

## **СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТЬ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МЕХАНИЧЕСКИХ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАГРУЗОК<sup>1</sup>**

Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В., Матвеев В.П.

*Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия*

### **РЕЗЮМЕ**

В работе представлены результаты исследований собственных колебаний и устойчивости круговых цилиндрических оболочек, выполненных из функционально-градиентных материалов. Внешняя поверхность конструкции нагрета и нагружена равномерным давлением. Температурно-зависимые эффективные свойства материала изменяются по толщине оболочки согласно степенному закону. Распределение температуры по радиальной координате определяется из решения квазилинейного одномерного уравнения теплопроводности. Соотношения классической теории оболочек сводятся к системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений относительно новых неизвестных. Интегрирование осуществляется методом ортогональной прогонки Годунова на каждой итерации пошаговой процедуры, используемой для вычисления собственных частот колебаний. Для круговых цилиндрических оболочек с различными вариантами граничных условий продемонстрированы зависимости минимальных частот колебаний от температурной или/и механической нагрузок при разных консистенциях функционально-градиентного материала.

**Ключевые слова:** функционально-градиентный материал; цилиндрическая оболочка; термомеханическая нагрузка; метод ортогональной прогонки Годунова; собственные колебания; устойчивость

## **NATURAL VIBRATIONS AND STABILITY OF FUNCTIONALLY GRADED CYLINDRICAL SHELLS UNDER MECHANICAL AND THERMAL LOADS**

Bochkarev S.A., Lekomtsev S.V., Matveenko V.P.

*Institute of continuous media mechanics UB RAS, Perm, Russia*

### **SUMMARY**

The paper presents the results of studying the natural vibrations and stability of circular cylindrical shells made of functionally graded materials. The external surface of the structure is heated and loaded by uniformly distributed pressure. The effective temperature-dependent properties of the material vary through the thickness of the shell according to a power law. The distribution of temperature along the radial coordinate is defined by solving a quasi-linear one-dimensional equation of thermal conductivity. The relations of the classical shell theory are reduced to the system of eight ordinary differential equations for new unknown quantities. Integration is carried out by applying Godunov's orthogonal sweep method at each iteration

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 13-01-96049).

of the step-wise procedure used to calculate eigenfrequencies of vibrations. The dependences of the lowest vibration frequencies on temperature and/or mechanical loads have been determined for circular cylindrical shells with variable consistency of functionally graded material under different boundary conditions.

**Key words:** functionally graded material; cylindrical shell; thermo-mechanical load; Godunov's orthogonal sweep method; natural vibrations; stability

## ВВЕДЕНИЕ

Элементы современных машиностроительных конструкций подвергаются в процессе жизненного цикла интенсивному влиянию широкого спектра внешних механических или температурных воздействий. Такого рода нагрузка предъявляет повышенные требования к эксплуатационным свойствам изделий, достичь которые возможно с применением функционально-градиентных (ФГ) материалов [1]. Эти композиты представляют собой смесь двух или более компонентов, как правило, керамики и металла, и обеспечивают непрерывное и гладкое изменение механических и физических свойств по толщине конструкции. Они позволяют объединить преимущества керамических материалов, с их повышенной сопротивляемостью к коррозии и температурным нагрузкам, и металлов, с их высокой прочностью на разрыв.

За последние два десятилетия исследованию собственных колебаний, устойчивости или динамическому отклику пластин и оболочек, выполненных из функционально-градиентных материалов и подвергающихся воздействию механических, температурных или аэродинамических нагрузок, посвящено значительное количество работ. С частичной библиографией можно ознакомиться в недавно опубликованных статьях [2-4]. Из всего многообразия источников, в контексте настоящего исследования, наибольший интерес представляют те, в которых проведён модальный анализ цилиндрических оболочек, нагруженных или ненагруженных механической нагрузкой, с учётом температурных эффектов. Так, конечно-элементный анализ ненагруженных жёстко закреплённых цилиндрических оболочек представлен в [5]. Свойства материалов приняты зависящими от температуры, включая коэффициенты теплопроводности. В связи с чем, распределение температуры по толщине оболочки находится из решения одномерного уравнения теплопроводности с помощью метода конечных элементов. Собственные колебания ненагруженных оболочек под действием температурной нагрузки рассмотрены в [6] для различных комбинаций граничных условий вида свободное опирание. Решение осуществляется методом Бубнова-Галёркина. Свойства материалов также зависят от температуры за исключением коэффициентов теплопроводности, что позволяет использовать аналитическое выражение для нахождения распределения температуры по толщине оболочки. Аналогичное распределение используется и в [7] для свойств материалов, не зависящих от температуры. Здесь рассматриваются свободно опертые оболочки, нагруженные осевой силой и расположенные на упругом основании. Из этого небольшого обзора следует, что в настоящий момент отсутствуют работы, в которых был бы осуществлен анализ колебаний цилиндрических ФГ-оболочек с различными граничными условиями, одновременно нагруженных механической и температурной нагрузками. Выполнение такого исследования является целью данной работы.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассматривается упругая цилиндрическая оболочка, выполненная из функционально-градиентного материала (рис.1), длиной  $L$ , радиусом  $R$  и нагруженная равномерным внешним давлением  $p$ . Наружная поверхность оболочки нагревается до температуры  $T_o$ , тогда как температура внутренней поверхности всегда остается равной  $T_i=300\text{K}$ . Целью работы является исследование влияние свойств ФГ-материала на собственные колебания оболочки при различных вариантах граничных условий и условиях нагружения.

Для классической теории оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, компоненты вектора деформации в криволинейной системе координат  $(s, \theta, z)$  могут быть записаны в виде [8]

$$E_{11} = \varepsilon_{11} + z\kappa_{11}, \quad E_{22} = \varepsilon_{22} + z\kappa_{22}, \quad E_{12} = \varepsilon_{12} + 2z\kappa_{12},$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\theta_1^2, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w\right) + \frac{1}{2}\theta_2^2, \quad \varepsilon_{12} = \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \theta_1\theta_2, \\ \kappa_{11} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, \quad \kappa_{22} = \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right), \quad \kappa_{12} = \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta}\right), \\ \theta_1 &= -\frac{\partial w}{\partial s}, \quad \theta_2 = \frac{1}{R}\left(v - \frac{\partial w}{\partial \theta}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

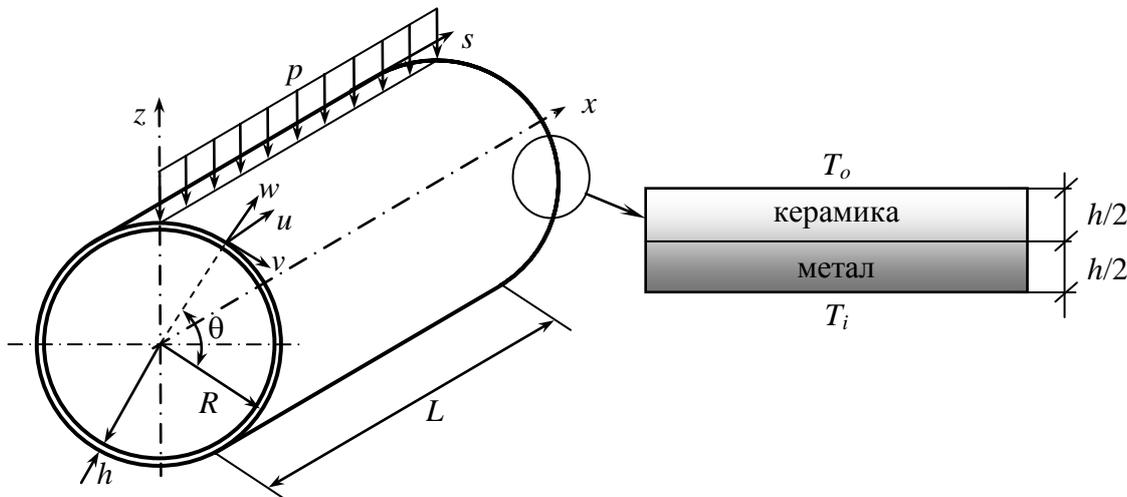


Рис.1. Нагретая снаружи цилиндрическая оболочка из функционально-градиентного материала под действием равномерного давления.

Здесь:  $u, v, w$  – меридиональная, окружная и нормальная составляющие вектора перемещений оболочки;  $\theta_i$  – углы поворота недеформируемой нормали.

Физические соотношения, устанавливающие связь между вектором усилий и моментов  $\mathbf{T} = \{T_{11}, T_{22}, S, M_{11}, M_{22}, H\}^T$  и вектором обобщённых деформаций  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}, \kappa_{11}, \kappa_{22}, 2\kappa_{12}\}^T$ , запишем в матричном виде

$$\mathbf{T} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} - \bar{\mathbf{T}}^{th} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}} & \bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{B}} & \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} - \begin{Bmatrix} \mathbf{T}^{th} \\ \mathbf{M}^{th} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

где  $\mathbf{T}^{th} = \{T_{11}^{th}, T_{22}^{th}, 0\}^T$  и  $\mathbf{M}^{th} = \{M_{11}^{th}, M_{22}^{th}, 0\}^T$  – вектора температурных усилий и моментов. Коэффициенты, входящие в матрицу жёсткостей  $\mathbf{D}$ , и температурные компоненты определяются как

$$(\bar{a}_{ij}, \bar{b}_{ij}, \bar{c}_{ij}) = \int_h (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} dz, \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad (3)$$

$$(\mathbf{T}_{ii}^{th}, \mathbf{M}_{ii}^{th}) = \int_h (1, z) \bar{Q}_{ij} \boldsymbol{\alpha} \Delta T dz, \quad \boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_{eff}(z, T), \alpha_{eff}(z, T), 0\}^T, \quad (4)$$

где

$$\bar{Q}_{11} = \bar{Q}_{22} = E_{eff}(z, T) / [1 - \nu_{eff}^2(z, T)], \quad \bar{Q}_{12} = \bar{Q}_{21} = \nu_{eff}(z, T) \bar{Q}_{11},$$

$$\bar{Q}_{33} = E_{eff}(z, T) / 2 / [1 + \nu_{eff}(z, T)].$$

Здесь:  $\Delta T$  – перепад температуры между наружной поверхностью и внутренней поверхностью, на которой задаётся температура, не приводящая к появлению напряжений;  $E_{eff}(z, T)$ ,  $\nu_{eff}(z, T)$ ,  $\alpha_{eff}(z, T)$  – эффективные модуль упругости, коэффициенты Пуассона и температурного расширения материала, которые для ФГ-материала определяются свойствами составляющих его материалов  $P$  и их объёмными долями  $\bar{V}$ . В случае функционально-градиентного материала, состоящего из двух материалов, металла  $m$  и керамики  $c$

$$P_{eff} = P_m \bar{V}_m + P_c \bar{V}_c.$$

Для оболочки постоянной толщины  $h$  объёмные доли являются функциями радиальной координаты  $z$ , отсчитываемой от срединной поверхности, и изменяются согласно степенному закону

$$\bar{V}_c = \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^N, \quad \bar{V}_m = 1 - \bar{V}_c,$$

где  $N$  – показатель объёмной доли, изменяющийся от нуля до бесконечности. С учётом последнего представления эффективные характеристики, под которыми, помимо перечисленных выше, понимаются также плотность материала  $\rho_{eff}(z, T)$  и коэффициент теплопроводности  $k_{eff}(z, T)$ , вычисляются следующим образом

$$P_{eff}(z, T) = P_m(T) + [P_c(T) - P_m(T)] \left( \frac{2z+h}{2h} \right)^N.$$

Температурно-зависимые свойства материала определяются как

$$P(T) = P_0 (P_{-1} T^{-1} + 1 + P_1 T + P_2 T^2 + P_3 T^3).$$

Здесь  $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$  – коэффициенты температуры  $T$ , уникальные для каждого материала. Распределение температуры по толщине оболочки определяется из численного решения квазилинейного уравнения установившейся теплопроводности с соответствующими граничными условиями

$$\frac{d}{dz} \left[ k_{eff}(z, T) \frac{dT}{dz} \right] = 0, \quad T|_{z=-h/2} = T_i, \quad T|_{z=h/2} = T_o. \quad (5)$$

Уравнения движения оболочки записываются следующим образом

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_{11}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial S}{\partial \theta} - \rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, & \frac{\partial S}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial T_{22}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \left( Q_{22} + \frac{\partial H}{\partial s} \right) - \rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{\partial Q_{11}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_{22}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} T_{22} + p - \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\
\frac{\partial M_{11}}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial H}{\partial \theta} - Q_{11} - T_{11} \theta_1 - S \theta_2 &= 0, \\
\frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{22}}{\partial \theta} - Q_{22} - T_{22} \theta_1 - S \theta_1 &= 0,
\end{aligned} \tag{6}$$

где  $Q_{ii}$  – поперечные силы,  $\rho_0 = \int_h \rho_{eff}(z, T) dz$ .

В [8] показано, что геометрические (1) и физические (2) соотношения, а также уравнения движения (6) с учётом разложения в ряд Фурье по окружной координате  $\theta$  могут быть сведены к линеаризованной системе восьми обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно новых неизвестных

$$\begin{aligned}
y_1 &= T_{11}, \quad y_2 = S + 2H/R, \quad y_3 = M_{11}, \quad y_4 = Q_{11} + j_R H, \\
y_5 &= u, \quad y_6 = v, \quad y_7 = w, \quad y_8 = \theta_1.
\end{aligned}$$

Здесь  $j_R = j/R$  и  $j$  – номер гармоники при разложении в ряд Фурье. С учётом этого, система может быть записана следующим образом

$$\partial \mathbf{y} / \partial s = \mathbf{f}(j, \omega, \mathbf{y}), \tag{7}$$

где

$$\begin{aligned}
f_1 &= j_R (2H/R - y_2) - \omega^2 \rho_0 y_5, & f_2 &= j_R T_{22} - Q_{22}/R - \omega^2 \rho_0 y_6, \\
f_3 &= y_4 - 2j_R H + T_{11}^0 y_8, & f_4 &= T_{22}/R - j_R Q_{22} - \omega^2 \rho_0 y_7, \\
f_5 &= \varepsilon_{11}, & f_6 &= \varepsilon_{12} + j_R y_5, & f_7 &= -y_8, & f_8 &= \kappa_{11}.
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь  $\omega$  – характеристический показатель, который в общем случае может быть комплексным. Входящие в выражения (8) величины вычисляются по следующим формулам

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{22} &= j_R y_6 + y_7/R, & \kappa_{22} &= j_R \theta_2, & \theta_2 &= y_6/R - j_R y_7, \\
H &= \bar{b}_{33} \varepsilon_{12} + 2\bar{c}_{33} \kappa_{12}, & Q_{22} &= -j_R M_{22} + T_{22}^0 \theta_2, & \varpi &= \bar{a}_{11} \bar{c}_{11} - \bar{b}_{11}^2, \\
\kappa_{11} &= \left[ \bar{a}_{11} (y_3 - \bar{b}_{12} \varepsilon_{22} - \bar{c}_{12} \kappa_{22}) - \bar{b}_{11} (y_1 - \bar{a}_{12} \varepsilon_{22} - \bar{b}_{12} \kappa_{22}) \right] / \varpi, \\
\varepsilon_{11} &= (y_1 - \bar{a}_{12} \varepsilon_{22} - \bar{b}_{11} \kappa_{11} - \bar{b}_{12} \kappa_{22}) / \bar{a}_{11}, & \kappa_{12} &= (\varepsilon_{12} + j_R y_5) / R - j_R y_8, \\
T_{22} &= \bar{a}_{12} \varepsilon_{11} + \bar{a}_{22} \varepsilon_{22} + \bar{b}_{12} \kappa_{11} + \bar{b}_{22} \kappa_{22}, & M_{22} &= \bar{b}_{12} \varepsilon_{11} + \bar{b}_{22} \varepsilon_{22} + \bar{c}_{12} \kappa_{11} + \bar{c}_{22} \kappa_{22}, \\
\varepsilon_{12} &= \left[ y_2 - 2(\bar{b}_{33} + 2\bar{c}_{33}/R) j_R (y_5/R + y_8) \right] / \left[ \bar{a}_{33} + 4(\bar{b}_{33} + \bar{c}_{33}/R)/R \right]
\end{aligned}$$

Величины  $T_{11}^0$  и  $T_{22}^0$ , характеризующие основное напряженное состояние, определяются из решения следующей осесимметричной статической задачи

$$\begin{aligned}
\partial \bar{\mathbf{y}} / \partial s &= \mathbf{f}(\bar{\mathbf{y}}) + \mathbf{b}, \\
b_2 &= -p + (\bar{a}_{12} \bar{\varepsilon}_{11} + \bar{b}_{12} \bar{\kappa}_{11} - T_{22}^{th}) / R, & b_4 &= \bar{\varepsilon}_{11}, & b_6 &= \bar{\kappa}_{11}.
\end{aligned}$$

Здесь  $\bar{\mathbf{y}} = \{T_{11}, Q_{11}, M_{11}, u, w, \theta_1\}^T$ ,  $\bar{\kappa}_{11} = (M_{11}^{th} \bar{a}_{11} - T_{11}^{th} \bar{b}_{11}) / \varpi$  и  $\bar{\varepsilon}_{11} = (T_{11}^{th} + \bar{b}_{11} \bar{\kappa}_{11}) / \bar{a}_{11}$ .

На краях оболочки задаются однородные граничные условия

$$y_i|_{s=0} \delta_i + y_{i+4}|_{s=0} (1 - \delta_i) = 0, \quad i = 1 \dots 4, \tag{9}$$

$$y_i|_{s=L} \delta_{i+4} + y_{i+4}|_{s=L} (1 - \delta_{i+4}) = 0, \quad i = 1 \dots 4, \quad (10)$$

где  $\delta_i = 0$ , если заданы кинематические, и  $\delta_i = 1$ , если заданы статические граничные условия.

Система (7) с граничными условиями (9-10) решается методом ортогональной прогонки Годунова [9] с численным интегрированием дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты четвёртого порядка точности. Для этих целей общее решение системы (7) представляется в виде

$$y = \sum_{j=1}^4 C_j y_j,$$

где  $C_j$  – некоторые константы и  $y_j$  – совокупность линейно независимых решений системы (7), удовлетворяющих граничным условиям (9). В результате интегрирования по заданному интервалу и удовлетворения граничных условий (10), для определения постоянных  $C_j$  получаем следующую алгебраическую систему

$$\sum_{j=1}^4 C_j f_{ij} = 0, \quad i = 1, 4. \quad (11)$$

Решение задачи сводится к вычислению таких значений  $\omega$ , при которых существует нетривиальное решение системы (11), условием которого является равенство нулю определителя матрицы  $|f_{ij}(\omega)| = 0$ . Для этой цели используется комбинация шагового метода, посредством которого вычисляются такие значения  $\omega$ , при которых происходит смена знака определителя  $|f_{ij}(\omega)|$ , и метода, уточняющего  $\omega$  в полученном диапазоне. В качестве последнего используется метод деления отрезка пополам.

В случае температурно-зависимого коэффициента теплопроводности, распределение температуры по толщине оболочки определяется из квазилинейного уравнения (5) в процессе выполнения итерационной процедуры, подробно описанной в [5].

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

В численных примерах рассматривается цилиндрическая функционально-градиентная оболочка ( $L/R=2$ ,  $R/h=200$ ,  $h=1 \times 10^{-3}$  м), выполненная из оксида циркония (наружная поверхность) и сплава титана (внутренняя поверхность). Физико-механические характеристики составляющих материалов приведены в Табл.1. Расчёты выполнялись для оболочек, один край которых всегда жёстко закреплён ( $u=v=w=\theta_1=0$ , C). На другом краю задаются условия свободного опирания ( $v=w=T_{11}=M_{11}=0$ , S), жёсткого закрепления или край остаётся свободным ( $T_{11} = S + 2H/R = M_{11} = Q_{11} + j_R H = 0$ , F). Численными экспериментами было установлено, что для достижения приемлемой точности вычислений достаточно 200 точек интегрирования (и одновременного ортонормирования в них).

### 2.1. Тестирование алгоритма.

Тестирование разработанного алгоритма осуществлено путём сравнения с результатами работы [11], в которой собственные частоты колебаний свободно

опёртой ФГ-оболочки ( $L/R=20$ ,  $R/h=500$ ), выполненной из стали (внутренняя поверхность) и никеля (наружная поверхность), вычислены методом Релея-Ритца. Здесь свойства материалов не зависят от температуры и определяются из Табл.1 при 300К. Сравнение низших частот колебаний (Гц) первых пяти гармоник (через  $m$  обозначено число полуволн в меридиональном направлении) цилиндрической оболочки, полученных как для чистых составляющих материалов, так и для различных значений показателя объёмной доли  $N$ , приведено в Табл.2. Представленные результаты демонстрируют хорошее совпадение с известными данными.

Таблица 1.

Физико-механические свойства составляющих материалов и их зависимость от температуры.

Материал		$P_0$	$P_{-1}$	$P_1$	$P_2$	$P_3$
Оксид циркония, $ZrO_2$ [10]	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$5.7000 \times 10^3$	0	0	0	0
	$E$ , Па	$2.4427 \times 10^{11}$	0	$-1.3707 \times 10^{-3}$	$1.2139 \times 10^{-6}$	$-3.6814 \times 10^{-10}$
	$\nu$	0.2882	0	$1.1335 \times 10^{-4}$	0	0
	$\alpha$ , 1/К	$1.2766 \times 10^{-5}$	0	$-1.4900 \times 10^{-3}$	$1.0 \times 10^{-6}$	$-0.6775 \times 10^{-11}$
	$k$ , Вт/мК	1.7	0	$1.2760 \times 10^{-4}$	$6.6485 \times 10^{-6}$	0
Сплав титана, Ti-6Al-4V [10]	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$4.4290 \times 10^3$	0	0	0	0
	$E$ , Па	$1.2256 \times 10^{11}$	0	$-4.5864 \times 10^{-4}$	0	0
	$\nu$	0.28838	0	$1.1214 \times 10^{-4}$	0	0
	$\alpha$ , 1/К	$7.5788 \times 10^{-6}$	0	$6.5000 \times 10^{-4}$	$3.1467 \times 10^{-7}$	0
	$k$ , Вт/мК	1.2095	0	$1.3938 \times 10^{-2}$	0	0
Сталь, SUS304 [11]	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	8166	0	0	0	0
	$E$ , Па	$2.0104 \times 10^{11}$	0	$3.079 \times 10^{-4}$	$-6.534 \times 10^{-7}$	0
	$\nu$	0.3262	0	$-2.002 \times 10^{-4}$	0	0
Никель, [11]	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	8900	0	0	0	0
	$E$ , Па	$2.2395 \times 10^{11}$	0	$-2.794 \times 10^{-4}$	$-3.998 \times 10^{-9}$	0
	$\nu$	0.31	0	0	0	0

Таблица 2.

Изменение собственных частот  $\omega$  (Гц) от номера гармоники  $j$  ( $m=1$ ) и показателя объёмной доли  $N$ .

$j$	$N=0$		$N=0.5$		$N=1$		$N=5$		$N=30$	
	[11]	Расчёт	[11]	Расчёт	[11]	Расчёт	[11]	Расчёт	[11]	Расчёт
1	12.894	12.894	13.103	13.103	13.211	13.211	13.433	13.433	13.526	13.525
2	4.3690	4.3684	4.4382	4.4375	4.4742	4.4735	4.5504	4.5497	4.5836	4.5829
3	4.0489	4.0480	4.1152	4.1144	4.1486	4.1476	4.2191	4.2182	4.2536	4.2527
4	6.8577	6.8570	6.9754	6.9748	7.0330	7.0323	7.1510	7.1503	7.2085	7.2079
5	10.955	10.954	11.145	11.145	11.238	11.237	11.425	11.425	11.516	11.515

В следующем примере рассматриваются собственные колебания жёстко закреплённой нагретой изотропной оболочки ( $E=210$  ГПа,  $\nu=0.3$ ,  $\rho=7850$  кг/м<sup>3</sup>,  $\alpha=12.6 \times 10^{-6}$  1/К). Распределение температуры по толщине оболочки принято однородным и задаётся в процентном отношении от максимальной температуры  $T_{cr}=306.4^\circ\text{C}$  ( $j=11$ ), при которой происходит потеря устойчивости. В Табл.3

приведены три первые собственные частоты колебаний  $\omega$  (Гц) в зависимости от различных значений температуры. Здесь в первой строке показана комбинация волновых чисел  $(j,m)$ , которой соответствует наименьшее в порядке следования значение частоты. Во второй строке приводятся данные, полученные в [12] с использованием пакета конечно-элементного анализа ANSYS ( $T_{cr}=305^\circ\text{C}$ ,  $j=11$ ). В третьей строке приведены результаты расчётов настоящей работы. Из представленных данных следует, что различие не превышает 3%.

Таблица 3.

Изменение трёх первых низших собственных частот  $\omega$  (Гц) изотропной цилиндрической оболочки от однородной по толщине температуры.

№	$0T_{cr}$	$0,5T_{cr}$	$0,75T_{cr}$	$0,8T_{cr}$	$0,85T_{cr}$	$0,9T_{cr}$	$0,95T_{cr}$
1	(8,1)	(8,1)	(9,1)	(9,1)	(9,1)	(9,1)	(10,3)
	421.78	345.63	297.47	285.50	272.08	256.21	232.80
	420.14	345.72	298.74	287.24	274.44	259.81	239.41
2	(9,1)	(9,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(9,1)
	423.32	346.76	298.50	287.74	276.32	264.00	235.37
	421.58	346.57	300.00	289.65	278.68	267.17	240.15
3	(7,1)	(7,1)	(10,1)	(10,1)	(10,1)	(10,1)	(11,3)
	446.33	375.73	327.51	314.53	298.36	275.16	247.35
	444.71	375.15	328.36	315.92	300.53	279.23	250.84

## 2.2. Собственные колебания нагретой оболочки.

Несмотря на значительное количество работ, направленных на исследование вибрационных характеристик конструкций, выполненных из ФГ-материала, в литературе не представлено детального исследования влияния температурных усилий на частотный спектр цилиндрических оболочек с различными комбинациями граничных условий в случае отсутствия дополнительной механической нагрузки. В качестве примера такого исследования можно привести работу [13], где осуществлён анализ конических оболочек, реализованный в трёхмерной постановке.

На рис.2а представлены зависимости минимальных частот колебаний  $\omega$  (Гц) от номера гармоники  $j$ , полученные при температуре  $T=300\text{K}$  для жёстко закрепленной ФГ-оболочки при различных значениях объёмных долей  $N$ . Здесь показана характерная картина, как правило, имеющая место при исследовании функционально-градиентного материала [11,14-18]. А именно, динамические характеристики конструкции практически всегда ограничены предельными значениями, полученными для чистых материалов. Другими словами, кривые частотного спектра, вычисленные с произвольным показателем объёмной доли  $N$ , располагаются между кривыми, полученными для керамики ( $N=0$ ) и металла ( $N=\infty$ ). Ещё одна особенность состоит в том, что номер гармоники с минимальным значением частоты остается неизменным и не зависит от свойств ФГ-материала.

Внешнее воздействие повышенной температуры, осуществляемое, например, в результате контакта с горячим потоком жидкости или газа, оказывает дестабилизирующее влияние на упругое тело, и может привести к потере устойчивости. Повышение температуры внешней среды приводит к снижению собственных частот колебаний конструкций. Это демонстрируется данными приведёнными на рис.2б. Здесь для жёстко закрепленной ФГ-оболочки ( $N=1$ )

показаны зависимости минимальных частот колебаний  $\omega$  (Гц) от номера гармоники  $j$ , полученные при различных значениях температуры  $T$  внешней поверхности. Из представленных данных видно, что последовательное повышение температуры приводит к постепенному снижению собственной частоты  $\omega$  до тех пор, пока для определённых гармоник заданная температура не вызывает резкое снижение частоты. Такая зависимость в целом определяет характер изменения собственных частот колебаний от температуры для оболочек с некоторыми комбинациями граничных условий.

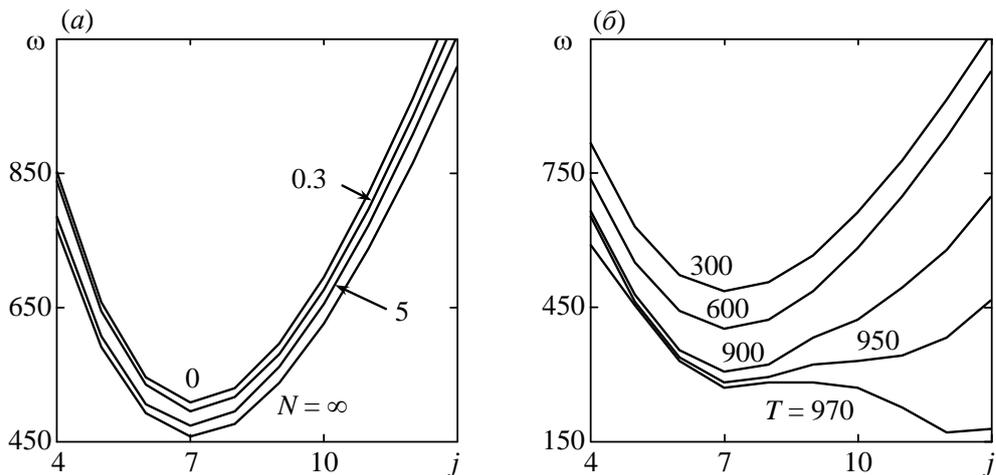


Рис.2. Зависимости минимальных частот колебаний  $\omega$  (Гц) от номера гармоники  $j$  для жёстко закреплённой ФГ-оболочки при различных температурах  $T$  (К): (а)  $T=300\text{K}$ ; (б)  $N=1$ .

На рис.3 и 4а приведены зависимости минимальных частот колебаний  $\omega$  (Гц) от температуры  $T$  (К), полученные для оболочек с разными вариантами граничных условий при различных значениях показателя объёмной доли  $N$ . Представленные результаты для оболочек с граничными условиями СС (рис.3а) и СФ (рис.3б) демонстрируют резкое снижение частоты при достижении некоторого температурного порога, обусловленного изменением гармоники с минимальной частотой колебаний.

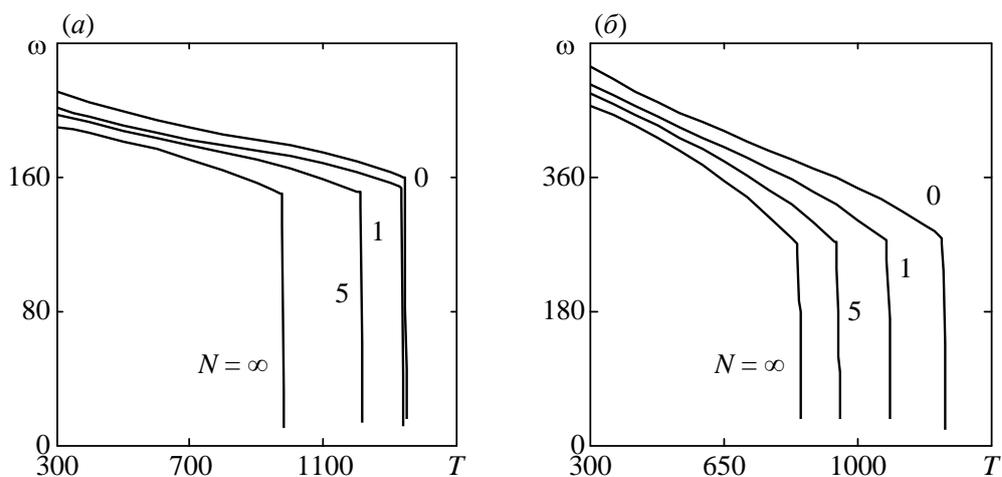


Рис.3. Зависимости минимальных частот колебаний  $\omega$  (Гц) от температуры  $T$  (К) на внешней стороне ФГ-оболочек с различными граничными условиями: (а) – CF; (б) – СС.

Так, для жёстко закрепленных оболочек при отсутствии температуры минимальное значение частоты достигается при  $j=7$  (рис.2а). При повышении температуры минимальная частота продолжает соответствовать этой гармонике до тех пор, пока при  $T=962.8$  К ( $N=1$ ) она не меняется на  $j=12$ , а при  $T=970.5$  К – на  $j=13$ , по которой и осуществляется потеря устойчивости в виде дивергенции (частота  $\omega$  становится равной нулю). Консольно закрепленные оболочки становятся неустойчивыми также на этой же гармонике.

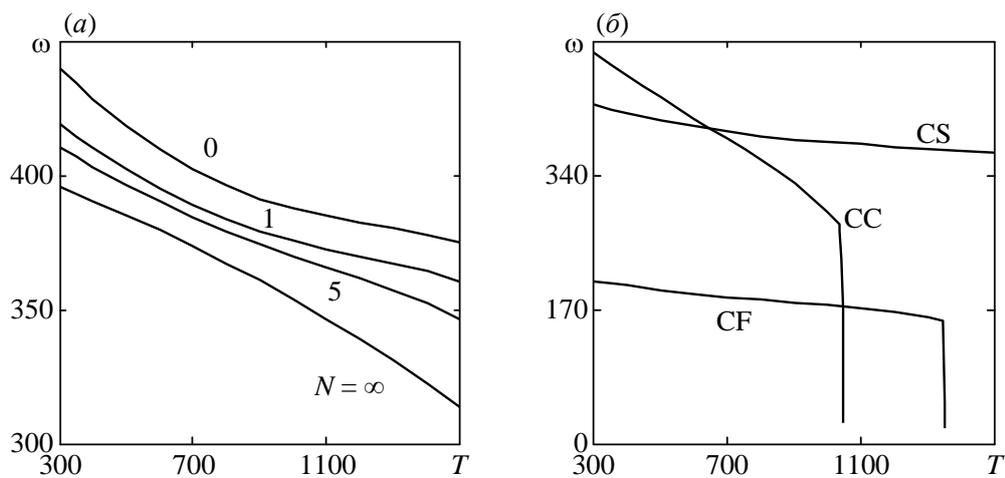


Рис.4. Зависимости минимальных частот колебаний  $\omega$  (Гц) от температуры  $T$  (К) на внешней стороне ФГ-оболочек: (а) – при разных значениях показателя объёмной доли  $N$  для граничных условий CS; (б) – с различными граничными условиями при  $N=0.3$ .

Для оболочек с граничными условиями CS и CF отсутствие закрепления в осевом направлении на правом краю оболочки соответствует нулевому начальному осевому усилию  $T_{11}^0$ , что в значительной степени оказывает влияние на зависимость частоты от температуры. Так, для консольно закрепленных оболочек (рис.4а) повышение температуры приводит к существенно меньшему снижению собственной частоты по сравнению с жёстко закрепленными оболочками, и, очевидно, только нормальное перемещение свободного края способствует возникновению неустойчивости. Тогда как, для оболочек с граничными условиями CS рост температуры приводит лишь к незначительному уменьшению частоты. Исходя из представленных данных, можно говорить о перманентной устойчивости оболочек с таким типом граничных условий по отношению к температурной нагрузке, так как возможные температуры, на которых будет осуществляться потеря устойчивости, превышают температуры плавления составляющих материалов. Сравнительный анализ влияния температуры на частотный спектр оболочек с различными граничными условиями представлен на рис.4б. Из этого рисунка видно, что жёстко закрепленные оболочки более чувствительны к нагреву, так как их потеря устойчивости осуществляется при существенно более низком значении температуры.

Отметим также, что для консольно закрепленных оболочек потеря устойчивости при  $N=0.3$  осуществляется при незначительно большем значении температуры ( $T_{cr}=1350.5$  К), чем при  $N=0$  ( $T_{cr}=1347.4$  К). Это означает, что при определённых условиях функционально-градиентный материал может обеспечивать более высокую термоупругую устойчивость по сравнению с «чистым» изотропным материалом. Причём это преимущество достигается только при наличии нелинейного распределения температуры по толщине. В любом другом случае имеет место зависимость, описанная на рис.2а.

### 2.3. Упругая устойчивость оболочек, нагруженных давлением.

Анализ упругой устойчивости, выполненный в этом разделе, необходим для того чтобы оценить величину внешнего давления  $p$ , возможную для задания в совместном исследовании с температурной нагрузкой.

На рис.5а показано изменение величин критического давления  $p$  (кПа) от номера гармоники  $j$ , полученных для консольно закрепленной ФГ-оболочки при различных значениях объёмных долей  $N$ . Характер поведения ФГ-материала при воздействии механической нагрузки является схожим с описанным ранее для случая собственных частот колебаний (рис.2а) за тем исключением, что с увеличением номера гармоники пропорционально возрастают границы устойчивости конструкций, имеющих различную жёсткость.

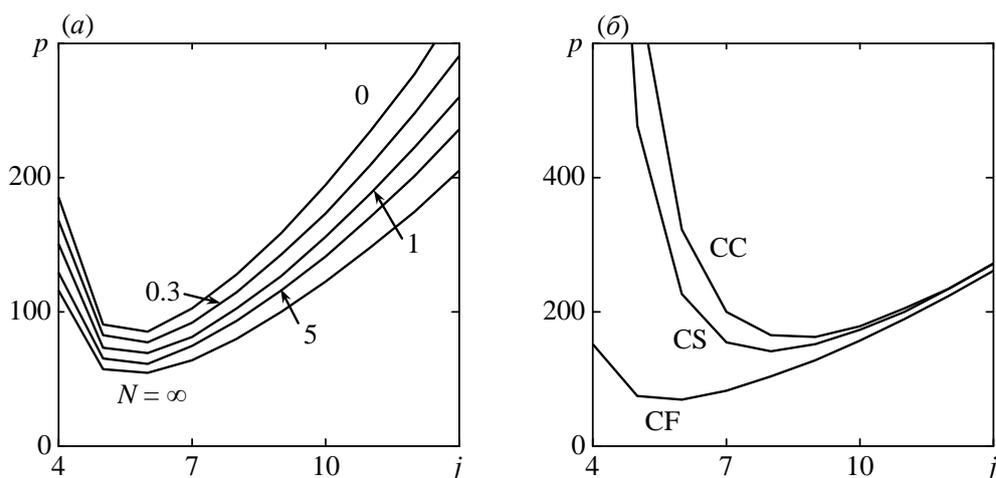


Рис.5. Изменение величины критического давления  $p$  (кПа) от номера гармоники  $j$  для ФГ-оболочки ( $T=300$  К): (а) – при разных значениях показателя объёмной доли  $N$  для граничных условий CF; (б) – с различными граничными условиями при  $N=1$ .

Сравнение границ упругой устойчивости для оболочек с различными комбинациями граничных условий при  $N=1$  представлено на рис.5б. С возрастанием номера гармоники различие в величине критического давления практически исчезает. Однако при достаточно малых  $j$  наблюдается существенная разница: CF –  $j_{cr}=6$ ,  $p_{cr}=68.3$  кПа; CS –  $j_{cr}=8$ ,  $p_{cr}=139.5$  кПа; CC –  $j_{cr}=9$ ,  $p_{cr}=162.8$  кПа. Таким образом, жёстко закрепленные оболочки обладают большей сопротивляемостью к воздействию внешнего давления.

### 2.4. Собственные колебания нагретой оболочки, нагруженной давлением.

На рис.6а показаны зависимости минимальных собственных частот колебаний  $\omega$  (Гц) нагруженной внешним давлением ( $p=-30$  кПа) жёстко

закрепленной ФГ-оболочки ( $N=1$ ) от номера гармоники  $j$ , полученные при различных значениях температуры  $T$ . Качественно эти зависимости не отличаются от тех, которые получены для ненагруженных оболочек (рис.2б). Однако заданное внешнее давление приводит к снижению собственных частот колебаний, что вызывает появление неустойчивости нагретых оболочек на некоторых гармониках при меньших значениях температуры, заданной на внешней поверхности.

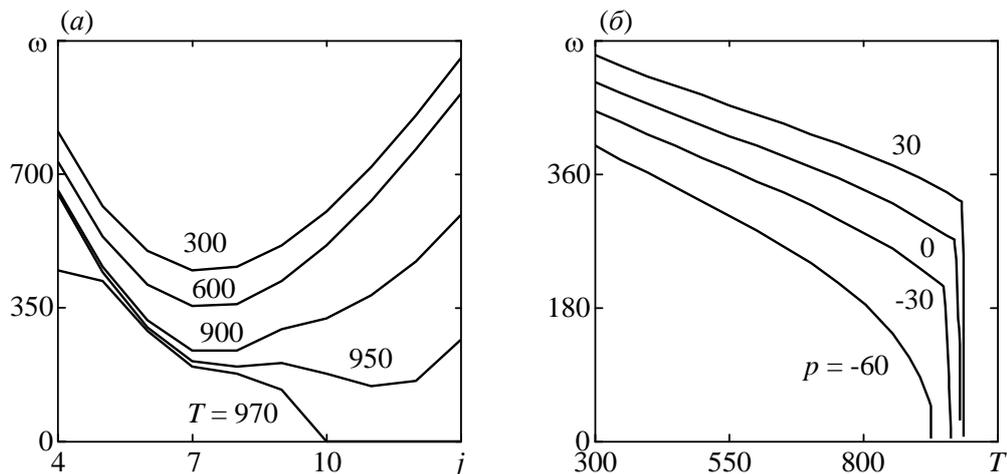


Рис.6. Зависимости минимальных частот колебаний  $\omega$  (Гц) от (а) номера гармоники  $j$  ( $p = -30$  кПа) и (б) температуры  $T$  (К) для жёстко закрепленной ФГ-оболочки ( $N=1$ ) при различных значениях температуры  $T$  и давления  $p$  (кПа).

На рис.6б и 7 приведены зависимости минимальных частот колебаний  $\omega$  (Гц) от температуры  $T$  (К), полученные для ФГ-оболочек ( $N=1$ ) с разными вариантами граничных условий, нагруженных внутренним и внешним давлением. Как и ожидалось, за счёт особенностей в поведении при различных видах нагружения, наиболее интересные результаты имеют место для жёстко закрепленных оболочек. Они заключаются в том, что на широком интервале изменения давления температура нагрева, приводящая к потере устойчивости, изменяется не так значительно.

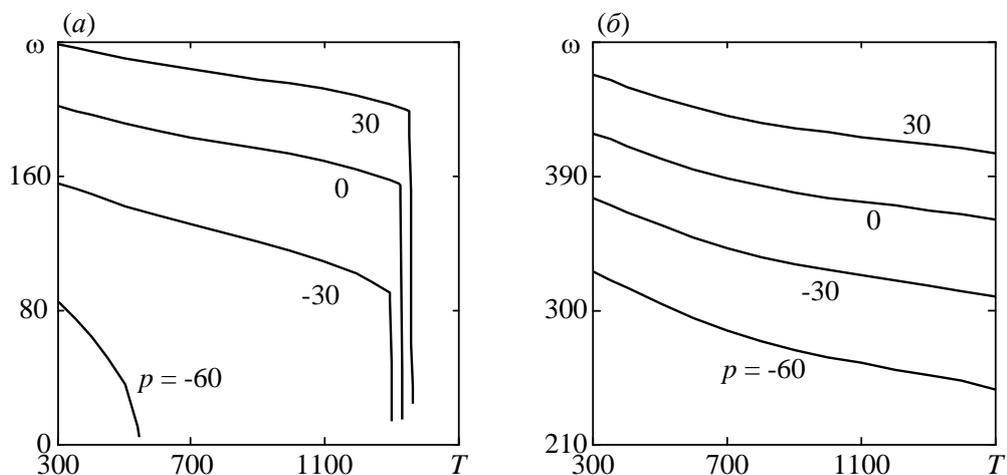


Рис.7. Зависимости минимальных частот колебаний  $\omega$  (Гц) от температуры  $T$  (К) для ФГ-оболочек ( $N=1$ ) при различных значениях давления  $p$  (кПа): (а) – CF; (б) – CS.

Для рассмотренных комбинаций граничных условий учёт внешнего давления приводит к смене формы, по которой происходит потеря устойчивости (с возрастанием давления изменяется критический номер гармоники). Кроме этого, снижение частоты колебаний при повышении внутреннего давления приводит к тому, что при его значительной величине резкое падение частоты изменяется на монотонное снижение.

В последнем примере представлены результаты расчётов, в которых рассматривается противоположная ситуация: ФГ-оболочка сначала нагревается до определенной температуры, а затем подвергается воздействию внутреннего давления. На рис.8 показаны зависимости частоты  $\omega$  от давления  $p$ , полученные для жёстко закрепленных и консольных оболочек, при различных значениях температур. Здесь заметна особенность присущая консольно закрепленным оболочкам: повышение температуры нагрева в меньшей степени оказывает влияние на частотный спектр, поэтому диапазон изменений величин критического давления существенно уже, чем для жёстко закрепленных оболочек. Имеющееся на частотных кривых нарушение гладкости обусловлено сменой окружной моды колебаний с минимальной частотой колебаний. Для обеих комбинаций граничных условий невысокая начальная температура оболочки не оказывает никакого влияния на конечную форму потери устойчивости, которая соответствует варианту, при котором температура не учитывается. Однако с повышением температуры критический номер гармоники приближается к значениям, на которых происходит потеря устойчивости без учёта механической нагрузки.

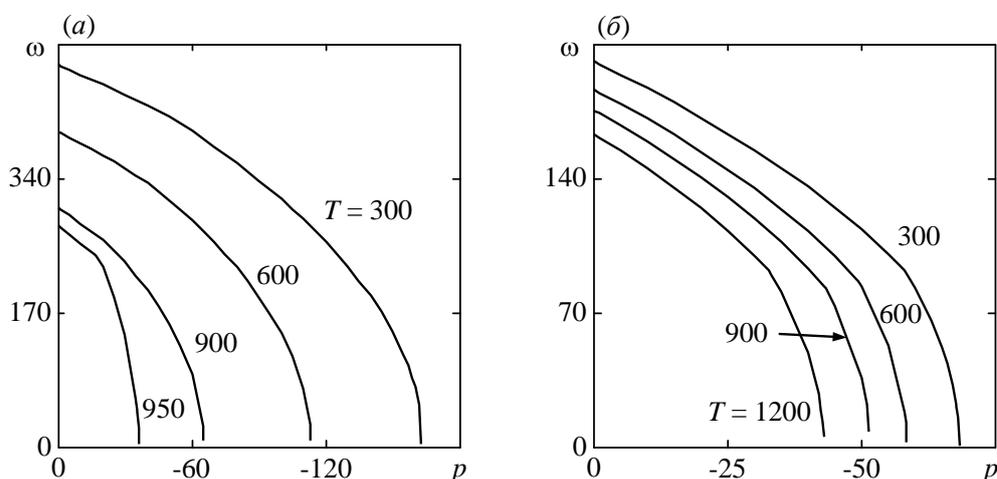


Рис.8. Зависимости минимальных частот колебаний  $\omega$  (Гц) от давления  $p$  (кПа) для ФГ-оболочек ( $N=1$ ) при различных температурах  $T$  (К): (а) – СС; (б) – CF.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представлены результаты численного анализа собственных частот колебаний и границ термоупругой устойчивости оболочек с различными вариантами граничных условий, выполненных из функционально-градиентных

материалов, свойства которых зависят от температуры. Показано, что механическая и температурная нагрузки оказывают дестабилизирующее влияние и приводят к снижению собственных частот колебаний вплоть до потери устойчивости дивергентного типа. Форма потери устойчивости в случае термомеханического воздействия зависит от конкретных значений температурных и механических усилий и не зависит от заданной консистенции составляющих функционально-градиентного материала. Для рассмотренных конфигураций собственные частоты колебаний и критические значения параметров термоупругой устойчивости функционально-градиентной оболочки, как правило, ограничены предельными значениями, полученными для конкретных составляющих материалов. Учёт данной особенности при проектировании инженерных конструкций позволяет подбирать такие значения показателя объёмных долей функционально-градиентного материала, которые будут обеспечивать требуемые эксплуатационные характеристики.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Reddy J.N., Chin C.D. Thermomechanical analysis of functionally graded cylinders and plates // *J. Therm. Stresses*. – 1998. – Vol.21. – N6. – P.593-626.
2. Birman V., Byrd L.W. Modeling and analysis of functionally graded materials and structures // *Appl. Mech. Rev.* – 2007. – Vol.60. – N5. – P.195-216.
3. Qu Y., Long X., Yuan G. et al. A unified formulation for vibration analysis of functionally graded shells of revolution with arbitrary boundary conditions // *Composites Part B: Eng.* – 2013. – Vol.50. – P.381-402.
4. Бочкарёв С.А., Лекомцев С.В. Исследование панельного флаттера круговых цилиндрических оболочек, выполненных из функционально-градиентного материала // *Вестник ПНИПУ. Механика*. – 2014. – №1. – С.57-75.
5. Kadoli R., Ganesan N. Buckling and free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells subjected to a temperature-specified boundary condition // *J. Sound Vib.* – 2006. – Vol.289. – N3. – P.450-480.
6. Haddadpour H., Mahmoudkhani S., Navazi H.M. Free vibration analysis of functionally graded cylindrical shells including thermal effects // *Thin Wall. Struct.* – 2007. – Vol.45. – N6. – P.591-599.
7. Sheng G.G., Wang X. Thermal vibration, buckling and dynamic stability of functionally graded cylindrical shells embedded in an elastic medium // *J. Reinf. Plast. Comp.* – 2008. – Vol.27. – N2. – P.117-134.
8. Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов. Справочник / Под ред. В.И. Мяченкова. – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
9. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // *Успехи математических наук*. – 1961. – Т.16. – №3. – С.171-174.
10. Praveen G., Chin C., Reddy J. Thermoelastic analysis of functionally graded ceramic-metal cylinder // *J. Eng. Mech.* – 1999. – Vol.125. – N11. – P.1259-1267.
11. Loy C.T., Lam K.Y., Reddy J.N. Vibration of functionally graded cylindrical shells // *Int. J. Mech. Sci.* – 1999. – Vol.41. – N3. – P.309-324.
12. Jeyaraj P., Padmanabhan C., Ganesan N. Vibro-acoustic response of a circular isotropic cylindrical shell under a thermal environment // *Int. J. Appl. Mech.* – 2011. – Vol.3. – N3. – P.525-541.

13. *Malekzadeh P., Fiouz A.R., Sobhrouyan M.* Three-dimensional free vibration of functionally graded truncated conical shells subjected to thermal environment // *Int. J. Pres. Ves. Pip.* – 2012. – Vol.89. – P.210-221.
14. *Pradhan S.C., Loy C.T., Lam K.Y. et al.* Vibration characteristics of functionally graded cylindrical shells under various boundary conditions // *Appl. Acoust.* – 2000. – Vol.61. – P.111-129.
15. *Iqbal Z., Naeem M.N., Sultana N.* Vibration characteristics of FGM circular cylindrical shells using wave propagation approach // *Acta Mech.* – 2009. – Vol.208. – N3-4. – P.237-248.
16. *Naeem M.N., Arshad S.H., Sharma C.B.* The Ritz formulation applied to the study of the vibration frequency characteristics of functionally graded circular cylindrical shells // *P. I. Mech. Eng. C-J. Mec.* – 2010. – Vol.224. – N1. – P.43-54.
17. *Arshad S.H., Naeem M.N., Sultana N. et al.* Effects of exponential volume fraction law on the natural frequencies of FGM cylindrical shells under various boundary conditions // *Arch. Appl. Mech.* – 2011. – Vol.81. – N8. – P.999-1016.
18. *Sobhani Aragh B., Hedayati H.* Static response and free vibration of two-dimensional functionally graded metal/ceramic open cylindrical shells under various boundary conditions // *Acta Mech.* – 2012. – Vol.223. – N2. – P.309-330.

*Поступила в редакцию 11 марта 2015 года.*

---

Сведения об авторах:

Бочкарёв Сергей Аркадьевич – к.ф.-м.н., с.н.с., ФГБУН Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия; e-mail: [bochkarev@icmm.ru](mailto:bochkarev@icmm.ru)

Лекомцев Сергей Владимирович – к.ф.-м.н., н.с., ФГБУН Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия; e-mail: [lekomtsev@icmm.ru](mailto:lekomtsev@icmm.ru)

Матвеев Валерий Павлович – д.т.н., акад., дир., ФГБУН Институт механики сплошных сред УрО РАН, г. Пермь, Россия; e-mail: [mvp@icmm.ru](mailto:mvp@icmm.ru)