

УДК 539.3

МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ (I)¹

Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Кержаев А.П.

ФГБУН Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

В 50-е годы прошлого века двумя выдающимися учеными-механиками Василием Захаровичем Власовым и Анатолием Исааковичем Лурье независимо был предложен метод сведения решений дифференциальных уравнений в частных производных к решению обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечного порядка, позже получивший название метод начальных функций (МНФ). В своем завершеном виде МНФ изложен в книге В.В. Власова [1]. МНФ очень удобен при решении различных краевых задач, поскольку большая часть промежуточных выкладок оказывается уже выполненной и включенной в операторы метода. МНФ широко применялся и применяется в инженерных расчетах (см., например, ссылки в [1]). Развитию и обобщению МНФ посвящены несколько оригинальных работ, в частности, уникальная работа Агарёва В.А. [2].

В этой статье МНФ, записанный в пространстве преобразований Фурье, применяется к решению краевой задачи для бесконечной полосы $\{ \Pi : |y| \leq h, |x| < \infty \}$. Окончательные формулы для напряжений и перемещений могут быть представлены, как в виде несобственных интегралов, обратных преобразований Фурье, так и по теореме о вычетах в виде рядов по функциям Фадля-Папковича. Последнее представление затем удобно использовать при решении краевых задач в полуполосе или в прямоугольнике, накладывая на решение в бесконечной полосе соответствующее решение для полуполосы (прямоугольника) с однородными граничными условиями на сторонах $y = \pm h$ [3,4].

Метод решения краевых задач теории упругости для бесконечной полосы Π с помощью интегрального преобразования Фурье хорошо известен [5]. Использование аппарата МНФ в пространстве преобразований Фурье позволяет, в отличие от [5], сделать схему решения краевой задачи формально не зависящей от вида граничных условий на продольных сторонах полосы (напряжения, перемещения или граничные условия смешанного типа, но без точек смены типа граничных условий). Операторы МНФ в пространстве преобразований Фурье представляют собой алгебраические выражения, которые удобно использовать в символьных преобразованиях MathCad. Поэтому в краевых задачах типа многослойных пластин с различными физико-механическими характеристиками, пластин с большими наборами продольных ребер жесткости и т.п. предлагаемый аппарат, опирающийся на символьную математику MathCad, чрезвычайно удобен, а иногда просто незаменим.

В статье на конкретных примерах подробно разобрана, зачастую весьма нетривиальная, техника выделения особенностей в подынтегральных выражениях, а также техника представления решений в виде рядов по функциям Фадля-Папковича.

Ключевые слова: бесконечная полоса; метод начальных функций; интегральное преобразование Фурье; функции Фадля-Папковича

¹ Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 13-08-00118-а, 15-38-50034 мол_нр).

THE METHOD OF INITIAL FUNCTIONS AND FOURIER INTEGRAL TRANSFORM IN THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE ELASTICITY THEORY FOR AN INFINITE STRIP (I)

Kovalenko M.D., Men'shova I.V., Kerzhaev A.P.

Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

SUMMARY

In the 50th years of the last century by two outstanding scientists-mechanics Vasily Zakharovich Vlasov and Anatoly Isaakovich Lurie independently proposed a method of reducing the solutions of differential equations to ordinary differential equations of infinite order, later called the method of initial functions. In its final form the method of initial functions is described in the book of V.V.Vlasov [1]. Method of initial functions is very convenient for solution various boundary value problems, since most of the intermediate computations is already done and included in the statements of the method. Method of initial functions are widely used and applied in engineering calculations (see e.g. reference [1]). Development and generalization of the method of initial functions devoted several original works, in particular, the unique work Agarev V.A. [2].

In this article, the method of initial functions recorded in the space of Fourier transforms applies to the solution of the boundary value problem for infinite strip $\{\Pi : |y| \leq h, |x| < \infty\}$. Final formulas for stresses and displacements can be represented as in the form of improper integrals – inverse Fourier transforms and by the residue theorem in the form of a series of functions of Fadde-Papkovich. The last representation is then convenient to use in solution boundary value problems in semi-strip or rectangle, overlaid on the solution in an infinite strip corresponding solution for the semi-strip (rectangle) with homogeneous boundary conditions on the sides $y = \pm h$ [3,4].

The method for solving boundary value problems of elasticity theory for an infinite strip with the help of the Fourier transforms is well known [5]. Using the method of initial functions in Fourier transforms space allows, in contrast to [5], to make the scheme boundary problem solution is formally independent of the type of boundary conditions on the longitudinal sides of the strip (stress, displacement, or the boundary conditions of mixed type, but without points of change of boundary conditions type) . Method of initial functions operators in the space of Fourier transforms are algebraic expressions that are easy to use symbolic transformations MathCad. Therefore, the boundary problem of multilayered plates with different physical and mechanical properties of plates, with large sets of longitudinal stiffeners, etc. the proposed unit, based on symbolic MathCad mathematics, extremely easy to use, and sometimes simply irreplaceable.

Key words: infinite strip; method of initial functions; Fourier integral transform; Fadde-Papkovich functions

1. МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрим плоскую задачу теории упругости в бесконечной полосе Π . Следуя [1], уравнения равновесия

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (0.1)$$

с помощью известных зависимостей между напряжениями и перемещениями для плоского напряженного состояния

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \nu \frac{\partial V}{\partial y} \right), \\ \sigma_y &= \frac{2}{1-\nu} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \nu \frac{\partial U}{\partial x} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \quad (0.2)$$

перепишем следующим образом

$$\begin{cases} \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = 0; \\ \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + \frac{2}{1-\nu} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, \end{cases} \quad (0.3)$$

где $U = Gu$, $V = Gv$, u и v – соответственно перемещения по x (продольное) и по y (поперечное), G – модуль упругости при сдвиге, ν – коэффициент Пуассона.

Введем функцию перемещений $F(x, y)$ по формулам

$$\begin{aligned} U &= -\frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \\ V &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}. \end{aligned} \quad (0.4)$$

Подставляя (1.4) в (1.3), тождественно удовлетворим первому уравнению системы (1.3), а из второго получим бигармоническое уравнение для функции $F(x, y)$

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0. \quad (0.5)$$

Зависимости для напряжений через функцию перемещений найдем согласно (1.2) и (1.4)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right), \\ \sigma_y &= \frac{\partial}{\partial y} \left((2+\nu) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right), \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (0.6)$$

Обозначим $\frac{\partial}{\partial x} = \alpha$, $\sigma_y(x, y) = Y(x, y)$, $\tau_{xy}(x, y) = X(x, y)$, как это принято в МНФ. Тогда бигармоническое уравнение (1.5) принимает вид

$$\frac{\partial^4 F}{\partial y^4} + 2\alpha^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \alpha^4 F = 0. \quad (0.7)$$

В соответствии с символическим представлением метода начальных функций [1] будем считать α некоторым параметром, а уравнение (1.7) будем рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка, решение которого ищется в виде $F = e^{\lambda y}$. Характеристическому уравнению

$$(\lambda^2 + \alpha^2)^2 = 0 \quad (0.8)$$

отвечает решение

$$F = C_1 \sin \alpha y + C_2 \cos \alpha y + C_3 y \sin \alpha y + C_4 y \cos \alpha y, \quad (0.9)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные функции переменной x . Подставив (1.9) в (1.4) и (1.6), найдем общие интегралы для напряжений и перемещений

$$U(x, y) = -\frac{1+\nu}{2} \alpha [C_1 \alpha \cos \alpha y - C_2 \alpha \sin \alpha y + C_3 (\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y) + C_4 (\cos \alpha y - \alpha y \sin \alpha y)];$$

$$V(x, y) = \alpha \left\{ C_1 \frac{1+\nu}{2} \alpha \sin \alpha y + C_2 \frac{1+\nu}{2} \alpha \cos \alpha y + C_3 \left[\frac{1+\nu}{2} \alpha y \sin \alpha y + (1-\nu) \cos \alpha y \right] + C_4 \left[\frac{1+\nu}{2} \alpha y \cos \alpha y - (1-\nu) \sin \alpha y \right] \right\};$$

$$\sigma_x(x, y) = \alpha^2 \{ -C_1 (1+\nu) \alpha \cos \alpha y + C_2 (1+\nu) \alpha \sin \alpha y - C_3 [(1+3\nu) \sin \alpha y + (1+\nu) \alpha y \cos \alpha y] - C_4 [(1+3\nu) \cos \alpha y - (1+\nu) \alpha y \sin \alpha y] \}; \quad (0.10)$$

$$Y(x, y) = \alpha^2 \{ C_1 (1+\nu) \alpha \cos \alpha y - C_2 (1+\nu) \alpha \sin \alpha y + C_3 [(1+\nu) \alpha y \cos \alpha y - (1-\nu) \sin \alpha y] - C_4 [(1+\nu) \alpha y \sin \alpha y + (1-\nu) \cos \alpha y] \};$$

$$X(x, y) = \alpha^2 \{ C_1 (1+\nu) \alpha \sin \alpha y + C_2 (1+\nu) \alpha \cos \alpha y + C_3 [(1+\nu) \alpha y \sin \alpha y - 2\nu \cos \alpha y] + C_4 [(1+\nu) \alpha y \cos \alpha y + 2\nu \sin \alpha y] \}.$$

Примем в формулах (1.10) $y = 0$ и обозначим

$$U(x, 0) = U_0(x), \quad V(x, 0) = V_0(x), \quad (0.11)$$

$$Y(x, 0) = Y_0(x), \quad X(x, 0) = X_0(x).$$

Определенные при $y = 0$ функции (1.11) называются начальными. Выразим C_1, \dots, C_4 через начальные функции

$$C_1 = \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{Y_0(x)}{2\alpha} - \frac{1-\nu}{1+\nu} U_0(x) \right), \quad C_2 = \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{\alpha^3} (2\nu \alpha V_0(x) + (1-\nu) X_0(x)), \quad (0.12)$$

$$C_3 = \frac{1}{\alpha} \left(V_0(x) - \frac{X_0(x)}{2\alpha} \right), \quad C_4 = -\frac{1}{\alpha} \left(U_0(x) + \frac{Y_0(x)}{2\alpha} \right).$$

Подставляя эти выражения в общее решение (1.10), приходим к зависимостям метода начальных функций

$$\begin{cases} U(x, y) = L_{UU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{UV}(\alpha, y)V_0(x) + L_{UY}(\alpha, y)Y_0(x) + L_{UX}(\alpha, y)X_0(x), \\ V(x, y) = L_{VU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{VV}(\alpha, y)V_0(x) + L_{VY}(\alpha, y)Y_0(x) + L_{VX}(\alpha, y)X_0(x), \\ \sigma_x(x, y) = A_U(\alpha, y)U_0(x) + A_V(\alpha, y)V_0(x) + A_Y(\alpha, y)Y_0(x) + A_X(\alpha, y)X_0(x), \\ Y(x, y) = L_{YU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{YV}(\alpha, y)V_0(x) + L_{YY}(\alpha, y)Y_0(x) + L_{YX}(\alpha, y)X_0(x), \\ X(x, y) = L_{XU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{XV}(\alpha, y)V_0(x) + L_{XY}(\alpha, y)Y_0(x) + L_{XX}(\alpha, y)X_0(x). \end{cases} \quad (0.13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} L_{UU}(\alpha, y) &= L_{XX}(\alpha, y) = \cos \alpha y - \frac{1+\nu}{2} \alpha y \sin \alpha y, \\ L_{UV}(\alpha, y) &= L_{YX}(\alpha, y) = -\frac{1}{2} [(1-\nu) \sin \alpha y + (1+\nu) \alpha y \cos \alpha y], \\ L_{UY}(\alpha, y) &= L_{VX}(\alpha, y) = -\frac{1+\nu}{4} y \sin \alpha y, \\ L_{UX}(\alpha, y) &= \frac{1}{4} \left[\frac{3-\nu}{\alpha} \sin \alpha y + (1+\nu) y \cos \alpha y \right], \\ L_{VU}(\alpha, y) &= L_{XY}(\alpha, y) = \frac{1}{2} [(1-\nu) \sin \alpha y - (1+\nu) \alpha y \cos \alpha y], \\ L_{VV}(\alpha, y) &= L_{YY}(\alpha, y) = \frac{1}{2} (1+\nu) \alpha y \sin \alpha y + \cos \alpha y, \\ L_{VY}(\alpha, y) &= \frac{1}{4} \left[\frac{3-\nu}{\alpha} \sin \alpha y - (1+\nu) y \cos \alpha y \right], \\ L_{YU}(\alpha, y) &= L_{XU}(\alpha, y) = (1+\nu) \alpha^2 y \sin \alpha y, \\ L_{YV}(\alpha, y) &= (1+\nu) \alpha (\alpha y \cos \alpha y - \sin \alpha y), \\ L_{XU}(\alpha, y) &= -(1+\nu) \alpha (\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y), \\ A_U(\alpha, y) &= (1+\nu) \alpha (2 \cos \alpha y - \alpha y \sin \alpha y), \\ A_V(\alpha, y) &= -(1+\nu) \alpha (\sin \alpha y + \alpha y \cos \alpha y), \\ A_Y(\alpha, y) &= \nu \cos \alpha y - \frac{1}{2} (1+\nu) \alpha y \sin \alpha y, \\ A_X(\alpha, y) &= \frac{1}{2} [(1+\nu) \alpha y \cos \alpha y + (3+\nu) \sin \alpha y] \end{aligned} \quad (0.14)$$

- дифференциальные операторы бесконечного порядка над начальными функциями. Согласно формулам (1.13), если известны перемещения и напряжения в начальном сечении $y=0$, то их можно найти в каждом сечении полосы $y = const$. В качестве начального можно выбрать любое сечение. Например, если деформация полосы является симметричной или обратно-симметричной относительно оси x , то начальные функции удобно взять на оси симметрии полосы, т.к. в этом случае две из четырех начальных функций будут равны нулю: $V_0 = X_0 = 0$ для симметричной деформации и $U_0 = Y_0 = 0$ - для обратно симметричной. Две другие начальные функции должны быть найдены из граничных условий при $y=h$. Если симметрии нет, то начальные функции, т.е. начало отсчета координаты y можно выбрать на верхней или на нижней сторонах полосы. Пусть, например, начальной является нижняя сторона полосы, т.е. $0 \leq y \leq 2h$. Будем считать, что здесь приложены нормальная $p(x)$

и касательная $q(x)$ нагрузки, а верхняя сторона полосы свободна. По условию задачи начальные функции $Y_0(x) = p(x)$, а $X_0(x) = q(x)$, две другие начальные функции неизвестны. Удовлетворяя граничным условиям при $y = 2h$, получим систему из двух дифференциальных уравнений бесконечного порядка относительно начальных функций $U_0(x), V_0(x)$

$$\begin{cases} L_{YY}(\alpha, 2h)p(x) + L_{YX}(\alpha, 2h)q(x) + L_{YU}(\alpha, 2h)U_0(x) + L_{YV}(\alpha, 2h)V_0(x) = 0; \\ L_{XY}(\alpha, 2h)p(x) + L_{XX}(\alpha, 2h)q(x) + L_{XU}(\alpha, 2h)U_0(x) + L_{XV}(\alpha, 2h)V_0(x) = 0. \end{cases} \quad (0.15)$$

Перепишем ее следующим образом

$$\begin{cases} L_{YU}(\alpha, 2h)U_0(x) + L_{YV}(\alpha, 2h)V_0(x) = -L_{YY}(\alpha, 2h)p(x) - L_{YX}(\alpha, 2h)q(x); \\ L_{XU}(\alpha, 2h)U_0(x) + L_{XV}(\alpha, 2h)V_0(x) = -L_{XY}(\alpha, 2h)p(x) - L_{XX}(\alpha, 2h)q(x). \end{cases} \quad (0.16)$$

Решение системы (1.16), как обычно, складывается из общего решения однородной системы уравнений и ее частного решения. Правые части системы неоднородных уравнений (1.16) для некоторых частных типов нагрузок легко находятся. Пусть, например,

$$p(x) = x^2 + 1, \quad q(x) = \sin(\pi x) \quad (0.17)$$

Раскладывая дифференциальные операторы, стоящие справа в формулах (1.16), в степенные ряды по степеням α и осуществляя дифференцирование, получим

$$\begin{aligned} -L_{YY}(\alpha, 2h)p(x) &= -(1 + \frac{\nu}{2}(2h)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1+2\nu}{24}(2h)^4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \dots)(x^2 + 1) = \\ &= -(x^2 + 1 + 4\nu h^2), \end{aligned} \quad (0.18)$$

$$\begin{aligned} -L_{YX}(\alpha, 2h)q(x) &= -(-2h \frac{\partial}{\partial x} + \frac{2+\nu}{6}(2h)^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} \dots)\sin(\pi x) = \\ &= (2h\pi + \frac{2+\nu}{6}(2h\pi)^3 + \dots)\cos(\pi x) = \\ &= -\frac{1}{2}[(1-\nu)\operatorname{sh}(2\pi h) + (1+\nu)2\pi h \operatorname{ch}(2\pi h)]\cos(\pi x) \end{aligned} \quad (0.19)$$

и т.д. Способ определения частных решений уравнений системы (1.16) для такого типа нагрузок мало отличается от обычного, используемого для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами конечной степени [6]. В общем случае для того, чтобы найти частное решение системы уравнений (1.16), надо воспользоваться интегральным преобразованием Фурье. Рассмотрим, как это делается, предварительно разбив задачу на симметричную и обратно-симметричную.

2. СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПОЛОСЫ

Рассмотрим симметричную относительно горизонтальной оси x деформацию бесконечной полосы П. Пусть на ее сторонах $y = \pm h$ заданы нормальные $\sigma_y(x, \pm h) = p(x)$ и касательные $\tau_{xy}(x, \pm h) = q(x)$ напряжения. Напряженно-деформированное состояние бесконечной полосы, согласно (1.13), полностью определяется четырьмя начальными функциями, которые нужно найти из граничных условий, заданных на продольных сторонах полосы

$$\sigma_y(x, \pm h) = p(x), \tau_{xy}(x, \pm h) = q(x). \quad (0.20)$$

По симметрии задачи начальные функции V_0 и X_0 обращаются в нуль. Тогда, удовлетворяя с помощью (1.13) условиям (2.1), получим систему из двух дифференциальных уравнений бесконечного порядка относительно искомых функций $Y_0(x)$ и $U_0(x)$

$$\begin{cases} Y(x, h) = L_{YY}(\alpha, h)Y_0(x) + L_{YU}(\alpha, h)U_0(x) = p(x); \\ X(x, h) = L_{XY}(\alpha, h)Y_0(x) + L_{XU}(\alpha, h)U_0(x) = q(x). \end{cases} \quad (0.21)$$

а) Будем считать, что на продольных сторонах полосы действуют только нормальные напряжения, а касательные равны нулю, т.е.

$$\begin{cases} L_{YY}(\alpha, h)Y_0(x) + L_{YU}(\alpha, h)U_0(x) = p(x); \\ L_{XY}(\alpha, h)Y_0(x) + L_{XU}(\alpha, h)U_0(x) = 0. \end{cases} \quad (0.22)$$

Обозначим

$$\tilde{f}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\lambda x} dx \quad (0.23)$$

– преобразование Фурье с параметром λ некоторой функции $f(x)$ и воспользуемся далее известным свойством преобразования Фурье ($n = 1, 2, \dots$) [7]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n f(x)}{dx^n} e^{i\lambda x} dx = (-i\lambda)^n \tilde{f}(\lambda). \quad (0.24)$$

Применим преобразование Фурье к обеим частям равенств (2.3), умножив их на $e^{i\lambda x}$ и проинтегрировав от $-\infty$ до $+\infty$. Имея в виду (2.5), получим

$$\begin{cases} L_{YY}(-i\lambda, h)\tilde{Y}_0(\lambda) + L_{YU}(-i\lambda, h)\tilde{U}_0(\lambda) = \tilde{p}(\lambda); \\ L_{XY}(-i\lambda, h)\tilde{Y}_0(\lambda) + L_{XU}(-i\lambda, h)\tilde{U}_0(\lambda) = 0, \end{cases} \quad (0.25)$$

где $\tilde{p}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{i\lambda x} dx$.

$$(0.26)$$

Пользуясь формулой Эйлера ($\exp(i\lambda x) = \cos \lambda x + i \sin \lambda x$), введем еще такие обозначения для преобразований Фурье четной и нечетной функций $p(x)$ соответственно

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \cos \lambda x dx = \tilde{p}^c(\lambda), \quad i \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \sin \lambda x dx = i\tilde{p}^s(\lambda). \quad (0.27)$$

Разрешим систему (2.6) относительно $\tilde{Y}_0(\lambda)$ и $\tilde{U}_0(\lambda)$

$$\widetilde{Y}_0(\lambda) = -\frac{L_{XU}(-i\lambda, h)\tilde{p}(\lambda)}{L(-i\lambda)}, \quad \widetilde{U}_0(\lambda) = \frac{L_{XY}(-i\lambda, h)\tilde{p}(\lambda)}{L(-i\lambda)},$$

(0.28)

где
$$L(-i\lambda) = L_{XY}(-i\lambda, h)L_{YU}(-i\lambda, h) - L_{YY}(-i\lambda, h)L_{XU}(-i\lambda, h) = (1 + \nu)\lambda[\lambda h + \text{sh } \lambda h \text{ ch } \lambda h].$$
 (0.29)

Запишем соотношения метода начальных функций (1.13) в пространстве преобразований Фурье, имея в виду, что начальные функции $V_0(x)$ и $X_0(x)$ равны нулю на оси симметрии

$$\begin{aligned} \widetilde{U}(\lambda, y) &= L_{UU}(-i\lambda, y)\widetilde{U}_0(\lambda) + L_{UY}(-i\lambda, y)\widetilde{Y}_0(\lambda), \\ \widetilde{V}(\lambda, y) &= L_{VU}(-i\lambda, y)\widetilde{U}_0(\lambda) + L_{VY}(-i\lambda, y)\widetilde{Y}_0(\lambda), \\ \widetilde{\sigma}_x(\lambda, y) &= A_U(-i\lambda, y)\widetilde{U}_0(\lambda) + A_Y(-i\lambda, y)\widetilde{Y}_0(\lambda), \\ \widetilde{Y}(\lambda, y) &= L_{YU}(-i\lambda, y)\widetilde{U}_0(\lambda) + L_{YY}(-i\lambda, y)\widetilde{Y}_0(\lambda), \\ \widetilde{X}(\lambda, y) &= L_{XU}(-i\lambda, y)\widetilde{U}_0(\lambda) + L_{XY}(-i\lambda, y)\widetilde{Y}_0(\lambda), \end{aligned} \quad (0.30)$$

и подставим выражения (2.9) в формулы (2.11), обозначив

$$\begin{aligned} \widetilde{U}^p(\lambda, y) &= \frac{L_{UU}(-i\lambda, y)L_{XY}(-i\lambda, h) - L_{UY}(-i\lambda, y)L_{XU}(-i\lambda, h)}{L(-i\lambda)}\tilde{p}(\lambda), \\ \widetilde{V}^p(\lambda, y) &= \frac{L_{VU}(-i\lambda, y)L_{XY}(-i\lambda, h) - L_{VY}(-i\lambda, y)L_{XU}(-i\lambda, h)}{L(-i\lambda)}\tilde{p}(\lambda), \\ \widetilde{\sigma}_x^p(\lambda, y) &= \frac{A_U(-i\lambda, y)L_{XY}(-i\lambda, h) - A_Y(-i\lambda, y)L_{XU}(-i\lambda, h)}{L(-i\lambda)}\tilde{p}(\lambda), \\ \widetilde{Y}^p(\lambda, y) &= \frac{L_{YU}(-i\lambda, y)L_{XY}(-i\lambda, h) - L_{YY}(-i\lambda, y)L_{XU}(-i\lambda, h)}{L(-i\lambda)}\tilde{p}(\lambda), \\ \widetilde{X}^p(\lambda, y) &= \frac{L_{XU}(-i\lambda, y)L_{XY}(-i\lambda, h) - L_{XY}(-i\lambda, y)L_{XU}(-i\lambda, h)}{L(-i\lambda)}\tilde{p}(\lambda). \end{aligned} \quad (0.31)$$

Выражения (2.12) дают полное решение задачи в пространстве преобразований Фурье. Применяя к ним обратное преобразование Фурье по формуле [7]

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad (0.32)$$

найдем искомые выражения для напряжений и перемещений

$$\begin{aligned} U^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_{UU}(-i\lambda, y)L_{XY}(-i\lambda, h) - L_{UY}(-i\lambda, y)L_{XU}(-i\lambda, h)}{L(-i\lambda)} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ V^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_{VU}(-i\lambda, y)L_{XY}(-i\lambda, h) - L_{VY}(-i\lambda, y)L_{XU}(-i\lambda, h)}{L(-i\lambda)} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_x^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_U(-i\lambda, y)L_{XY}(-i\lambda, h) - A_Y(-i\lambda, y)L_{XU}(-i\lambda, h)}{L(-i\lambda)} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ Y^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_{YU}(-i\lambda, y)L_{XY}(-i\lambda, h) - L_{YY}(-i\lambda, y)L_{XU}(-i\lambda, h)}{L(-i\lambda)} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \end{aligned} \quad (0.33)$$

$$X^p(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_{XU}(-i\lambda, y)L_{XY}(-i\lambda, h) - L_{XY}(-i\lambda, y)L_{XU}(-i\lambda, h)}{L(-i\lambda)} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda.$$

Раскроем подынтегральные выражения в формулах (2.14) и перейдем к обычным обозначениям для напряжений

$$\begin{aligned} U^p(x, y) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{1-\nu}{2} \operatorname{sh} \lambda h - \frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h\right) \operatorname{ch} \lambda y + \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ V^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \operatorname{sh} \lambda h\right) \operatorname{sh} \lambda y - \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_x^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda[(\operatorname{sh} \lambda h - \lambda h \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \quad (0.34) \\ \sigma_y^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda[(\lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y - \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy}^p(x, y) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda^2(h \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y - y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y)}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{aligned}$$

Приведем интегралы (2.15) к виду, удобному для вычислений. Если $p(x)$ и, следовательно, $\tilde{p}(\lambda) = \tilde{p}^c(\lambda)$ – четные функции, то представляя экспоненту по формуле Эйлера, от суммы $(\cos \lambda x + i \sin \lambda x)$ оставляем только то слагаемое, которое, с учетом четности по λ выражения, представленного под интегралом в виде дроби, соответствует в итоге четной подынтегральной функции

$$\begin{aligned} U^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1-\nu}{2} \operatorname{sh} \lambda h - \frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h\right) \operatorname{ch} \lambda y + \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{p}^c(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \\ V^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \operatorname{sh} \lambda h\right) \operatorname{sh} \lambda y - \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{p}^c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \\ \sigma_x^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda[(\operatorname{sh} \lambda h - \lambda h \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{p}^c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \quad (0.35) \\ \sigma_y^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda[(\lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y - \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{p}^c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \\ \tau_{xy}^p(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda^2(h \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y - y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y)}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{p}^c(\lambda) \sin \lambda x d\lambda. \end{aligned}$$

В том случае, когда $p(x)$ – нечетная функция, то с учетом (2.8) будем иметь (подынтегральная функция остается четной по λ)

$$U^p(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1-\nu}{2} \operatorname{sh} \lambda h - \frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h\right) \operatorname{ch} \lambda y + \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{p}^s(\lambda) \cos \lambda x d\lambda,$$

$$\begin{aligned}
V^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \right) \operatorname{sh} \lambda y - \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{p}^s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \\
\sigma_x^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu) \lambda [(\operatorname{sh} \lambda h - \lambda h \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y]}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{p}^s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad (0.36) \\
\sigma_y^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu) \lambda [(\lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y - \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y]}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{p}^s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \\
\tau_{xy}^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu) \lambda^2 (h \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y - y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y)}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{p}^s(\lambda) \cos \lambda x d\lambda.
\end{aligned}$$

Полученные решения можно представить также в виде рядов, воспользовавшись для этого теоремой о вычетах. Покажем, как это делается. Заменим переменную интегрирования по формуле $-i\lambda = \gamma$ и перейдем, тем самым, в интегралах (2.15) к интегрированию по мнимой оси

$$\begin{aligned}
U^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\xi^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma, \quad V^p(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\chi^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma, \\
\sigma_x^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_x^p(\lambda, y)}{L(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma, \quad \sigma_y^p(x, y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_y^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma, \quad (0.37) \\
\tau_{xy}^p(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{t_{xy}^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\xi^p(\gamma, y) &= L_{UU}(\gamma, y) L_{XY}(\gamma, h) - L_{UY}(\gamma, y) L_{XU}(\gamma, h), \\
\chi^p(\gamma, y) &= L_{VU}(\gamma, y) L_{XY}(\gamma, h) - L_{VY}(\gamma, y) L_{XU}(\gamma, h), \\
s_x^p(\gamma, y) &= A_U(\gamma, y) L_{XY}(\gamma, h) - A_Y(\gamma, y) L_{XU}(\gamma, h), \quad (0.38) \\
s_y^p(\gamma, y) &= L_{YU}(\gamma, y) L_{XY}(\gamma, h) - L_{YY}(\gamma, y) L_{XU}(\gamma, h), \\
t_{xy}^p(\gamma, y) &= L_{XU}(\gamma, y) L_{XY}(\gamma, h) - L_{XY}(\gamma, y) L_{XU}(\gamma, h).
\end{aligned}$$

Формулы для $L_{UY}(\gamma, y)$, $L_{XU}(\gamma, h)$ и т.д. формально совпадают с формулами для операторов МНФ (1.14), если в них $\alpha = \partial / \partial x$ заменить на γ . Окончательные выражения для функций (2.19) имеют вид

$$\begin{aligned}
\xi^p(\gamma, y) &= \left(\frac{1-\nu}{2} \sin \gamma h - \frac{1+\nu}{2} \gamma h \cos \gamma h \right) \cos \gamma y - \frac{1+\nu}{2} \gamma y \sin \gamma h \sin \gamma y, \\
\chi^p(\gamma, y) &= \left(\frac{1+\nu}{2} \gamma h \cos \gamma h + \sin \gamma h \right) \sin \gamma y - \frac{1+\nu}{2} \gamma y \sin \gamma h \cos \gamma y, \\
s_x^p(\gamma, y) &= (1+\nu) \gamma [(\sin \gamma h - \gamma h \cos \gamma h) \cos \gamma y - \gamma y \sin \gamma h \sin \gamma y], \quad (0.39) \\
s_y^p(\gamma, y) &= (1+\nu) \gamma [(\sin \gamma h + \gamma h \cos \gamma h) \cos \gamma y + \gamma y \sin \gamma h \sin \gamma y], \\
t_{xy}^p(\gamma, y) &= (1+\nu) \gamma^2 (h \cos \gamma h \sin \gamma y - y \sin \gamma h \cos \gamma y),
\end{aligned}$$

а функция

$$L(\gamma) = L_{XY}(\gamma, h) L_{YU}(\gamma, h) - L_{YY}(\gamma, h) L_{XU}(\gamma, h) = (1+\nu) \gamma (\gamma h + \sin \gamma h \cos \gamma h). \quad (0.40)$$

В интегралах (2.18) замкнем контур интегрирования влево по окружности достаточно большого радиуса и устремим радиус этой окружности

к бесконечности так, как это обычно делается [8]. Тогда по теореме о вычетах получим

$$\begin{aligned}
 U^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\xi^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\xi^p(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} \tilde{p}(\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right], \\
 V^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\chi^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\chi^p(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} \tilde{p}(\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right], \\
 \sigma_x^p(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_x^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma = -\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{s_x^p(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} \tilde{p}(\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right], \\
 \sigma_y^p(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_y^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma = -\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{s_y^p(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} \tilde{p}(\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right], \\
 \tau_{xy}^p(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{t_{xy}^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma = -\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{t_{xy}^p(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} \tilde{p}(\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right],
 \end{aligned} \tag{0.41}$$

Функции $\xi^p(\lambda_k, y)$, $\chi^p(\lambda_k, y)$, $s_x^p(\lambda_k, y)$, $s_y^p(\lambda_k, y)$, $t_{xy}^p(\lambda_k, y)$ называются функциями Фадля-Папковича. Они получаются, если в соответствующих формулах (2.20) заменить γ на числа λ_k – комплексные корни уравнения $L(\gamma) = 0$; $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$, а через $L'(\lambda_k) = 2(1 + \nu)\lambda_k h \cos^2 \lambda_k h$ обозначена производная функции $L(\gamma)$ в точке $\gamma = \lambda_k$.

Ряды в формулах (2.22) не полные. К ним нужно добавить вычеты при $\gamma = 0$, а также вычеты в полюсах функции $\tilde{p}(\gamma)$. Функция $\tilde{p}(\gamma)$ может иметь полюса лишь в том случае, когда функция $p(x)$ не финитна. В противном случае $\tilde{p}(\gamma)$ – целая функция экспоненциального типа, в силу теоремы Пэли-Винера [9], и, следовательно, не имеет полюсов.

Рассмотрим два простых примера вычисления интегралов (2.18) – вначале для четной, а затем для нечетной функций $p(x)$.

Пример 1. Пусть внешняя нормальная нагрузка представлена сосредоточенными силами интенсивности P , приложенными в точках с координатами $(0, \pm h)$. Тогда можно записать

$$p(x) = P\delta(x), \tag{0.42}$$

где через $\delta(x)$ обозначена дельта-функция. По первой формуле (2.8) найдем

$$\tilde{p}(\lambda) = \tilde{p}^c(\lambda) = P \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \cos \lambda x dx = P. \tag{0.43}$$

Следовательно,

$$\tilde{p}(\gamma) = P. \tag{0.44}$$

Подставим (2.25) в (2.18), замкнем контур интегрирования влево по окружности достаточно большого радиуса и устремим радиус этой окружности к бесконечности. По теореме о вычетах [8] получим

$$U^p(x, y) = \frac{P}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\xi^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} e^{\gamma x} d\gamma = \frac{-\nu P}{4(1 + \nu)} + P \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\xi^p(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} e^{\lambda_k x} \right],$$

$$\begin{aligned}
V^p(x, y) &= \frac{P}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\chi^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} e^{\gamma x} d\gamma = P \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\chi^p(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} e^{\lambda_k x} \right], \\
\sigma_x^p(x, y) &= \frac{P}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_x^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} e^{\gamma x} d\gamma = P \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{s_x^p(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} e^{\lambda_k x} \right], \\
\sigma_y^p(x, y) &= \frac{P}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_y^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} e^{\gamma x} d\gamma = P \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{s_y^p(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} e^{\lambda_k x} \right], \\
\tau_{xy}^p(x, y) &= \frac{P}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{t_{xy}^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} e^{\gamma x} d\gamma = P \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{t_{xy}^p(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} e^{\lambda_k x} \right].
\end{aligned} \tag{0.45}$$

Слагаемое, стоящее вне суммы в формуле для $U(x, y)$, соответствует особенности подынтегральной функции первого порядка. При интегрировании это особенность обходится справа по окружности C_r малого радиуса. Асимптотическое представление при $\gamma \rightarrow 0$ для дроби, стоящей под знаком интеграла имеет вид

$$\frac{\xi^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} \approx -\frac{\nu}{2(1+\nu)h}.$$

Полагая в подынтегральном выражении $\gamma = re^{i\varphi}$ и устремляя r к нулю, получим

$$\frac{P}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{\xi^p(\gamma, y)}{L(\gamma)} e^{\gamma x} d\gamma = \frac{P}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{-\nu}{2(1+\nu)} d\varphi = \frac{-\nu P}{4(1+\nu)}.$$

Подставив (2.24) в (2.16), получим представление решения, в виде несобственных интегралов

$$\begin{aligned}
U^p(x, y) &= \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1-\nu}{2} \operatorname{sh} \lambda h - \frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h \right) \operatorname{ch} \lambda y + \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \sin \lambda x d\lambda, \\
V^p(x, y) &= \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \right) \operatorname{sh} \lambda y - \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \cos \lambda x d\lambda, \\
\sigma_x^p(x, y) &= \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda[(\operatorname{sh} \lambda h - \lambda h \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \cos \lambda x d\lambda, \\
\sigma_y^p(x, y) &= \frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda[(\lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y - \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \cos \lambda x d\lambda, \\
\tau_{xy}^p(x, y) &= -\frac{P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda^2 (h \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y - y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y)}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \sin \lambda x d\lambda.
\end{aligned} \tag{0.46}$$

На рис.1, в качестве иллюстрации, приведены графики распределения нормальных напряжений $\sigma_y^p(x, y)$, посчитанных по формуле (2.26) (на графике – это точечная кривая $sy(x, y)$) и по формуле (2.27) (сплошная кривая $syI(x, y)$). Считалось, что $P=1$, $h=1$, $\nu=1/3$, $y=0$.

Пример 2. Пусть теперь $p(x)$ – нечетная функция

$$p(x) = M \delta'(x), \tag{0.47}$$

т.е. внешняя нормальная нагрузка представлена двумя сосредоточенными моментами интенсивности M , приложенными к верхней и нижней сторонам полосы в точках $(0, \pm h)$ и действующими один по часовой, а другой – против часовой стрелки. В этом случае [10]

$$\tilde{p}(\lambda) = \tilde{p}^s(\lambda) = M \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) \sin \lambda x dx = -M \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \cos \lambda x dx = -M \lambda. \tag{0.48}$$

Учитывая, что $\gamma = -i\lambda$, по формуле (2.7) найдем

$$\tilde{p}(\gamma) = M \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(x) e^{-\gamma x} dx = M \gamma \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-\gamma x} dx = M \gamma. \tag{0.49}$$

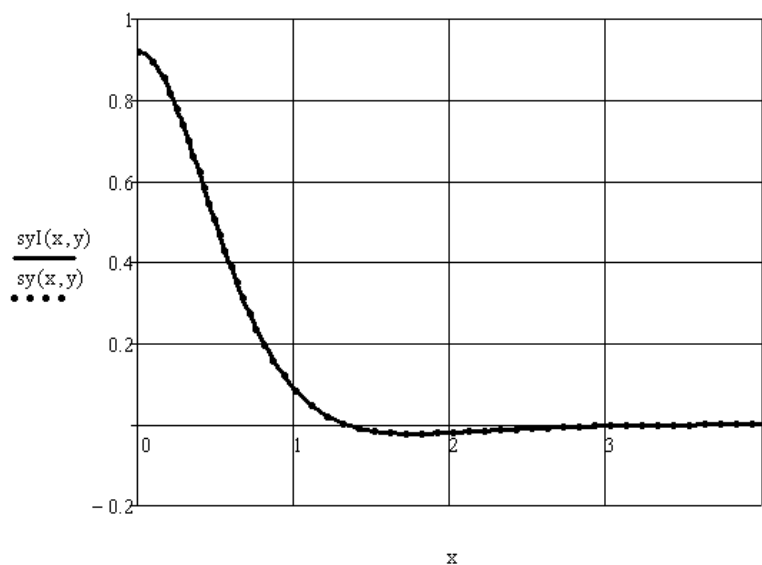


Рис.1.

Подставляя (2.30) в формулы (2.18), получим представление решения в виде рядов по функциям Фадля-Папковича

$$\begin{aligned}
 U^p(x, y) &= M \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\xi^p(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} \lambda_k e^{\lambda_k x} \right], & V^p(x, y) &= M \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\chi^p(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} \lambda_k e^{\lambda_k x} \right], \\
 \sigma_x^p(x, y) &= M \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{s_x^p(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} \lambda_k e^{\lambda_k x} \right], & \sigma_y^p(x, y) &= M \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{s_y^p(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} \lambda_k e^{\lambda_k x} \right], \\
 \tau_{xy}^p(x, y) &= M \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{t_{xy}^p(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} \lambda_k e^{\lambda_k x} \right].
 \end{aligned} \tag{0.50}$$

Представление в виде несобственных интегралов получим, подставив выражение (2.29) в формулы (2.17)

$$\begin{aligned}
U^p(x, y) &= \frac{M}{\pi} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1-\nu}{2} \operatorname{sh} \lambda h - \frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h \right) \operatorname{ch} \lambda y + \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \lambda \cos \lambda x d\lambda, \\
V^p(x, y) &= -\frac{M}{\pi} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \right) \operatorname{sh} \lambda y - \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \lambda \sin \lambda x d\lambda, \\
\sigma_x^p(x, y) &= -\frac{M}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+\nu) \lambda [(\operatorname{sh} \lambda h - \lambda h \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y]}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \lambda \sin \lambda x d\lambda, \quad (0.51) \\
\sigma_y^p(x, y) &= -\frac{M}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+\nu) \lambda [(\lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y - \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y]}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \lambda \sin \lambda x d\lambda, \\
\tau_{xy}^p(x, y) &= -\frac{M}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+\nu) \lambda^2 (h \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y - y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y)}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \lambda \cos \lambda x d\lambda.
\end{aligned}$$

На рис.2 приведены графики распределения нормальных напряжений $\sigma_y^p(x, y)$, рассчитанных по формуле (2.31) (точечная кривая $sy(x, y)$) и (2.32) (сплошная кривая $syI(x, y)$). Считалось, по-прежнему, что $P=1$, $h=1$, $\nu=1/3$, $y=0$.

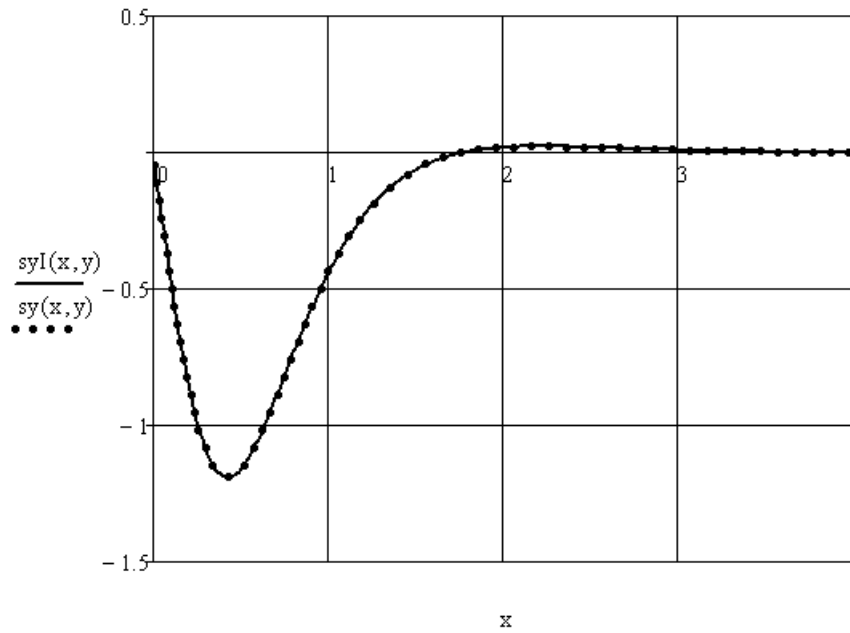


Рис.2.

Рассмотрим теперь случай, когда на сторонах полосы заданы только касательные напряжения, равные $q(x)$. В этом случае вместо формул (2.3), (2.6) и (2.9) соответственно получим

$$\begin{cases} L_{YY}(\alpha, h)Y_0(x) + L_{YU}(\alpha, h)U_0(x) = 0; \\ L_{XY}(\alpha, h)Y_0(x) + L_{XU}(\alpha, h)U_0(x) = q(x), \end{cases} \quad (0.52)$$

$$\begin{cases} L_{YY}(-i\lambda, h)\tilde{Y}_0(\lambda) + L_{YU}(-i\lambda, h)\tilde{U}_0(\lambda) = 0; \\ L_{XY}(-i\lambda, h)\tilde{Y}_0(\lambda) + L_{XU}(-i\lambda, h)\tilde{U}_0(\lambda) = \tilde{q}(\lambda), \end{cases} \quad (0.53)$$

$$\widetilde{Y}_0(\lambda) = \frac{L_{YU}(-i\lambda, h)\tilde{q}(\lambda)}{L(-i\lambda)}, \quad \widetilde{U}_0(\lambda) = -\frac{L_{YY}(-i\lambda, h)\tilde{q}(\lambda)}{L(-i\lambda)}, \quad (0.54)$$

где $\tilde{q}(\lambda)$ – преобразование Фурье функции $q(x)$. Будем пользоваться также обозначениями $\tilde{q}^c(\lambda)$ и $\tilde{q}^s(\lambda)$, аналогичными (2.8), для преобразований Фурье четной и нечетной функций.

Подставим выражения (2.35) в формулы (2.11). Следующие формулы – аналоги формул (2.12) и получаются из них заменой операторов $L_{XY}(-i\lambda, h)$ на $-L_{YY}(-i\lambda, h)$, а $L_{XU}(-i\lambda, h)$ - на $-L_{YU}(-i\lambda, h)$

$$\begin{aligned} \widetilde{U}^q(\lambda, y) &= -\frac{L_{UU}(-i\lambda, y)L_{YY}(-i\lambda, h) - L_{UY}(-i\lambda, y)L_{YU}(-i\lambda, h)}{L(-i\lambda)}\tilde{q}(\lambda), \\ \widetilde{V}^q(\lambda, y) &= -\frac{L_{VU}(-i\lambda, y)L_{YY}(-i\lambda, h) - L_{VY}(-i\lambda, y)L_{YU}(-i\lambda, h)}{L(-i\lambda)}\tilde{q}(\lambda), \\ \widetilde{\sigma}_x^q(\lambda, y) &= -\frac{A_U(-i\lambda, y)L_{YY}(-i\lambda, h) - A_Y(-i\lambda, y)L_{YU}(-i\lambda, h)}{L(-i\lambda)}\tilde{q}(\lambda), \\ \widetilde{Y}^q(\lambda, y) &= -\frac{L_{YU}(-i\lambda, y)L_{YY}(-i\lambda, h) - L_{YY}(-i\lambda, y)L_{YU}(-i\lambda, h)}{L(-i\lambda)}\tilde{q}(\lambda), \\ \widetilde{X}^q(\lambda, y) &= -\frac{L_{XU}(-i\lambda, y)L_{YY}(-i\lambda, h) - L_{XY}(-i\lambda, y)L_{YU}(-i\lambda, h)}{L(-i\lambda)}\tilde{q}(\lambda). \end{aligned} \quad (0.55)$$

Применяя обратное преобразование Фурье к выражениям (2.36) и раскрывая в них подынтегральные выражения, получим

$$\begin{aligned} U^q(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h - \operatorname{ch} \lambda h\right) \operatorname{ch} \lambda y - \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{q}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ V^q(x, y) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{1-\nu}{2} \operatorname{ch} \lambda h + \frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h\right) \operatorname{sh} \lambda y - \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{q}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_x^q(x, y) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda[(-\lambda h \operatorname{sh} \lambda h + 2 \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{q}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \end{aligned} \quad (0.56)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y^q(x, y) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda^2[-y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y + h \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{q}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy}^q(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda\left[(-\lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y\right]}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{q}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{aligned}$$

Если функция $q(x)$ нечетна, то формулы (2.37) можно представить в таком виде

$$U^q(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h - \operatorname{ch} \lambda h\right) \operatorname{ch} \lambda y - \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{q}^s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda,$$

$$\begin{aligned}
V^q(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1-\nu}{2} \operatorname{ch} \lambda h + \frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h \right) \operatorname{sh} \lambda y - \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{q}^s(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \\
\sigma_x^q(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+\nu) \lambda [(-\lambda h \operatorname{sh} \lambda h + 2 \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y]}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{q}^s(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \\
\sigma_y^q(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+\nu) \lambda^2 [-y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y + h \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{q}^s(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \\
\tau_{xy}^q(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+\nu) \lambda [(-\lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{q}^s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda.
\end{aligned} \tag{0.57}$$

А если $q(x)$ четна, то

$$\begin{aligned}
U^q(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h - \operatorname{ch} \lambda h \right) \operatorname{ch} \lambda y - \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{q}^c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \\
V^q(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1-\nu}{2} \operatorname{ch} \lambda h + \frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h \right) \operatorname{sh} \lambda y - \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{q}^c(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \\
\sigma_x^q(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+\nu) \lambda [(-\lambda h \operatorname{sh} \lambda h + 2 \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y]}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{q}^c(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \\
\sigma_y^q(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+\nu) \lambda^2 [-y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y + h \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{q}^c(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \\
\tau_{xy}^q(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+\nu) \lambda [(-\lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu) \lambda [\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \tilde{q}^c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda.
\end{aligned} \tag{0.58}$$

Переходя в формулах (2.37) к интегрированию по мнимой оси, получим следующие аналоги формул (2.18)

$$\begin{aligned}
U^q(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\xi^q(\gamma, y)}{L(\gamma)} \tilde{q}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma, & V^q(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\chi^q(\gamma, y)}{L(\gamma)} \tilde{q}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma, \\
\sigma_x^q(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_x^q(\gamma, y)}{L(\gamma)} \tilde{q}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma, & \sigma_y^q(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_y^q(\gamma, y)}{L(\gamma)} \tilde{q}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma, \\
\tau_{xy}^q(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{t_{xy}^q(\gamma, y)}{L(\gamma)} \tilde{q}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma,
\end{aligned} \tag{0.59}$$

где

$$\begin{aligned}
\xi^q(\gamma, y) &= -\left(\frac{1+\nu}{2} \gamma h \sin \gamma h + \cos \gamma h \right) \cos \gamma y + \frac{1+\nu}{2} \gamma y \cos \gamma h \sin \gamma y, \\
\chi^q(\gamma, y) &= \left(\frac{1+\nu}{2} \gamma h \sin \gamma h - \frac{1-\nu}{2} \cos \gamma h \right) \sin \gamma y + \frac{1+\nu}{2} \gamma y \cos \gamma h \cos \gamma y, \\
s_x^q(\gamma, y) &= -(1+\nu) \gamma [(\gamma h \sin \gamma h + 2 \cos \gamma h) \cos \gamma y - \gamma y \cos \gamma h \sin \gamma y],
\end{aligned} \tag{0.60}$$

$$s_y^q(\gamma, y) = (1 + \nu)\gamma^2 (h \sin \gamma h \cos \gamma y - y \cos \gamma h \sin \gamma y),$$

$$t_{xy}^q(\gamma, y) = (1 + \nu)\gamma[\gamma h \sin \gamma h + \cos \gamma h] \sin \gamma y + \gamma y \cos \gamma h \cos \gamma y.$$

Пример 3. Пусть нечетная функция (сосредоточенный диполь)

$$q(x) = Q\delta'(x). \tag{0.61}$$

Тогда (см. формулы (2.29), (2.30))

$$\tilde{q}(\lambda) = \tilde{q}^s(\lambda) = -Q\lambda, \quad \tilde{q}(\gamma) = \tilde{q}^s(\gamma) = Q\gamma. \tag{0.62}$$

Подставляя выражения (2.43) в формулы (2.40) и (2.38), получим два представления искомого решения:

а) в виде разложений по функциям Фадля-Папковича

$$U^q(x, y) = -Q \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\xi^q(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} \lambda_k e^{\lambda_k x} \right], \quad V^q(x, y) = -Q \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{\chi^q(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} \lambda_k e^{\lambda_k x} \right],$$

$$\sigma_x^q(x, y) = -Q \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{s_x^q(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} \lambda_k e^{\lambda_k x} \right], \quad \sigma_y^q(x, y) = -Q \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{s_y^q(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} \lambda_k e^{\lambda_k x} \right], \tag{0.63}$$

$$\tau_{xy}^q(x, y) = -Q \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[\frac{t_{xy}^q(\lambda_k, y)}{L'(\lambda_k)} \lambda_k e^{\lambda_k x} \right];$$

б) в виде несобственных интегралов

$$U^q(x, y) = -\frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h - \operatorname{ch} \lambda h \right) \operatorname{ch} \lambda y - \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \lambda \sin \lambda x d\lambda,$$

$$V^q(x, y) = \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1-\nu}{2} \operatorname{ch} \lambda h + \frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h \right) \operatorname{sh} \lambda y - \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \lambda \cos \lambda x d\lambda,$$

$$\sigma_x^q(x, y) = \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda[(-\lambda h \operatorname{sh} \lambda h + 2 \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \lambda \cos \lambda x d\lambda, \tag{0.64}$$

$$\sigma_y^q(x, y) = \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda^2[-y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y + h \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \lambda \cos \lambda x d\lambda,$$

$$\tau_{xy}^q(x, y) = \frac{Q}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda[(-\lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda[\lambda h + \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h]} \lambda \sin \lambda x d\lambda.$$

На рис.3 приведены графики распределения нормальных напряжений $\sigma_x^q(x, y)$, вычисленных по формулам (2.44) (точечная кривая $sx(x, y)$) и (2.45) (сплошная кривая $sxI(x, y)$) при $Q = 1, h = 1, \nu = 1/3, y = 0$.

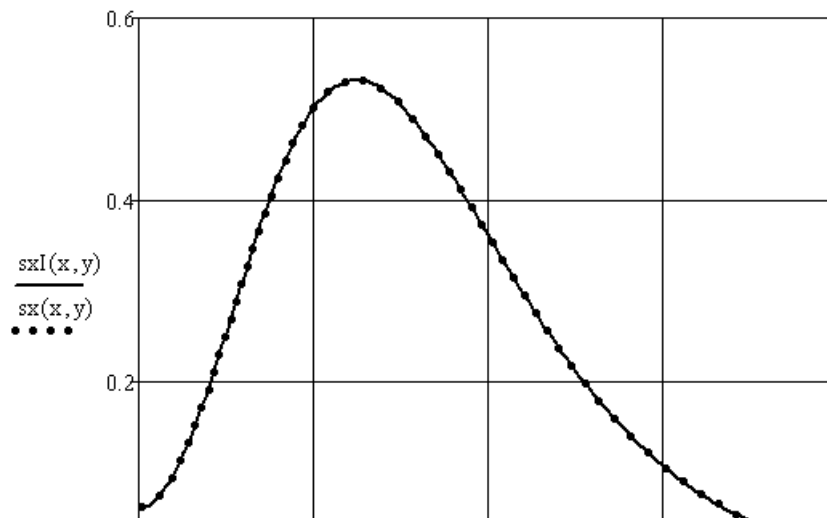


Рис.3.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В.В.* Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. – М.: Стройиздат, 1975. – 224 с.
2. *Агарев В.А.* Метод начальных функций для двумерных краевых задач теории упругости. – Киев : АН УССР, 1963. – 350 с.
3. *Коваленко М.Д., Шуляковская Т.Д.* Разложения по функциям Фадля-Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №5. – С.78-98.
4. *Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д.* Разложения по функциям Фадля-Папковича. Примеры решений в полуполосе // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – №5. – С.136-158.
5. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Л.: Наука, 1967. – 402 с.
6. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.
7. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 542 с.
8. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 678 с.
9. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
10. *Брычков Ю.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1977. – 286 с.

Поступила в редакцию 2 декабря 2014 года.

Сведения об авторах:

Коваленко Михаил Денисович – д.ф.-м.н., в.н.с., Лаборатория геодинамики, ФГБУН Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: kov08@inbox.ru

Меньшова Ирина Владимировна – к.ф.-м.н., с.н.с., Лаборатория геодинамики, ФГБУН Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: menshovairina@yandex.ru

Кержаев Александр Петрович, – к.ф.-м.н., с.н.с., Лаборатория геодинамики, ФГБУН Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: alex_kerg@mail.ru