

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, ПОДКРЕПЛЕННОЙ УПРУГИМИ СВЯЗЯМИ, ПРИ ДЕЙСТВИИ ВНЕШНЕГО ДАВЛЕНИЯ

Недбай А.Я., Волков Е.Н., Данилкин Е.В.

ОАО «Корпорация «Московский институт теплотехники», г. Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

Исследуется динамическая устойчивость цилиндрической ортотропной оболочки, подкрепленной упругими связями (пружинами), при действии гармонически изменяющегося внешнего давления. По длине оболочки пружины расположены в несколько рядов, а по окружности – симметрично относительно вертикального диаметра. Решение дифференциальных уравнений ищется в виде тригонометрических рядов. В результате задача сводится к системе алгебраических уравнений относительно радиальных перемещений оболочки в местах установки пружин. Для равномерно расположенных одинаковых пружин решение получено в явном виде. На числовом примере показано влияние жесткости пружин на границы областей неустойчивости.

Ключевые слова: динамическая устойчивость оболочки; параметрический резонанс оболочки; подкрепленная оболочка

DYNAMIC STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL, SUPPORTED BY MEANS OF ELASTIC LINKS, UNDER EXTERNAL PRESSURE INTERACTION

Nedbay A.J., Volkov E.N., Danilkin E.V.

Joint stock company «Moscow institute of heat engineering», Moscow, Russia

SUMMARY

Dynamic stability of a cylindrical orthotropic shell, supported by means of elastic links (springs), under interaction of the external pressure, subjected to harmonic low, is investigated. Several rows of the springs are placed in the axial direction, and symmetrically about circle. A solution of the differential equation is finding in the form of trigonometric series. As a result, the problem is reduced to the system of a algebraic equations with respect to the real displacements of the shells springs integration points. The solution is found in evident form for the springs placed uniformly. The springs hard influence on the border of a instability areas are shown by means of a numerical example.

Key words: dynamic stability of the shell; parametric resonance of the shell; supported shell

При создании некоторых типов летательных аппаратов в них используются узлы в виде коаксиальных оболочек, изготовленных из композиционных материалов и соединенных между собой упругими связями. Такого рода конструкцией, например, является камера дожигания прямого воздушного реактивного двигателя. В первом приближении упругие связи можно считать

безынерционными пружинами, расположенными в несколько рядов по длине камеры, а по окружности – симметрично относительно вертикального диаметра.

В процессе работы двигателя внутренняя оболочка камеры дожигания нагружена осевыми силами и внешним давлением, которое содержит постоянную и переменную составляющие. Постоянная составляющая создается из-за сгорания газа в полости камеры, а возникновение переменной составляющей обусловлено турбулентностью атмосферы и неравномерностью процесса горения.

Высокая температура нагрева камеры, интенсивный унос материала и внешние циклические нагрузки при определенных соотношениях способны вызвать разрушение конструкции. Это вызывает необходимость учета указанных факторов ещё на стадии проектирования двигателей.

Проблема динамической устойчивости конструкции летательных аппаратов возникла в середине прошлого столетия и была связана с развитием авиации и космонавтики. Пути её решения нашли отражение в многочисленных монографиях [1-3]. В настоящее время в связи с широким внедрением композиционных материалов и разработкой принципиально новых конструкций возник класс актуальных задач по этой проблеме, обусловленных наличием в оболочках подкрепляющих элементов [4-7].

В данной работе исследуется динамическая устойчивость ортотропной оболочки, соединенной упругими связями с бесконечно жесткой внешней оболочкой, при действии гармонически изменяющегося во времени внешнего давления. Жесткость пружин учитывает местный прогиб внешней оболочки. Оболочка по торцам шарнирно оперта и нагружена осевыми силами Тангенциальная и осевая составляющие инерционных сил оболочки, а также конструкционное демпфирование не учитываются. Расчетная схема показана на рис.1.

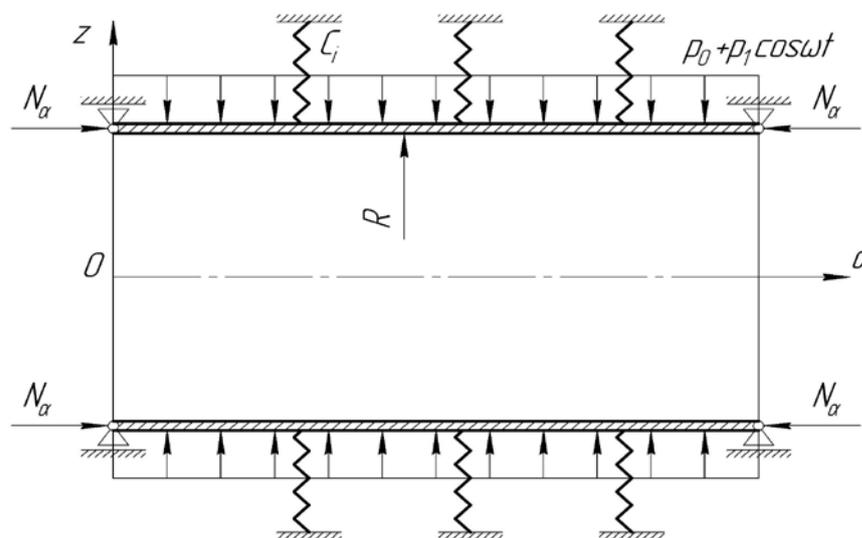


Рис.1. Расчетная схема.

Введем безразмерную систему цилиндрических координат, в которой линейные размеры отнесены к радиусу срединной поверхности оболочки. Тогда уравнение движения оболочки можно представить в виде [8]

$$\left[a_3 \nabla^8 + a_1 a_4 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \frac{B}{R} \nabla^4 (p_0 + p_1 \cos \omega t) \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right) + \right. \quad (1)$$

$$+a_5 \nabla^4 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + a_7 \nabla^4 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left] w + \frac{B \nabla^4}{R^2} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_i w_{ij} \delta(\alpha - \alpha_i) \delta(\beta - \beta_j) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \nabla^8 = & a_1 \frac{\partial^8}{\partial \alpha^8} + [a_4 + a_6(2a_1 - \nu_\beta)] \frac{\partial^8}{\partial \alpha^6 \partial \beta^2} + \\ & + \left\{ a_1 a_4 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 + [2a_6(a_4 - a_6 \nu_\beta) + a_1 a_4] \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right\} \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + \\ & + a_4 \left[(a_4 - a_6 \nu_\beta) \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 + 2a_1 a_6 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4} \right] \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + a_1 a_4^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \beta^2} + 1 \right)^2 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}; \end{aligned}$$

$$\nabla^4 = a_1 \frac{\partial^4}{\partial \alpha^4} + (a_4 - a_6 \nu_\beta) \frac{\partial^4}{\partial \alpha^2 \partial \beta^2} + a_1 a_4 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4};$$

$$a_1 = \frac{G_{\alpha\beta}(1 - \nu_\alpha \nu_\beta)}{E_\alpha}; \quad a_2 = a_1 + \nu_\beta; \quad a_3 = \frac{h^2}{12R^2}; \quad a_4 = \frac{E_\beta}{E_\alpha};$$

$$a_5 = \frac{N_\alpha B}{2\pi R^3}; \quad a_6 = 2a_1 + \nu_\beta; \quad a_7 = B\rho h; \quad B = \frac{R^2(1 - \nu_\alpha \nu_\beta)}{E_\alpha h};$$

$w_{ij} = w(\alpha_i, \beta_j)$; α, β – безразмерные координаты вдоль образующей и в окружном направлении; w – нормальное перемещение; R, h – радиус и толщина оболочки; $E_\alpha, E_\beta, G_{\alpha\beta}$ – модули упругости в осевом и окружном направлениях и модуль сдвига; ν_α, ν_β – коэффициенты Пуассона в осевом и окружном направлениях; ρ – плотность материала оболочки; N_α – начальная осевая сила; p_0, p_1 – постоянная составляющая и амплитуда переменной составляющей внешнего давления; ω – частота пульсаций; C_i – жесткость i -ой пружины; M – количество рядов пружин; N – количество пружин в ряду; $\delta(\alpha)$ – дельта-функция.

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{mn}(t) \sin \gamma_m \alpha \cos n\beta, \quad (2)$$

где

$$\gamma_m = \frac{m\pi}{\alpha_0}; \quad \alpha_0 = \frac{L}{R}; \quad L – \text{длина оболочки}; \quad n – \text{число волн в окружном направлении};$$

m – число полуволн по длине; $f_{mn}(t)$ – неизвестная функция времени (в дальнейшем аргумент t опускается).

Раскладывая дельта-функции в ряды Фурье

$$\delta(\alpha - \alpha_i) = \frac{2}{\alpha_0} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \gamma_m \alpha_i \sin \gamma_m \alpha;$$

$$\delta(\beta - \beta_j) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos n(\beta - \beta_j) \right]$$

и подставляя (2) в (1), получим бесконечную систему неоднородных дифференциальных уравнений типа Матье-Хилла

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f_{mn}}{dt^2} + b_1 \cos \omega t f_{mn} + b_2 f_{mn} = \\ = -a_8 (2 - \delta_{n0}) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_i f_{jk} \sin \gamma_m \alpha_i \sin \xi_k \alpha_i \cos n \beta_j; \end{aligned} \quad (3)$$

(m = 1, 2, 3, ...), (n = 0, 1, 2, ...),

где

$$b_1 = \frac{B p_1 (1 - n^2)}{a_7 R}; \quad \xi_k = \frac{k \pi}{\alpha_0}; \quad b_2 = \frac{1}{a_7} \left[\frac{a_3 \nabla_{mn}^8}{\nabla_{mn}^4} + \frac{a_1 a_4 \gamma_m^4}{\nabla_{mn}^4} - a_5 \gamma_m^2 + \frac{B p_0 (1 - n^2)}{R} \right];$$

$$\begin{aligned} \nabla_{mn}^8 = a_1 \gamma_m^8 + [a_4 + a_6 (2a_1 - \nu_\beta)] \gamma_m^6 n^2 + \\ + \left\{ a_1 a_4 (n^2 - 1)^2 + [2a_6 (a_4 - a_6 \nu_\beta) + a_1 a_4] n^4 \right\} \gamma_m^4 + \\ + a_4 [(a_4 - a_6 \nu_\beta)(1 - n^2)^2 + 2a_1 a_6 n^4] \gamma_m^2 n^2 + a_1 a_4^2 (1 - n^2)^2 n^4; \end{aligned}$$

$$\nabla_{mn}^4 = a_1 \gamma_m^4 + (a_4 - a_6 \nu_\beta) \gamma_m^4 n^2 + a_1 a_4 n^4; \quad a_8 = \frac{B}{\pi \alpha_0 a_7 R^2}; \quad \delta_{n0} - \text{символ Кронекера.}$$

Решение уравнений (3) будем искать в виде

$$[f_{mn}, f_{jk}] = \sum_{l=1, 2, \dots}^{\infty} \left\{ [A_{mn}^{(l)}, f_{jk}^{(l)}] \sin \frac{l \omega t}{2} + [B_{mn}^{(l)}, \varphi_{jk}^{(l)}] \cos \frac{l \omega t}{2} \right\}, \quad (4)$$

где $A_{mn}^{(l)}, B_{mn}^{(l)}, f_{jk}^{(l)}, \varphi_{jk}^{(l)}$ – постоянные коэффициенты.

Подставляя первую сумму из (4) в (3) и приравнивая коэффициенты при одинаковых $\sin \frac{l \omega t}{2}$, получим бесконечную систему алгебраических уравнений. Ограничимся первым членом ряда, который определяет границу главной области неустойчивости, и, согласно [1], его достаточно для практических расчетов.

В результате будем иметь

$$\Theta_{mn} A_{mn}^{(1)} = -a_8 (2 - \delta_{n0}) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N C_i f_{jk}^{(1)} \sin \gamma_m \alpha_i \sin \xi_k \alpha_i \cos n \beta_j, \quad (5)$$

где $\Theta_{mn} = \frac{(4b_2 \pm 2b_1 - \omega^2)}{4}$.

Так как в местах расположения пружин справедливо соотношение

$$f_{rm}^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn}^{(1)} \cos n \beta_r,$$

то, подставив в него выражение (5), получим бесконечную систему уравнений относительно $f_{ik}^{(1)}$

$$\begin{aligned} f_{rm}^{(1)} = -a_8 \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \frac{(2 - \delta_{n0}) C_i}{\Theta_{kn}} f_{jk}^{(1)} \sin \gamma_m \alpha_i \sin \xi_k \alpha_i \cos n \beta_j \cos n \beta_r; \end{aligned} \quad (6)$$

(r = 1, 2, 3...M)

Так как по окружности пружины расположены равномерно $\left(\beta_j = \frac{2\pi j}{N}\right)$,

то решение уравнения (6) будем искать в виде

$$f_{jk}^{(1)} = A_k \cos \frac{2\pi j S_1}{N}, \quad 0 \leq S_1 \leq \frac{N}{2}, \quad (7)$$

где S_1 – целое число характеризующее форму потери устойчивости.

Подставляя (7) в (6), получим бесконечную систему уравнений относительно A_k

$$A_m = -a_8 N \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^M C_i b_k A_k \sin \gamma_m \alpha_i \sin \xi_k \alpha_i, \quad (8)$$

$$(m = 1, 2, 3, \dots)$$

где $b_k = \sum_n \frac{1}{\Theta_{kn}}$; суммирование производится по n , принимающим значения

$n = S_1, Nq \pm S_1, \quad q = 1, 2, 3, \dots$

Редуцируя систему (8) до количества членов, обеспечивающих необходимую точность, и приравнявая к нулю определитель усеченной матрицы, получим характеристическое уравнение для определения критических частот.

Подставляя вторую сумму из (4) в (3), получим характеристическое уравнение (8), в котором коэффициенты A_m, A_k необходимо заменить на B_m, B_k , а при коэффициенте Θ_{mn} принять знак плюс.

Из системы (8) можно получить конечную систему уравнений. Если ввести величины

$$U_r = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \xi_k \alpha_r,$$

то уравнение (8) можно преобразовать к виду

$$U_r + a_8 N \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^M C_i b_k U_i \sin \xi_k \alpha_i \sin \xi_k \alpha_r = 0. \quad (9)$$

$$(r = 1, 2, \dots, M)$$

В случае одинаковых равномерно расположенных рядов пружин

$\left(\alpha_i = \frac{\alpha_0 i}{(M+1)}\right)$ решение системы (9) можно представить в виде

$$U_i = A \sin \frac{\pi i S_2}{M+1}, \quad 1 \leq S_2 \leq M, \quad (10)$$

где S_2 – целое число, характеризующее форму потери устойчивости.

Подставляя (10) в (9), получим характеристическое уравнение в явном виде

$$1 + a_8 N \frac{(M+1)}{2} C \sum_k b_k = 0,$$

где суммирование производится по k , принимающему значения

$$k = S_2, 2q(M+1) \pm S_2, \quad q = 1, 2, 3, \dots$$

Придавая S_1 и S_2 различные целочисленные значения, находим критическое значение нагрузки.

В качестве примера рассмотрена оболочка, подкрепленная тремя рядами одинаковых пружин. Базовые параметры оболочки имеют следующие значения:

$$\frac{L}{R} = 10; \quad \frac{h}{R} = 0,015; \quad \frac{E_\beta}{E_\alpha} = 1,53; \quad \frac{G_{\alpha\beta}}{E_\alpha} = 0,17; \quad \nu_\alpha = 0,15;$$

$$\nu_\beta = 0,23; \quad \frac{R\rho g}{E_\alpha} = 5 \cdot 10^{-7}; \quad M = 3, \quad N = 6, \quad \frac{C}{E_\alpha R} = 8,3 \cdot 10^{-5}.$$

На рис.2 показаны области неустойчивости (заштрихованная часть) оболочки, для различных значений безразмерной жесткости пружин. Величина постоянной составляющей внешнего давления принималась $p_0 = 2p^*$, а осевая сжимающая сила была равна $\bar{N}_\alpha = N_\alpha / N_\alpha^*$ (p^*, N_α^* – соответственно критическое давление и осевая сжимающая сила потери устойчивости неподкрепленной оболочки).

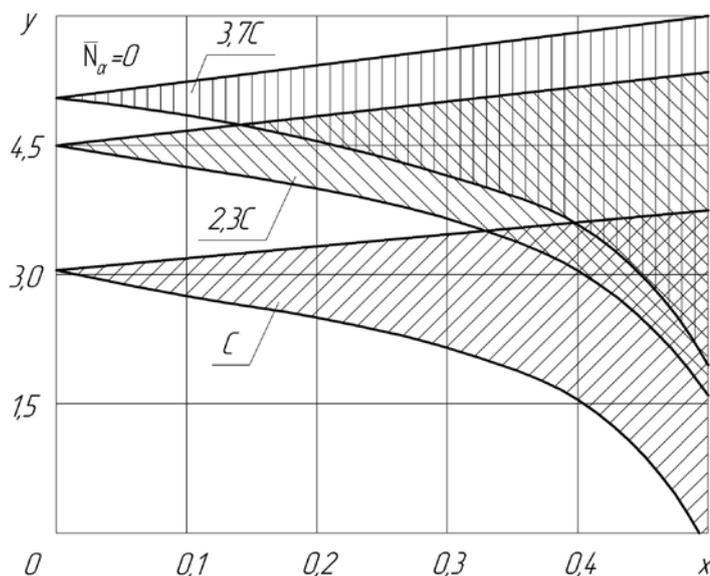


Рис.2. Области неустойчивости оболочки при различных значениях жесткости пружин.

По оси ординат $\left(y = \frac{\omega}{\omega_0}\right)$ откладывается отношение критической частоты пульсаций к собственной частоте неподкрепленной оболочки, по оси абсцисс $\left(x = \frac{P_1}{P_0}\right)$ – отношение переменной составляющей внешнего давления к постоянной.

На рис.3 представлены аналогичные зависимости при $p_0 = 1,5p^*$ и жесткости пружин равной $2,3C$ для различных значений осевой сжимающей силы \bar{N}_α .

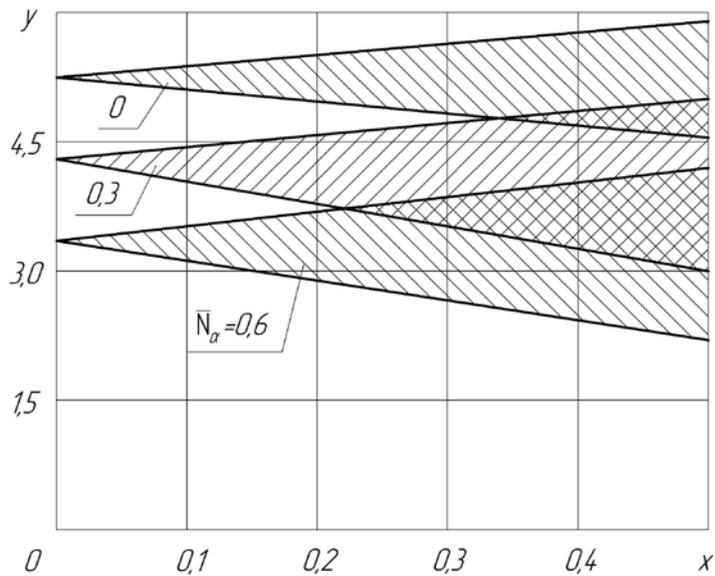


Рис.3. Области неустойчивости оболочки при различных значениях сжимающей силы.

Из приведенного примера следует, что:

- при увеличении жесткости пружин больше $\approx 4C$ изменение границ областей неустойчивости практически не происходит;
- при увеличении переменной составляющей внешнего давления больше $x > 0,3$ начинается резкое уменьшение критических частот;
- при увеличении осевой силы до $\bar{N}_\alpha = 0,6$ границы областей неустойчивости линейно снижаются, а их площадь увеличивается в 1,5 раза.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена математическая модель поведения внутренней оболочки камеры дожигания, подкрепленной упругими связями, при действии внешнего пульсирующего давления. Уравнение колебаний системы с помощью тригонометрических рядов по осевой и окружной координатах сводится к системе неоднородных уравнений типа Матье-Хилла. В результате решения получается бесконечная система алгебраических уравнений, которая, после усечения и приравнивания к нулю ее определителя, будет представлять характеристическое уравнение критических частот.

Предлагаемый подход позволяет установить границы главной области неустойчивости и определить параметры системы, наиболее сильно влияющие на частоты параметрического резонанса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В. Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Физматлит, 1976. – 416 с.
2. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – 696 с.
3. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.

4. Серов М.В., Мозгунов В.Н., Зубарев А.А. Динамическая устойчивость цилиндрической оболочки при внешнем давлении, подкрепленной упругим цилиндром / Сборник трудов 23 межд. конференции. – Саратов: СГТУ, 2010. – Т.5. – Секция 5. – С.47-49.
5. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Волков Е.Н. Динамическая устойчивость слоистой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами и цилиндром, при внешнем давлении // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т.19. – №4. – С.614-623.
6. Соломонов Ю.С., Сухадольский А.П., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Волков Е.Н. Динамическая устойчивость слоистой цилиндрической оболочки, подкрепленной кольцевыми ребрами и нелинейно-упругим цилиндром // Труды МИТ. – 2012. – Т.12. – Ч.1. – С.14-24.
7. Волков Е.Н., Недбай А.Я. Динамическая устойчивость ортотропной цилиндрической оболочки, подкрепленной кусочно-непрерывным цилиндром, при внешнем давлении. // Труды МИТ. – 2013. – Т.13. – Ч.1. – С.97-105.
8. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрюшин В.А. Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. – М.: Физматлит, 2014. – 406 с.

Поступила в редакцию 20 января 2015 года.

Сведения об авторах:

Недбай Аркадий Яковлевич – к.т.н., в.н.с., ОАО «Корпорация «Московский институт теплотехники», г. Москва, Россия

Волков Евгений Николаевич – нач.сектора, ОАО «Корпорация «Московский институт теплотехники», г. Москва, Россия; e-mail: eugeenw1@mail.ru

Данилкин Евгений Васильевич – вед.инж., ОАО «Корпорация «Московский институт теплотехники», г. Москва, Россия; e-mail: evgen-85-blackjack@yandex.ru