинки определяется стороной E_1E шестиугольника текучести около внутренней кромки, на которой $m_2 = -m_{20}^-$. Учитывая, что внешняя нагрузка q направлена вниз (растяжение нижних и сжатие верхних слоев), для граничных условий $m_1 = 0$ при $r = a$ и $m_1 = -m_{01}^-$ при $r = b$ решение задачи можно искать для последовательности состояний $E_1E - EF - FA - AB - BC$, так как в этом случае возможно определение статического поля, удовлетворяющего соответствующим условиям непрерывности [12].

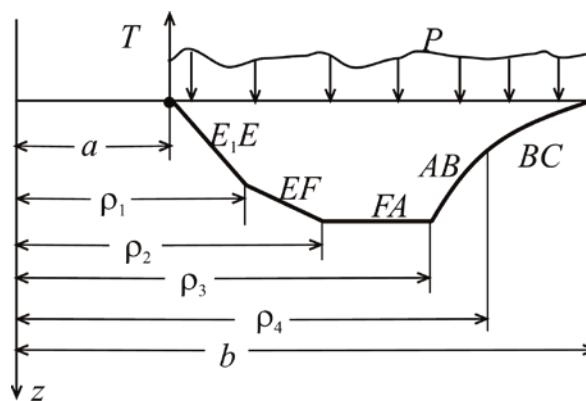


Рис.2.Сечение пластинки по радиусу.

Итак, на участке $a \leq r \leq \rho_1$ пластическим режимом будет режим E_1E , согласно которому $m_2 = -m_{20}^-$. Подставляя это в уравнение (1), после интегрирования получаем

$$r m_1 = (-m_{20}^- + Ta) r - \int_a^r T^{a\xi} d\xi + C,$$

где C – произвольная постоянная.

Определяя C из условия $m_1(a) = 0$, находим

$$r m_1 = (-m_{20}^- + Ta)(r - a) - \int_a^r T^{a\xi} d\xi, \quad m_2 = -m_{20}^- \tag{3}$$

Определяя $m_1(\rho_1)$ из (3) и подставляя в формулу $m_2 = \alpha m_1 + b_1$, в результате получим $-m_{20}^-$, что дает

$$m_{20}^- \left(\alpha - 1 - \alpha \frac{a}{\rho_1} \right) = b_1 + Ta \alpha \frac{\rho_1 - a}{\rho_1} - \frac{\alpha}{\rho_1} \int_a^{\rho_1} T^{a\xi} d\xi. \quad (4)$$

При $\rho_1 \leq r \leq \rho_2$ имеем состояние EF , при котором $m_2 = \alpha m_1 + b_1$; уравнение равновесия (1) примет вид

$$r m_1' + (1 - \alpha) m_1 = (Ta + b_1) - T^{ar}.$$

Решением этого уравнения является

$$m_1 = Cr^{\alpha-1} + (Ta + b_1) \frac{1}{1-\alpha} - r^{\alpha-1} \int_a^r \xi^{-\alpha} T^{a\xi} d\xi.$$

Определяя произвольную постоянную C из условия непрерывности $m_1(\rho_2) = m_{10}^+$, находим

$$m_1(r) = m_{10}^+ \left(\frac{r}{\rho_2} \right)^{\alpha-1} + (Ta + b_1) \frac{1}{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{r}{\rho_2} \right)^{\alpha-1} \right] + r^{\alpha-1} \int_r^{\rho_2} \xi^{-\alpha} T^{a\xi} d\xi. \quad (5)$$

Используя условия непрерывности $[m_1(\rho_1)] = 0$, получим

$$\begin{aligned} (-m_{20}^- + Ta)(\rho_1 - a) - \int_a^{\rho_1} T^{a\xi} d\xi = \\ = m_{10}^+ \frac{\rho_1^\alpha}{\rho_2^{\alpha-1}} + (Ta + b_1) \frac{\rho_1}{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\alpha-1} \right] + \rho_1^\alpha \int_{\rho_1}^{\rho_2} \xi^{-\alpha} T^{a\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (6)$$

Когда напряженное состояние пластинки соответствует стороне FA ($\rho_2 \leq r \leq \rho_3$), для скоростей деформации (2) имеем

$$\chi_1 = -w'' \geq 0, \quad \chi_2 = -\frac{1}{r} w' = 0.$$

Естественным решением этих уравнений будет $w = w_0 = \text{const } t$, т.е. кольцевая часть пластины $\rho_2 \leq r \leq \rho_3$ перемещается в этой области как абсолютно жесткое тело.

Окружности $r = \rho_2$ и $r = \rho_3$ являются шарнирными окружностями, на которых первая производная скорости прогиба претерпевает разрыв, скорость прогиба непрерывен, а радиальный изгибающий момент имеет максимальное значение.

При $\rho_3 \leq r \leq \rho_4$ имеем состояние AB , при котором $m_2 = m_{20}^+$. Из уравнения (1) получаем

$$r m_1 = (m_{20}^+ + Ta) r - \int_a^r T^{a\xi} d\xi + C.$$

Здесь произвольную постоянную C определяем из условия $m_1(\rho_3) = m_{10}^+$, тогда

$$r m_1 = (m_{20}^+ + Ta)(r - \rho_3) + m_{10}^+ \rho_3 - \int_{\rho_3}^r T^{a\xi} d\xi. \quad (7)$$

Определяя $m_1(\rho_4)$ из формулы (6) и подставляя в $m_2 = \alpha m_1 + b_2$, в результате можно получить m_{20}^+

$$m_{20}^+ \left(\alpha - 1 + \frac{\alpha \rho_3}{\rho_4} \right) = b_2 + Ta \alpha \frac{\rho_4 - \rho_3}{\rho_4} + \frac{\alpha \rho_3}{\rho_4} m_{10}^+ - \frac{\alpha}{\rho_4} \int_{\rho_3}^{\rho_4} T^{\alpha \xi} d\xi. \quad (8)$$

При $\rho_3 \leq r \leq \rho_4$ имеем состояние *BC*, при котором $m_2 = \alpha m_1 + b_2$, и из уравнения (1) получаем общее решение

$$m_1 = Cr^{\alpha-1} + (Ta + b_2) \frac{1}{1-\alpha} - r^{\alpha-1} \int_a^r \xi^{-\alpha} T^{\alpha \xi} d\xi.$$

Произвольную постоянную C определяем из условия $m_1(b) = -m_{10}^-$

$$C = -m_{10}^- b^{1-\alpha} - (Ta + b_2) \frac{1}{1-\alpha} b^{1-\alpha} + \int_a^b \xi^{-\alpha} T^{\alpha \xi} d\xi.$$

В результате

$$m_1(r) = -m_{10}^- \left(\frac{r}{b} \right)^{\alpha-1} + (Ta + b_2) \frac{1}{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{r}{b} \right)^{\alpha-1} \right] + r^{\alpha-1} \int_r^b \xi^{-\alpha} T^{\alpha \xi} d\xi. \quad (9)$$

Учитывая, что $\alpha m_1(\rho_4) + b_2 = m_{20}^+$, из формулы (9) при $r = \rho_4$ находим

$$\begin{aligned} -m_{10}^- \left(\frac{\rho_4}{b} \right)^{\alpha-1} + (Ta + b_2) \frac{1}{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{\rho_4}{b} \right)^{\alpha-1} \right] + \\ + \rho_4^{\alpha-1} \int_{\rho_4}^b \xi^{-\alpha} T^{\alpha \xi} d\xi = \frac{m_{20}^+ - b_2}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь исследуем возможность продолжения статического поля на область $\rho_2 \leq r \leq \rho_3$. Принимая, что тангенциальный момент m_2 и перерезывающая сила являются непрерывными функциями, из уравнения равновесия получаем, что производная dm_1/dr не может иметь скачков в области пластины, т.е.

$$\frac{dm_1}{dr} = 0 \quad \text{при } r = \rho_2 \text{ и } r = \rho_3, \quad (11)$$

так как $m_1 = m_{10}^+$ на этих радиусах. Но если допустить возможность скачкообразного изменения момента m_2 , то из уравнения равновесия (1) получаем

$$r \left[\frac{dm_1}{dr} \right] = [m_2], \quad (12)$$

где $\left[\frac{dm_1}{dr} \right] = \frac{dm_1^+}{dr} - \frac{dm_1^-}{dr}$, $[m_2] = m_2^+ - m_2^-$

означают скачки соответствующих величин в рассматриваемой точке.

Так как $[m_2]$ при $r = \rho_2$ и $r = \rho_3$ имеет положительные значения, а $[dm_1/dr]$ на этих радиусах может быть только отрицательным, то выполнение условия (12) невозможно. Из этого заключаем, что поле моментов m_2 должно быть непрерывно в области пластинки, т.е. $[m_2] = [dm_1/dr] = 0$.

Выполняя условие (11) с использованием производной формулы (5) при $r = \rho_2$ и производной формулы (7) при $r = \rho_3$, получим

$$Ta = T^{\alpha \rho_3} + m_{10}^+ - m_{20}^+, \quad (13)$$

$$m_{20}^+ - (\alpha m_{10}^+ + b_1) = T^{\rho_2 \rho_3}. \quad (14)$$

Формула (13) определяет неизвестную реакцию Ta , а (14) определяет предельную нагрузку.

Используя условие непрерывности $[m_1(\rho_1)] = 0$, получим

$$\begin{aligned} & (-m_{20}^- + Ta)(\rho_1 - a) - \int_a^{\rho_1} T^{\alpha\xi} d\xi = \\ & = m_{10}^+ \frac{\rho_1^\alpha}{\rho_2^{\alpha-1}} + (Ta + b_1) \frac{\rho_1}{1-\alpha} \left[1 - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^{\alpha-1} \right] + \rho_1^\alpha \int_{\rho_1}^{\rho_1} \xi^{-\alpha} T^{\alpha\xi} d\xi. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (4), (6), (8), (10), (11), (14) и (15) позволяют определить неизвестные радиусы $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$, силу реакции T и приведенную нагрузку. Отметим, что одно из этих уравнений является следствием шести остальных.

Статическое поле может быть продолжено на участок $\rho_1 \leq r \leq \rho_2$ разным способом без нарушения условий непрерывности. Если, например, принять, что оно соответствует стороне шестиугольника FA , то

$$m_1 = m_{10}^+, \quad m_2 = m_{10}^+ + T^{ar} - Ta.$$

Формулу (14) для предельной нагрузки в случае равномерно распределенной нагрузки $P(r) = np = const$, $T^{\rho_2\rho_3} = \frac{np}{2}(\rho_3^2 - \rho_2^2)$ можно записать в виде

$$\varphi = \frac{pb^2}{m_{02}^+} = \frac{2}{x_3^2 - x_2^2} \left(1 - \frac{\alpha m_{01}^+ + \beta_1}{m_{02}^+} \right) \quad (16)$$

где n коэффициент нагрузки и $x_i = \frac{\rho_i}{b}$, $i = 2, 3$. В случае $s_{0i} = q_0 = 0$ имеем

$$m_{0i}^0 = \frac{2k}{1+k}, \quad \alpha = 1, \quad a_1 = \frac{k}{1+k}, \quad a_2 = -\frac{k}{1+k}.$$

При этом получаем

$$\beta_1 = -\frac{2k}{1+k}, \quad \alpha m_{01}^+ + \beta_1 = 0$$

и формула (16) превращается в известную формулу для однородной изотропной пластинки [12]. Как видно, за счет армирующих волокон и покрытий предельная нагрузка пластины увеличивается на

$$1 - \frac{\alpha m_{10}^+ + \beta_1}{m_{20}^+}$$

число раз, поскольку выражение $\alpha m_{10}^+ + \beta_1$ отрицательно, будучи ординатой точки F шестиугольника текучести на плоскости $m_1 m_2$, $F(m_{01}^+, \alpha m_{01}^+ + \beta_1)$. В случае $\mu_1 = \mu_2 = 1$ нетрудно получить

$$\alpha m_{01}^+ + \beta_1 = - \left[2q_0 \frac{1+\gamma k}{1+k} + 4(d_2' + d_2'')s_{02} \right].$$

Видно, что предельная нагрузка увеличивается с увеличением выражения внутри квадратной скобки. При $\gamma = 1$, $d_2' = d_2'' = \frac{1}{2}$ это выражение имеет наибольшее значение $2q_0 + 4s_{02}$.

Результаты расчетов приведены на рис.3-5.

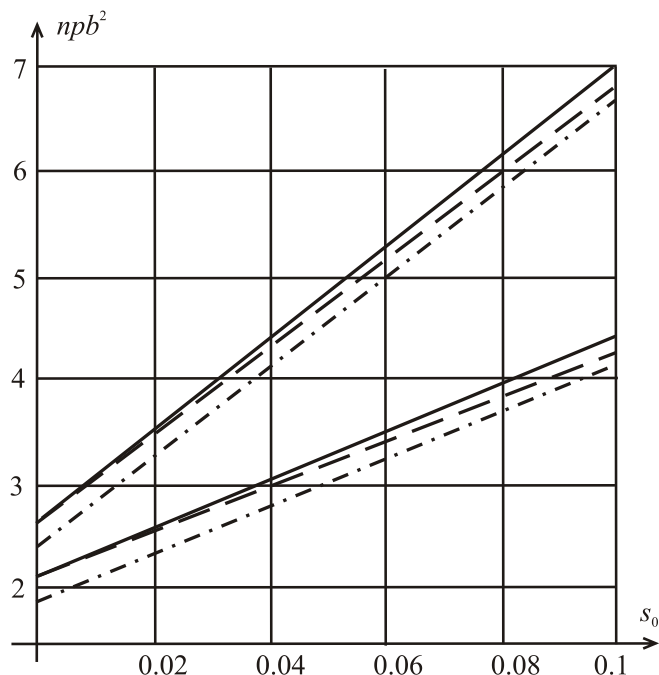


Рис.3. Зависимости предельной нагрузки от s_0 при указанных данных:
 — $k = 1, \mu = 1$, --- $k = 1, \mu = 0,8$, - · - · - $k = 0,8, \mu = 1$.

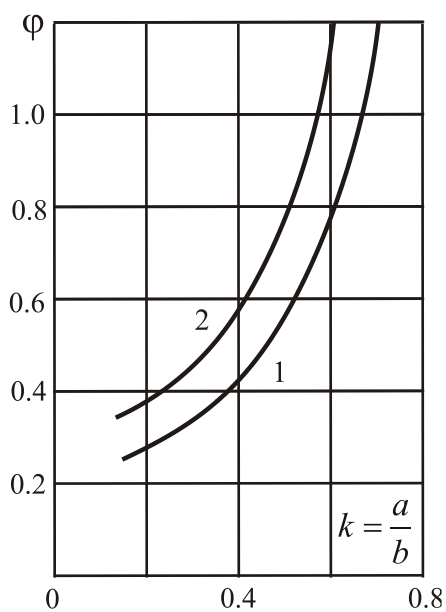


Рис.4. Зависимости предельной нагрузки от отношения $k = a / b$ для композитной (2) и обычной пластинок.

3. КИНЕМАТИЧЕСКИ ВОЗМОЖНЫЕ ПОЛЯ СКОРОСТЕЙ ПРОГИБОВ

Здесь мы будем определять кинематически возможное поле скоростей прогиба в тот момент, когда текучесть только наступила, перемещения еще малы и изменение геометрии пластины несущественно. Каждый элемент пластинки, перешедший в состоянии текучести, связан с жесткими элементами, поэтому соотношения между скоростями деформации отдельных элементов связаны друг с другом, и это приводит к тому, что скорости находятся с точностью до неопределенного множителя.

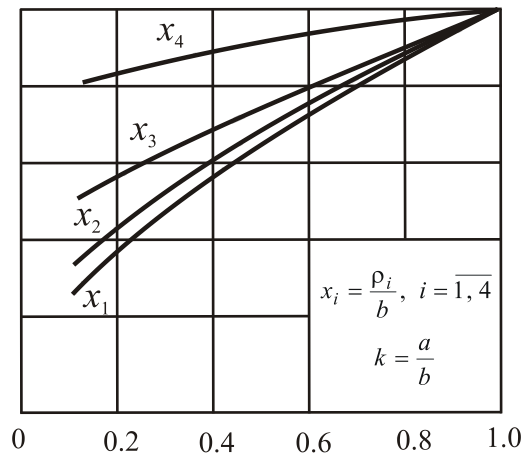


Рис.5. Зависимость радиусов $x_i = \frac{\rho_i}{b}$, $i = \overline{1, 4}$ от отношения $k = a / b$.

Используя ассоциированный закон пластического течения в главных направлениях, вектор пластического течения

$$\chi_i = \lambda \frac{\partial f}{\partial m_i} \quad (i = 1, 2)$$

где в данном случае уравнение поверхности текучести $f = const$ представляет рассмотренный выше шестиугольник пластического течения, и выражения (2) для скоростей изменения кривизны, мы получаем обыкновенные линейные дифференциальные уравнения первого порядка для скорости прогиба для пластических состояний, соответствующих различным сторонам шестиугольника.

Для пластического состояния E_1E скорость кривизны $\chi_1 = -w'' = 0$ должна обращаться в нуль, т.е. $w'' = 0$. Ассоциированный закон пластического течения показывает, что вектор скорости изменения кривизны параллелен нормали к поверхности пластического течения. Решением этого уравнения, удовлетворяющего краевому условию $w(a) = 0$ является

$$w = C(r - a), \quad a \leq r \leq \rho_1,$$

где C – произвольная постоянная.

Для пластического состояния EF имеем $m_2 = \alpha m_1 + b_1$, вектор нормали этой прямой $\{\alpha, -1\}$ должен быть параллельным вектору скоростей пластического течения $\{\chi_1, \chi_2\}$, т.е. $\chi_1 : \alpha = \chi_2 : (-1)$, или

$$w'' + \frac{\alpha}{r} w' = 0. \quad (17)$$

Для пластического состояния FA скорость кривизны $\chi_2 = -\frac{1}{r} w' = 0$, т.е.

$$w = w_0 = const \quad \text{при } \rho_2 \leq r \leq \rho_3.$$

Решением уравнения (17) удовлетворяющим условию непрерывности при $r = \rho_1$ и $r = \rho_2$ является

$$w(r) = C(\rho_1 - a) + [w_0 - C(\rho_1 - a)] \frac{r^{1-\alpha} - \rho_1^{1-\alpha}}{\rho_2^{1-\alpha} - \rho_1^{1-\alpha}}, \quad \rho_1 \leq r \leq \rho_2.$$

Здесь C и w_0 – неизвестные постоянные. Из условия непрерывности первой производной w' в точке $r = \rho_1$, определяем постоянную C

$$C = w_0 \frac{(1-\alpha)\rho_1^{-\alpha}}{\rho_2^{1-\alpha} - \rho_1^{1-\alpha} + \rho_1^{-\alpha}(\rho_1 - a)(1-\alpha)}.$$

Постоянная C положительна, как при $\alpha > 1$, так и при $\alpha < 1$, а при $\alpha = 1$ она имеет выражение

$$C = w_0 \frac{1}{\rho_1 - a + \rho_1 \ln \frac{\rho_2}{\rho_1}}.$$

Для пластического состояния AB скорость кривизны $\chi_1 = -w'' = 0$, и имеем решение

$$w(r) = w_0 + C_1(r - \rho_3), \quad \rho_3 \leq r \leq \rho_4, \quad (18)$$

удовлетворяющее условию непрерывности при $r = \rho_3$.

Наконец, для пластического состояния BC , используя уравнение $m_2 = \alpha m_1 + b_2$, вновь получаем уравнение (17). Решением, удовлетворяющим условию $w(b)=0$, является

$$w(r) = [w_0 + c_1(\rho_4 - \rho_3)] \left[1 - \frac{r^{1-\alpha} - \rho_4^{1-\alpha}}{b^{1-\alpha} - \rho_4^{1-\alpha}} \right], \quad \rho_4 \leq r \leq b. \quad (19)$$

В точке $r = \rho_4$ должна быть непрерывна и производная функция w' , т.е. $[w'(\rho_4)] = 0$, откуда определяем постоянную C_1

$$C_1 = \frac{w_0(1-\alpha)\rho_4^{1-\alpha}}{b^{1-\alpha} - \rho_4^{1-\alpha} + \rho_4^{-\alpha}(\rho_4 - \rho_3)(1-\alpha)}.$$

Тогда формулы (18) и (19) принимают вид

$$w = w_0 - \frac{w_0(1-\alpha)\rho_4^{-\alpha}(r - \rho_3)}{b^{1-\alpha} - \rho_4^{1-\alpha} + \rho_4^{-\alpha}(\rho_4 - \rho_3)(1-\alpha)}, \quad \rho_3 \leq r \leq \rho_4,$$

$$w = w_0 \frac{b^{1-\alpha} - r^{1-\alpha}}{b^{1-\alpha} - \rho_4^{1-\alpha} + \rho_4^{-\alpha}(\rho_4 - \rho_3)(1-\alpha)}, \quad \rho_4 \leq r \leq b.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Определена несущая способность кольцевой трехслойной пластинки, центральный слой которой армирован волокнами. Внешние слои считаются достаточно тонкими и изготовленными из однородного изотропного материала. Все составляющие пластинки обладают идеально пластическими свойствами с различными предельными усилиями на растяжения и сжатия. Предполагается, что пластинка закреплена по внешнему и свободно оперта по внутреннему контурам и находится под действием произвольной нагрузки P в верхней поверхности. Определены статически допустимые поля изгибающих моментов и кинематически допустимые поля скоростей прогибов. Выявлен характер зависимости коэффициента предельной нагрузки от свойств материалов составляющих пластинки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mroz Z., Shamiev F.G.* Simplified yield conditions for fibre-reinforced plates and shells // J. Arch. Inz. Lad. – 1979. – Vol.25. – N3. – P.463-476.

2. *Мовсумов Э.А., Шамиев Ф.Г.* Несущая способность пластинок из волокнистого композита // *Механика композитных материалов.* – 2005. – Т.41. – №2. – С.177-192.
3. *Kubishaev I.N.* Bearing capacity of a composite annular plate with different fixing conditions, situated under the action of uniformly distributed load // *J. Transactions of NAS of Azerbaijan.* –2009. – Vol.29. – N1. – P.187-216.
4. *Кубышев И.Н.* Несущая способность композитной кольцевой пластинки с разными условиями закрепления, находящейся под воздействием кольцевой нагрузки // *Аспирант и соискатель.* – 2010. – №2. – С.86-98.
5. *Налимов А.В.* Универсальная аппроксимация поверхностей текучести для жесткопластических цилиндрических оболочек // *Ползуновский вестник.* – 2006. – №2. – С.90-94.
6. *Немировский Ю.В., Пятаев С.Ф.* Поверхность текучести двоякопериодического волокнистого композиционного материала. // *Журнал Сибирского федерального университета. Сер.: Математика и физика.* – 2009. – Т.2. – №4. – С.469-482.
7. *Супрун А.Н., Вежлис Т.М.* Единая математическая модель эволюции поверхности текучести при полной и частичной разгрузке // *Проблемы прочности и пластичности.* – 2008. – Вып.70. – С.24-31.
8. *Лукьянов А.А., Пеньков В.Б.* Корректная модель несжимаемой анизотропной ассоциированной пластичности: Течение Хилла // *Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия.* – 2007. – №4 (54). – С.280-289.
9. *Bron F., Besson J.* A yield function for anisotropic materials application to aluminum alloys // *Int. J. Plasticity.* – 2004. – Vol.20. – Iss.4-5. – P.937-963.
10. *Джагангиров А.А.* Несущая способность армированной волокнами круглой трехслойной композитной пластинки заземленной по контуру // *Эко энергетика. Научно-технический журнал.* – Изд-во НАН Азербайджана. – 2012. – №4. – С.74-80.
11. *Джагангиров А.А.* Несущая способность армированной волокнами свободно опертой круглой трехслойной композитной пластинки. // *Научные труды - Фундаментальные науки ("Elmi əsərlər" (fundamental elmlər) jurnalı - азерб.).* – 2013. – Т.ХII (45). – №1. – С.50-54.
12. *Мруз З., Савчук А.* Несущая способность кольцевых пластин, закрепленных по обоим кромкам // *Механика и машиностроение.* – 1960. – №3. – С.72-78.
13. *Ильясов М.Х., Джагангиров А.А.* Гиперповерхности текучести трехслойной композитной оболочки, средний слой которой армирован волокнами // *Доклады НАН Азербайджана.* – 2013. – Т.LXIX. – №1. – С.28-36.
14. *Ильясов М.Х., Джагангиров А.А.* Критерии текучести трехслойной композитной оболочки, средний слой которой армирован волокнами // *Elmi Məstüərlər (азерб.).* – 2013. – Т.15. – №4. – С.34-43.

Поступила в редакцию 16 августа 2014 года.

Сведения об авторе:

Джагангиров Акиф Али оглы – к.т.н., доц., Кафедра "Автомобильные перевозки и организация дорожного движения", Азербайджанский Технический Университет, г. Баку, Азербайджан; e-mail: al-akif@mail.ru