

УДК 539.4

## ЗАДАЧА О ПРЯМОМ МАРТЕНСИТНОМ ПРЕВРАЩЕНИИ В ТОЛСТОСТЕННОЙ СФЕРЕ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОГО ДАВЛЕНИЯ<sup>1</sup>

Мовчан А.А., Левин А.С.\*

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия**\*Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова, г. Москва,  
Россия*

### РЕЗЮМЕ

Получено приближенное аналитическое решение задачи о напряженно-деформируемом состоянии толстостенной сферы из сплава с памятью формы (СПФ), материал которой первоначально находился в полностью аустенитном фазовом состоянии и претерпевает прямое мартенситное фазовое превращение под действием постоянного внутреннего (внешнего) давления. Найдено решение задачи о мартенситной неупругости такой же сферы, материал которой находился первоначально в состоянии полностью хаотического (сдвойникового) мартенсита. При решении пренебрегается упругими и температурными деформациями по сравнению с фазово-структурными. В задаче о фазовом превращении считается, что объемная доля мартенситной фазы в каждый момент времени распределена по материалу равномерно.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы; толстостенная сфера; прямое превращение; внутреннее (внешнее) давление; мартенситная неупругость; аналитическое решение

## DIRECT MARTENSITE TRANSFORMATION PROBLEM SOLUTION FOR THICK-WALLED SPHERE FROM SHAPE MEMORY ALLOYS UNDER AN ACTION OF UNIFORME PRESSURE

Movchan A.A., Levin A.S.\*

*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Science, Moscow, Russia**\*Moscow state university, Moscow, Russia*

### SUMMARY

An approximate analytical solution is obtained of the problem of stress-strain state of a thick-walled sphere from shape memory alloy (SMA), with austenite initial state undergoes direct martensitic phase transformation under the action of a uniform internal or external pressure. The analogous martensite inelasticity problem is solved as well for the case of total twinned martensite initial state of SMA. In the solution we neglect thermo-elastic strains compared to phase and structure strains. For solution the phase transformation problems we propose that martensite volume part parameter has uniform distribution in material.

**Key words:** shape memory alloys; thick-walled sphere; direct transformation; internal (external) pressure; martensite inelasticity; analytical solution

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, проект № 14-01-00189.

## ВВЕДЕНИЕ

Явление накопления деформаций прямого превращения, происходящее при охлаждении под действием некоторой нагрузки [1] часто используется для задания элементам из сплавов с памятью формы (СПФ) начальной фазово-структурной деформации, которая впоследствии будет сниматься при нагреве за счет явления памяти формы. С той же целью применяется процедура деформирования элементов из СПФ, находящихся в мартенситном фазовом состоянии под действием монотонно возрастающей нагрузки, вызывающая явление, называемое мартенситной неупругостью. Оба явления подробно исследованы экспериментально на простых статически определимых образцах с однородным напряженно-деформированным состоянием [1]. Количественное описание роста деформаций в таких процессах может быть получено непосредственным интегрированием системы определяющих соотношений для СПФ и не требует постановки и решения какой-либо краевой задачи механики деформируемого твердого тела.

Моделирование накопления деформаций прямого превращения или мартенситной неупругости для статически неопределимых систем требует решения соответствующих краевых задач, которые могут быть сформулированы в различных постановках [2]. Простейшими такими проблемами являются задачи изгиба, кручения, аналог задачи Ламе для толстостенной цилиндрической трубы из СПФ и аналогичная проблема для толстостенной сферы, находящихся под действием внутреннего и (или) внешнего давления. Задачи изгиба для элементов из СПФ рассматривались в [2-4], задачи кручения – в [5-8]. Задача о толстостенной цилиндрической трубе из СПФ, претерпевающей прямое или обратное термоупругое мартенситное превращение под действием внутреннего давления в различных постановках исследована в работах [9,10] и др.

Решения задач об упруго-пластическом равновесии полого шара приведены в [11,12]. Численные решения задачи о поведении тонкостенной сферы из СПФ при прямом термоупругом фазовом превращении в рамках модели линейного поведения СПФ при фазовых превращениях [13-15] и геометрически нелинейной постановке получены в [16-18]. В данной работе получены приближенные аналитические решения задач о деформировании толстостенной сферы из СПФ в режиме прямого термоупругого мартенситного фазового превращения или мартенситной неупругости в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [4,19-22].

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Рассматривается осесимметричная задача для полого толстостенного шара с внутренним радиусом  $a$  и внешним радиусом  $b$ , находящегося под действием одинакового для всех точек внутренней поверхности давления  $p_a$  и одинакового же для всех точек внешней поверхности давления  $p_b$ . В силу симметрии геометрии тела и действующей нагрузки напряженно-деформированное состояние тела является также сферически симметричным и в сферической системе координат  $(r, \varphi, \chi)$  выполняется

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi = \sigma_\chi, \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\chi, \sigma_{r\varphi} = \sigma_{r\chi} = \sigma_{\varphi\chi} = \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{r\chi} = \varepsilon_{\varphi\chi} = 0 \\ \sigma_i = |\sigma_\varphi - \sigma_r| \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3} |\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r| \quad (1.2)$$

Здесь  $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi, \varepsilon_\chi, \dots, \sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\chi \dots$  – компоненты тензоров деформаций и напряжений,  $\sigma_i, \varepsilon_i$  – интенсивность напряжений и деформаций.

Уравнения равновесия имеют вид

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + 2 \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (1.3)$$

Из (1.3) с учетом (1.1) получается

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \pm 2 \frac{\sigma_i}{r} \quad \text{при} \quad \sigma_\varphi \geq \sigma_r \quad (1.4)$$

Здесь и далее верхний знак соответствует выполнению неравенства  $\sigma_\varphi \geq \sigma_r$ , а нижний – случаю  $\sigma_\varphi < \sigma_r$ .

Из всех компонент смещений отлично от нуля только радиальное смещение  $w$ , причем компоненты деформации связаны с  $w$  соотношениями

$$\varepsilon_r = \frac{dw}{dr}, \quad \varepsilon_\chi = \varepsilon_\varphi = \frac{w}{r} \quad (1.5)$$

Для описания процесса деформирования СПФ используется система определяющих соотношений модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [4,19-22], в рамках которой тензор фазово-структурной деформации  $\varepsilon_{ij}^{phst}$  при прямом мартенситном фазовом превращении определяется соотношениями

$$\varepsilon_{ij}^{phst} = \frac{1}{3} \varepsilon_0 q \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^{phst'}, \quad d\varepsilon_{ij}^{phst'} = d\varepsilon_{ij}^{ph'} + d\varepsilon_{ij}^{st} \quad (1.6)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph'} = \left[ \frac{3}{2} \rho_D \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} F_1(\sigma_i) (1 - qf(q)) + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'} \right] dq \quad (1.7)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \frac{3}{2} \rho_D \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q_{st} F_2'(\sigma_i) d\sigma_i$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}^{phst}, \varepsilon_{ij}^{phst'}$  – тензор и девиатор фазово-структурной деформации,  $d\varepsilon_{ij}^{ph'}, d\varepsilon_{ij}^{st}$  – приращения девиатора фазово-структурной деформации за счет фазового и структурного переходов соответственно,  $q$  – объемная доля мартенситной фазы,  $\sigma_{ij}, \sigma_{ij}'$  – тензор и девиатор напряжений,  $\varepsilon_0$  – линейная деформация объемного эффекта реакции прямого мартенситного превращения,  $\rho_D$  – параметр материала, коррелирующий с интенсивностью кристаллографической деформации фазового превращения рассматриваемого СПФ,  $F_1(\sigma_i)$  – материальная функция, трактуемая как интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в представительном объеме СПФ (аустенитное фазовое состояние),  $F_2(\sigma_i)$  – аналогичная функция, но для мартенситного фазового состояния, штрих у функции  $F_2$  обозначает производную,  $f(q)$  – материальная функция, удовлетворяющая неравенству  $0 \leq f(q) \leq 1/q$ . Величина  $q_{st}$  обозначает объемную долю той части мартенсита рассматриваемого представительного объема СПФ, которая в данный момент испытывает структурный переход. Величина  $q_{st} = 0$  если  $d\sigma_i \leq 0$ . В случае, если

на протяжении всего процесса прямого превращения из аустенитного фазового состояния выполняется  $d\sigma_i > 0$ , то  $q_{st} = q$ , т.е. структурный переход происходит во всей мартенситной части представительного объема. Алгоритм вычисления  $q_{st}$  для промежуточных случаев подробно описан в [4].

Что касается функций распределения интенсивности микронапряжений, то для случая термоупругих фазовых переходов с диаграммами накопления деформаций прямого превращения согласуется функция распределения Лапласа [20]

$$F_1(\sigma_i) = \varphi_1(\sigma_i / \sigma_0), \quad \varphi_1(x) = \text{erf}\left(x/(\sqrt{2})\right), \quad \text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt \quad (1.8)$$

В то же время функция  $F_2(\sigma_i)$ , согласующаяся с диаграммами растяжения образцов TiNi в режиме мартенситной неупругости, неплохо соответствует функциям распределения Вейбулла

$$F_2(\sigma_i) = \varphi_2(\sigma_i / \sigma_0), \quad \varphi_2(x) = (1 - \exp(-x^\alpha)) \quad (1.9)$$

где  $\alpha > 1$  (обычно  $\alpha = 2 \div 5$ ) – параметр материала. Формула (1.9) для  $\alpha = 1$  также может в первом приближении использоваться для вычисления  $F_1$ .

В [21] установлено положение об активных процессах пропорционального нагружения, которое для рассматриваемого случая сводится к следующему. Пусть в процессе прямого мартенситного превращения из полностью аустенитного состояния происходит пропорциональное изменение компонент девиатора напряжений

$$\frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} = \text{const} \quad (1.10)$$

величина  $\sigma_i$  не убывает

$$d\sigma_i \geq 0 \quad (1.11)$$

и выполняется условие

$$F_1(\sigma_i) = F_2(\sigma_i) = F(\sigma_i) \quad (1.12)$$

В этом случае определяющие соотношения в приращениях (1.6), (1.7) могут быть проинтегрированы не зависимо от истории процесса и приводят к конечным соотношениям

$$\varepsilon_{ij}^{phst} = \left( \frac{1}{3} \varepsilon_0 \delta_{ij} + \frac{3}{2} \rho_D \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} F(\sigma_i) \right) q \quad (1.13)$$

В частном случае, когда в процессе прямого превращения величина  $\sigma_i$  не меняется, выполнение условия (1.12) не требуется и вместо функции  $F(\sigma_i)$  в (1.13) следует брать функцию  $F_1(\sigma_i)$ . Для случая пропорционального монотонного нагружения (1.10) в режиме мартенситной неупругости указанное положение также справедливо, причем для этого случая в (1.13) необходимо положить  $q = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 0$ ,  $F(\sigma_i) = F_2(\sigma_i)$ . В данной работе условия (1.10)-(1.12) предполагаются выполненными (точнее, их справедливость будет проверена по готовому решению). Поэтому в качестве определяющего соотношения при решении краевой задачи будет использовано уравнение (1.13) с указанными здесь модификациями.

## 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СМЕЩЕНИЙ, ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ

Находя из (1.13)  $\varepsilon_{ij}^{phst}$ , умножая полученное соотношение само на себя и сворачивая по обоим индексам, можно получить связь между интенсивностями фазово - структурных деформаций и напряжений

$$\varepsilon_i^{phst} = \rho_D q F(\sigma_i) \quad (2.1)$$

Согласно (1.6) в условиях пренебрежения упругими и температурными деформациями можно получить

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^{phst} + \varepsilon_0 q, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi^{phst} + \varepsilon_0 q \quad (2.2)$$

Здесь штрих обозначает компоненту девиатора, слагаемые  $\varepsilon_0 q$  соответствуют объемному эффекту реакции фазового превращения. Складывая между собой зависимости (2.2) для всех трех нижних индексов с учетом (1.5) можно получить

$$\frac{dw}{dr} + \frac{2w}{r} = 3\varepsilon_0 q \quad (2.3)$$

Общее решение (2.3) для  $w = w(q, r)$  записывается в виде

$$w = r q \varepsilon_0 + \frac{C(q)}{r^2}, \quad \varepsilon_r = q \varepsilon_0 - \frac{2C(q)}{r^3}, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\chi = q \varepsilon_0 + \frac{C(q)}{r^3} \quad (2.4)$$

Здесь  $C(q)$  – произвольная функция параметра фазового состава, подлежащая определению из других условий. Для компонент девиатора деформаций (обозначены штрихами) и интенсивности деформаций из (2.4), (1.2) получается

$$\varepsilon_\chi' = \varepsilon_\varphi' = \frac{C(q)}{r^3}, \quad \varepsilon_r' = -\frac{2C(q)}{r^3}, \quad \varepsilon_i = \frac{2|C(q)|}{r^3} \quad (2.5)$$

Пренебрегая упругими деформациями, можно считать, что  $\varepsilon_i = \varepsilon_i^{phst}$ . Тогда из (2.1) и последнего соотношения (2.5) получается

$$\frac{2|C(q)|}{r^3} = \rho_D q F(\sigma_i) \quad (2.6)$$

Функция  $F$ , как интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений, равна нулю для отрицательных значений аргумента (поскольку интенсивность напряжений меньше нуля быть не может) и является неотрицательной и неубывающей. Считая ее монотонно возрастающей и непрерывной можно утверждать, что у нее есть монотонно возрастающая и непрерывная обратная функция, обозначаемая как  $F^{-1}$ . Тогда из (2.6) следует

$$\sigma_i = F^{-1} \left( \frac{2|C(q)|}{\rho_D q r^3} \right) \quad (2.7)$$

Функция  $F^{-1}$  определена только для неотрицательных значений аргумента и принимает только неотрицательные значения. Подстановка (2.7) в (1.4) позволяет получить обыкновенное дифференциальное уравнение для  $\sigma_r$

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \pm \frac{2}{r} F^{-1} \left( \frac{2|C(q)|}{\rho_D q r^3} \right) \quad (2.8)$$

Выбор знака описан после формулы (1.4).

Интегрируя уравнения (2.8) при начальном условии  $\sigma_r(a) = -p_a$ , получаем

$$\sigma_r = -p_a \pm 2 \int_a^r F^{-1} \left( \frac{2|C(q)|}{\rho_D q \xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi} \quad (2.9)$$

Здесь предполагается, что соотношение между величинами  $\sigma_\varphi$  и  $\sigma_r$  на отрезке  $r \in [a, b]$  не меняется, что далее будет проверено по готовому решению. Удовлетворяя с помощью (2.9) граничному условию  $\sigma_r(b) = -p_b$ , получаем

$$\int_a^b F^{-1} \left( \frac{2|C(q)|}{\rho_D q \xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi} = \pm \frac{p_a - p_b}{2} \quad (2.10)$$

Поскольку значения функции  $F^{-1}$  неотрицательны, то в формулах (2.8), (2.9) и (2.10) следует выбирать знак плюс, если  $p_a > p_b$  и знак минус при  $p_a < p_b$ . Таким образом должны быть справедливы неравенства

$$\sigma_\varphi > \sigma_r \quad \text{при } p_a > p_b \quad (2.11)$$

$$\sigma_\varphi < \sigma_r \quad \text{при } p_a < p_b \quad (2.12)$$

выполнение которых будет проверяться по готовому решению. Далее нагружение (2.11) будет условно называться случаем внутреннего давления, а нагружение (2.12) - случаем внешнего давления. Уравнение (2.10) принимает вид

$$\int_a^b F^{-1} \left( \frac{2|C(q)|}{\rho_D q \xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi} = \frac{|p_a - p_b|}{2} \quad (2.13)$$

Алгебраическое уравнение (2.13) служит для определения функции  $C(q)$ .

Обозначая

$$\lambda = \lambda(q) = 2|C(q)|/(\rho_D q) \quad (2.14)$$

можно утверждать, что для каждого значения  $\xi$  подынтегральная функция левой части (2.13) является возрастающей функцией  $\lambda$  (поскольку  $F^{-1}$  является возрастающей функцией). Следовательно, и вся левая часть (2.13) монотонно возрастает с ростом  $\lambda$ . Правая часть (2.13) по условию задачи является постоянной величиной. Следовательно, уравнение (2.13) имеет единственное решение для величины  $\lambda$ , которое далее обозначается как  $\lambda^*$ . Тогда в силу (2.14) получается  $|C(q)| = \lambda^* \rho_D q / 2$ .

Таким образом, доказано, что функция  $|C(q)|$  пропорциональна  $q$ , причем коэффициент  $\lambda^*$  определяется из алгебраического уравнения

$$\int_a^b F^{-1} \left( \frac{\lambda^*}{\xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi} = \frac{|p_a - p_b|}{2} \quad (2.15)$$

После определения величины  $\lambda^*$  из (2.15) интенсивность напряжений определяется по формуле, следующей из (2.7)

$$\sigma_i = F^{-1} \left( \frac{\lambda^*}{r^3} \right) \quad (2.16)$$

Согласно (2.15), (2.16) величина  $\lambda^*$  и распределение интенсивности напряжений по радиусу одинаковы для случаев внешнего и внутреннего давления при условии равенства величин  $|p_a - p_b|$ . Этот вывод является следствием неучета в рамках используемой модели поведения СПФ свойства разносопротивляемости [23] (зависимости поведения этих материалов от вида напряженного состояния). Согласно (2.16) в силу монотонного возрастания функции  $F^{-1}$ , интенсивность напряжений, как для случая внутреннего, так и для случая внешнего давления

достигает максимального значения на внутренней поверхности сферы и монотонно убывает с ростом  $r$ .

Распределение радиальных и угловых напряжений, согласно (2.9), (2.16) и (1.1) находится по формулам

$$\sigma_r = -p_a \pm 2 \int_a^r F^{-1} \left( \frac{\lambda^*}{\xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi}, \quad \sigma_\varphi = -p_a \pm 2 \int_a^r F^{-1} \left( \frac{\lambda^*}{\xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi} \pm F^{-1} \left( \frac{\lambda^*}{r^3} \right) \quad (2.17)$$

Здесь верхний знак соответствует случаю внутреннего, а нижний – внешнего давления. Согласно (2.17) условия (2.11), (2.12) выполняются.

Интенсивность напряжений (2.16) и компоненты напряжений (2.17) не зависят от параметра фазового состава  $q$ , т.е. не меняются в процессе фазового перехода. Поскольку напряжения постоянны, то для справедливости положения об активных процессах пропорционального нагружения нет необходимости требовать справедливости условия (1.12), а в качестве функции  $F$  следует брать  $F_1$ . В силу постоянства интенсивности напряжений условие (1.11) заведомо выполняется. Поскольку компоненты тензора напряжений в процессе фазового перехода неизменны, то и условие пропорциональности нагружения (1.10) выполняется. Таким образом, выполнены все условия справедливости положения об активных процессах пропорционального нагружения, и, следовательно использование следствия из этого положения (1.13) вполне законно.

Используя покомпонентную формулировку положения об активных процессах пропорционального нагружения (1.13) можно показать, что знак  $C(q)$  совпадает со знаком разности  $\sigma_\varphi - \sigma_r$ , т.е.  $C(q) = \pm \lambda^* \rho_D q / 2$ , где знак плюс соответствует случаю внутреннего давления, а знак минус – случаю внешнего давления. В результате из (2.4), (2.5) получается

$$w = r q \varepsilon_0 \pm \frac{\lambda^* \rho_D q}{2r^2}, \quad \varepsilon_r = q \varepsilon_0 \mp \frac{\lambda^* \rho_D q}{r^3}, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\chi = q \varepsilon_0 \pm \frac{\lambda^* \rho_D q}{2r^3}, \quad \varepsilon_i = \frac{\lambda^* \rho_D q}{r^3} \quad (2.18)$$

Таким образом, смещения и все компоненты деформации в каждой точке сферы пропорциональны  $q$ . При фиксированном значении  $q$ , независимо от соотношения между величинами нагрузок  $p_a$  и  $p_b$  интенсивность деформаций убывает с ростом  $r$  и максимальна на внутренней поверхности сферы.

Далее удобно перейти к безразмерным переменным

$$\eta = \frac{r}{a}, \quad v = \frac{w}{a}, \quad \beta = \frac{b}{a}, \quad s_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_0}, \quad s_\varphi = \frac{\sigma_\varphi}{\sigma_0}, \quad s_r = \frac{\sigma_r}{\sigma_0}, \quad \gamma = \frac{\lambda^*}{a^3}, \quad P_a = \frac{p_a}{\sigma_0}, \quad P_b = \frac{p_b}{\sigma_0}, \quad P = \frac{|P_a - P_b|}{2}$$

Далее функция распределения интенсивности микронапряжений представляется в виде:  $F(\sigma_i) = \varphi(s_i)$ ,  $F^{-1}(\varepsilon) = \sigma_0 \varphi^{-1}(\varepsilon)$ ,  $\sigma_0$  – параметр материала, имеющий размерность напряжения. В безразмерных переменных полученное ранее решение (2.16)-(2.18) принимает вид

$$\int_1^\beta \varphi^{-1} \left( \frac{\gamma}{\eta^3} \right) \frac{d\eta}{\eta} = P \quad (2.19)$$

$$s_i = \varphi^{-1} \left( \frac{\gamma}{\eta^3} \right), \quad s_r = -P_a \pm 2 \int_1^\eta \varphi^{-1} \left( \frac{\gamma}{\xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi},$$

$$s_\varphi = -P_a \pm 2 \int_1^\eta \varphi^{-1} \left( \frac{\gamma}{\xi^3} \right) \frac{d\xi}{\xi} \pm s_i \quad (2.20)$$

Выражения для безразмерных смещений и деформаций, соответствующие (2.18) имеют вид

$$\begin{aligned} \nu &= \eta q \varepsilon_0 \pm \frac{\gamma \rho_D q}{2\eta^3}, \quad \varepsilon_r = q \varepsilon_0 \mp \frac{\gamma \rho_D q}{\eta^3}, \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\chi = q \varepsilon_0 \pm \frac{\gamma \rho_D q}{2\eta^3}, \\ \varepsilon_i &= \frac{\gamma \rho_D q}{\eta^3} \end{aligned} \quad (2.21)$$

### 3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНЫХ НАГРУЗОК

Легко видеть, что функция  $\varphi^{-1}$  определена на полуинтервале  $[0,1)$ , является монотонно возрастающей, причем  $\lim_{x \rightarrow 1} \varphi^{-1}(x) = +\infty$ . Левая часть (2.19) монотонно возрастает с ростом параметра  $\gamma$ . Следовательно, наибольшее значение параметра нагрузки  $P$  может быть получено для такого наибольшего значения  $\gamma$ , для которого аргумент функции  $\varphi^{-1}$ , стоящей в левой части (2.19) для всех значений  $\eta \in [1, \beta]$  принадлежит полуинтервалу  $[0,1)$ , или его верхней границе, при условии сходимости соответствующего несобственного интеграла. Очевидно, что точная верхняя грань таких значений  $\gamma$  равна 1. Следовательно, точная верхняя грань  $P^*$  значений  $P$  определяется по формуле

$$P^* = \int_1^\beta \varphi^{-1}\left(\frac{1}{\eta^3}\right) \frac{d\eta}{\eta} \quad (3.1)$$

Согласно (3.1) значения предельных нагрузок для случаев внутреннего и внешнего давления одинаковы. Этот результат получен в случае отсутствия учета зависимости диаграммы деформирования СПФ от вида напряженного состояния [23,24], а также при отсутствии учета возможности потери устойчивости полой сферы из СПФ, вызванной прямым превращением под действием внешнего давления [16-18,25].

На рис.1 приведены графики зависимости безразмерной предельной нагрузки  $P^*$  от безразмерного параметра  $\beta$  толщины сферического слоя из СПФ. В качестве функции  $\varphi$  для кривых №№ 1, 2 и 3 используется функция распределения Вейбулла (1.9) со значениями параметров  $\alpha$ , равными номеру соответствующей кривой. Кривая 4 соответствует функции распределения Лапласа (1.8). Таким образом, кривые 1 и 4 соответствуют процессу накопления деформаций прямого фазового превращения, а кривые 2 и 3 – деформированию в режиме мартенситной неупругости.

Как видно предельная нагрузка рассматриваемого типа растет с насыщением с ростом параметра относительной толщины  $\beta$ . С ростом значения параметра  $\alpha$  предельные нагрузки при прочих равных условиях также растут. Предельные нагрузки для процесса деформирования в режиме мартенситной неупругости больше, чем для деформирования в рамках процесса прямого термоупругого мартенситного перехода. Чем меньше значение  $\alpha$  тем быстрее происходит выход на асимптотическое значение  $P^*$  с ростом  $\beta$ . Для случая прямого фазового превращения приближение к асимптотическому значению происходит быстрее, чем для деформирования в режиме мартенситной неупругости.

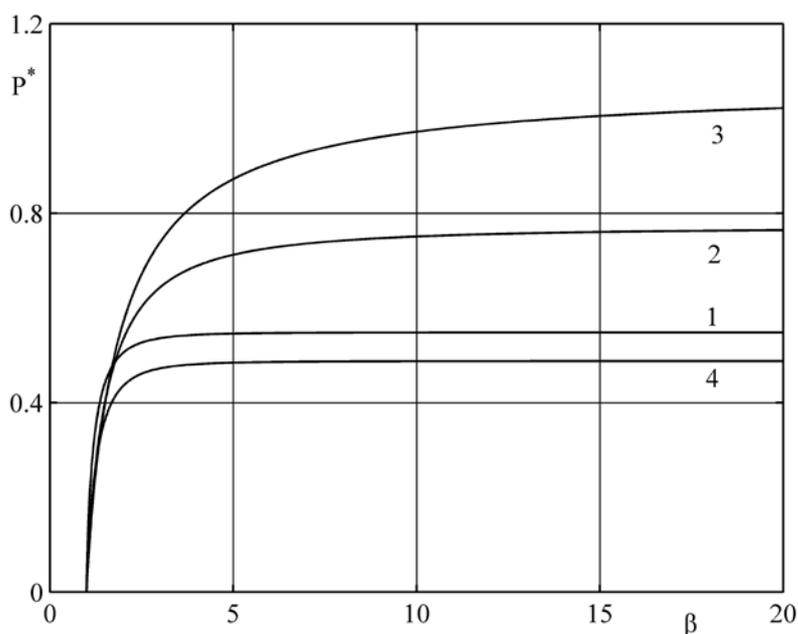


Рис.1.

Найденные предельные нагрузки носят условный характер, поскольку они соответствуют очень высоким значениям интенсивности напряжений, при которых СПФ помимо фазово-структурных испытывают еще и обычные пластические деформации, возможность которых в приведенном выше решении не учитывается. Известно, с другой стороны [26], что при появлении пластических деформаций функциональные свойства СПФ ухудшаются, поэтому могут быть введены предельные нагрузки второго типа, достижение которых соответствует началу пластического деформирования, т.е. выполнению условия

$$\sigma_i = \sigma_s \quad (3.2)$$

где  $\sigma_s$  – обычный (дислокационный) предел текучести СПФ. Величина  $\sigma_s$  имеет различные значения для аустенитного и мартенситного состояния СПФ, а для каждого из этих состояний зависит еще и от температуры [27]. В данной работе задача рассматривается в упрощенной постановке, когда эти изменения не учитываются и величина  $\sigma_s$  считается постоянной.

Интенсивность напряжений достигает максимальное значение при  $r = a$  ( $\eta = 1$ ). Используя (2.20) при  $\eta = 1$  и (3.2) для значения параметра  $\gamma = \gamma_s$ , при котором начинаются пластические деформации, можно получить

$$\gamma_s = \varphi(s), \quad s = \sigma_s / \sigma_0 \quad (3.3)$$

Подставляя найденное предельное значение  $\gamma_s$  (3.3) в (2.19) для соответствующей безразмерной предельной нагрузки  $P_s$  получаем

$$P_s = \int_1^\beta \varphi^{-1} \left( \frac{\varphi(s)}{\eta^3} \right) \frac{d\eta}{\eta} \quad (3.4)$$

В силу монотонного возрастания как функции  $\varphi$ , так и  $\varphi^{-1}$  предельная нагрузка  $P_s$  монотонно возрастает с ростом  $s$ , причем при  $s \rightarrow +\infty$   $P_s \rightarrow P^*$ .

На рис.2 приведены (пунктирные линии) графики зависимости (3.4) предельной нагрузки  $P_s$  от параметра толщины  $\beta$ , найденные для функции

распределения Вейбулла (1.9) при  $\alpha = 2$  для значений параметра  $s = 0.5$  (кривая 1),  $s = 1$  (кривая 2),  $s = 2$  (кривая 3). Кривая 4 соответствует предельной нагрузке первого типа, т.е.  $s = +\infty$ . Эти данные соответствуют деформированию сферы в режиме мартенситной неупругости. Сплошные линии обозначают аналогичные кривые, но построенные для функции распределения Лапласа (1.8), т.е. для деформирования в режиме накопления деформаций прямого превращения. Согласно рис.2, критические нагрузки  $P_s$  для деформирования в режиме мартенситной неупругости при прочих равных условиях существенно выше, чем для деформирования в режиме прямого фазового превращения.

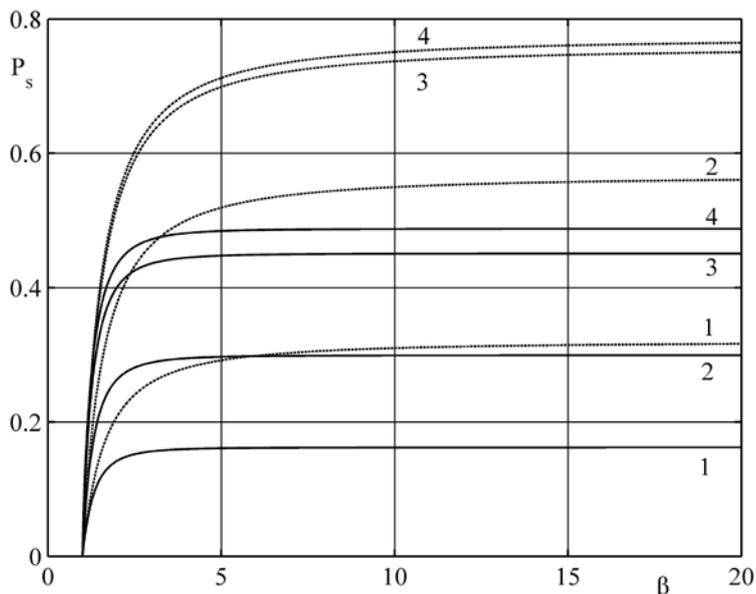


Рис.2.

Согласно (3.3) и (2.21) безразмерные смещения и деформации в предельном состоянии второго типа определяются по аналитическим формулам

$$\nu = \eta q \varepsilon_0 \pm \frac{\varphi(s) \rho_D q}{2\eta^3}, \varepsilon_r = q \varepsilon_0 \mp \frac{\varphi(s) \rho_D q}{\eta^3}, \varepsilon_\phi = \varepsilon_\chi = q \varepsilon_0 \pm \frac{\varphi(s) \rho_D q}{2\eta^3}, \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_i = \frac{\varphi(s) \rho_D q}{\eta^3}$$

Формулы (3.5) дают максимальные (по модулю) значения смещений и деформаций, генерируемые при прямом превращении до значения объемной доли мартенситной фазы  $q$  и полностью возвращаемые при последующем обратном переходе. При этом в качестве функции  $\varphi$  надо использовать выражение (1.8), либо (1.9) при  $\alpha = 1$ . Аналогичные величины для деформирования в режиме мартенситной неупругости могут быть получены из формул (3.5), если положить в них  $q = 1$ , не учитывать первые слагаемые, связанные с объемным эффектом реакции фазового перехода и использовать в качестве функции  $\varphi$  выражения (1.9) при  $\alpha = 2 \div 5$ .

#### 4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СМЕЩЕНИЙ, ДЕФОРМАЦИЙ И НАПРЯЖЕНИЙ

На рис.3 приведены графики распределения по безразмерному значению радиуса  $\eta = r/a$  относительных значений радиальных смещений  $\nu$  для случая

действия внутреннего давления. Задача решалась для функции распределения Лапласа (1.8) т.е. для деформирования при прямом термоупругом фазовом превращении. Пара кривых №1 соответствует предельной нагрузке  $P^*$  (первого типа), пара № 2 – половине, а пара № 3 – одной десятой от предельной нагрузки. Пунктирные кривые в каждой паре построены без учета объемного эффекта реакции фазового перехода, сплошные линии с учетом объемного эффекта. Как видно, учет объемного эффекта реакции несколько увеличивает смещение, причем влияние объемного эффекта падает с ростом приложенной нагрузки, но растет с ростом значения радиуса. Для самого малого из рассмотренных значений внутреннего давления ошибка в случае пренебрежения объемным эффектом реакции фазового превращения превосходит саму величину смещения, найденную без учета объемного эффекта.

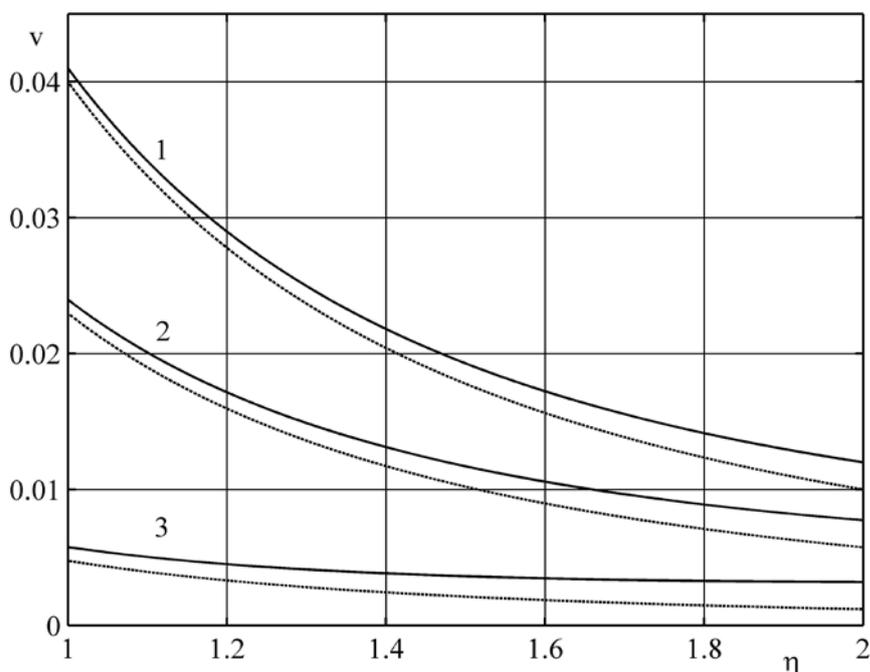


Рис.3.

На рис.4 сравниваются между собой смещения, определенные с использованием функции распределения Лапласа (сплошные линии) и функции распределения Вейбулла при  $\alpha = 2$  (пунктирные линии) для внутреннего давления, равного  $P^*$  (пара кривых № 1), а также составляющего  $0.8 P^*$  (№ 2),  $0.5 P^*$  (№ 3) и  $0.2 P^*$  (№4). Сплошные кривые соответствуют накоплению деформации полного прямого фазового превращения. Поэтому при их построении учтен объемный эффект реакции фазового перехода. При построении пунктирных кривых, соответствующих деформированию в режиме мартенситной неупругости, объемный эффект не учитывается. Согласно данным рис.4 при прочих равных условиях радиальные смещения, возникающие при полном прямом термоупругом фазовом превращении превосходят аналогичные величины, накапливаемые в процессе деформирования в режиме мартенситной неупругости. Разница между этими смещениями достаточно мала (сводится к объемному эффекту реакции фазового перехода) для внутреннего давления, равного предельному значению  $P^*$ , но растет с уменьшением действующей нагрузки. Для нагрузки, равной  $0.2 P^*$

смещение внутренней поверхности при полном прямом превращении почти в 5 раз больше, чем при нагружении в режиме мартенситной неупругости.

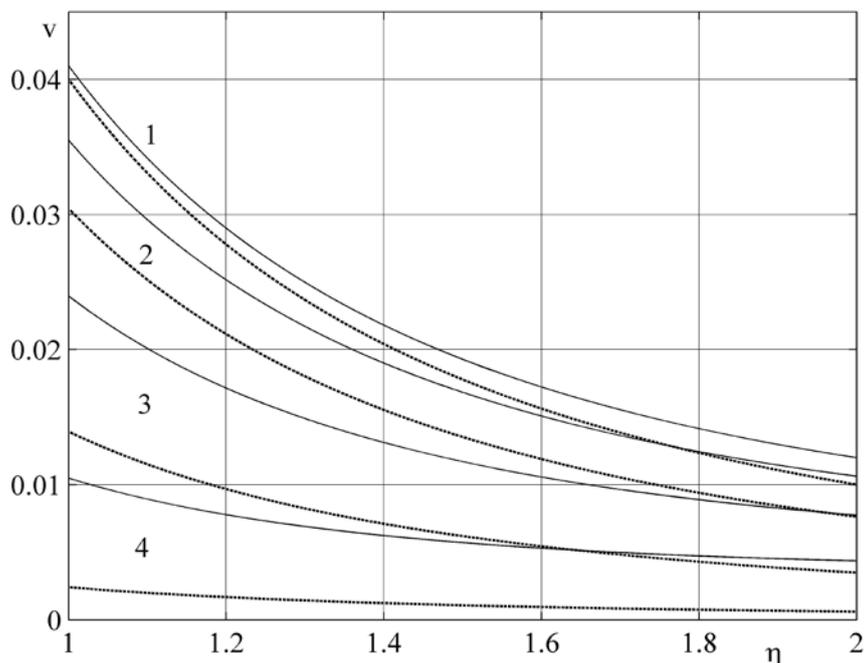


Рис.4.

На рис.5 изображены графики распределения по радиусу радиальных напряжений (нижняя серия кривых), угловых напряжений (средняя серия кривых) и интенсивности напряжений (верхняя серия кривых). Кривые каждой серии снизу вверх соответствуют значениям параметра нагрузки  $\zeta = 0.5, 0.6, \dots, 0.9$ , где  $P = \zeta P^*$ . Решение соответствует действию внутреннего давления. Расчет проводился для функции распределения Вейбулла, т.е. результаты соответствуют деформированию в режиме мартенситной неупругости. Как видно, получаемое распределение угловых напряжений мало похоже на распределение напряжений как в упругой, так и в упруго-идеально-пластической задачах [11]. Для малых нагрузок угловые напряжения монотонно возрастают с ростом радиальной координаты. Для достаточно высоких значений внутреннего давления, близких к предельным, угловые напряжения максимальны на внутренней поверхности, сначала убывают с ростом радиуса, далее, достигнув минимума, начинают медленно возрастать. Радиальные напряжения являются сжимающими, а угловые – растягивающими. Интенсивность напряжений имеет максимум на внутренней поверхности и монотонно убывает с ростом радиуса. Аналогичные графики для случая деформирования в режиме мартенситной неупругости под действием внешнего давления построены на рис.6. Здесь в нижней серии кривых, соответствующей распределению угловых напряжений, параметр нагрузки  $\zeta$  меняется сверху вниз в последовательности  $\zeta = 0.5, 0.6, \dots, 0.9$ . Для средней и верхней серии кривых, соответствующих радиальному напряжению и интенсивности напряжений такое же изменение  $\zeta$  имеет место снизу вверх. В данном случае как радиальные, так и угловые напряжения являются сжимающими, а интенсивность напряжений.

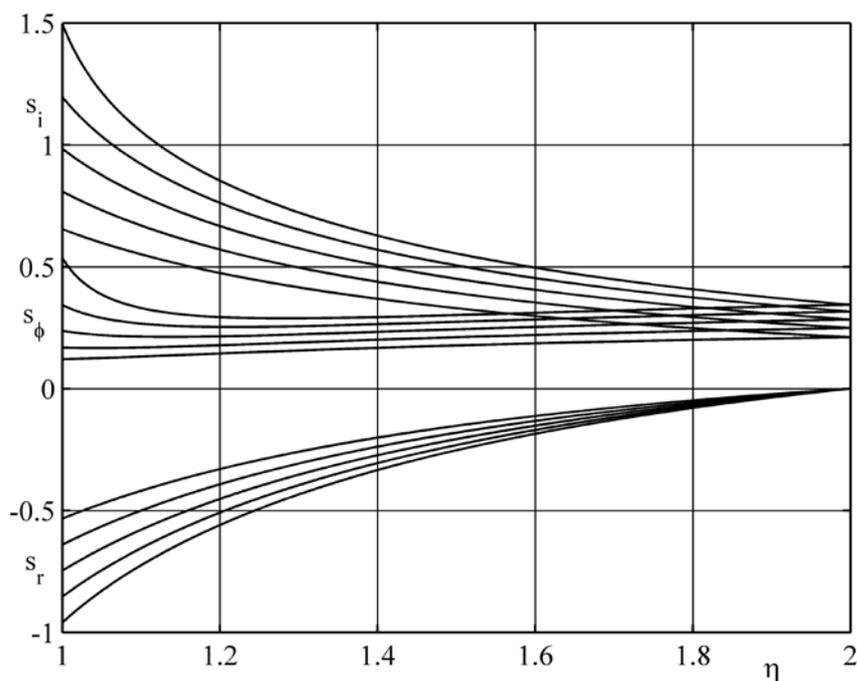


Рис.5.

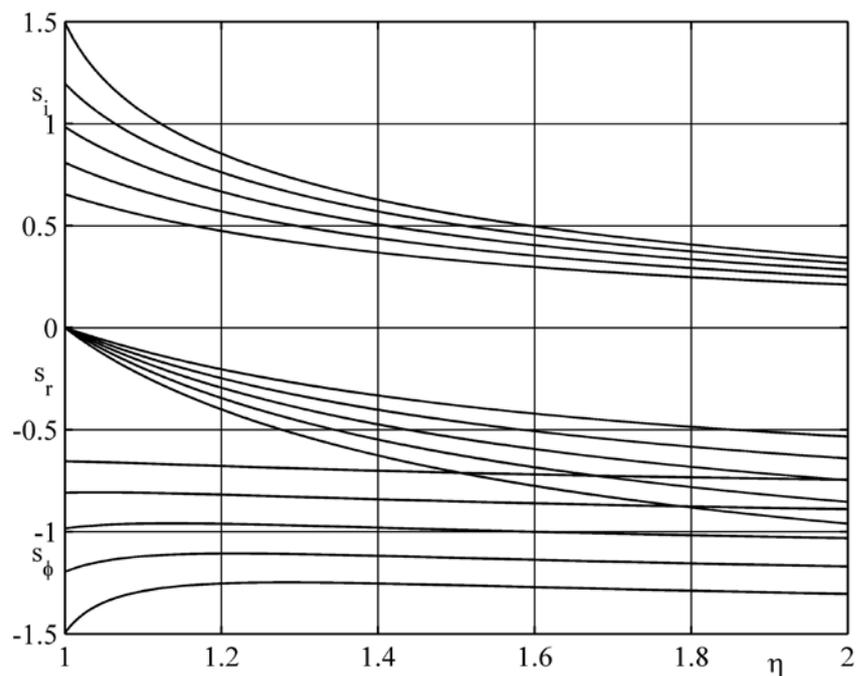


Рис.6.

На рис.7 сравниваются между собой распределения напряжений по радиусу для случаев использования функции распределения Вейбулла при  $\alpha = 2$  – пунктирные линии (случай мартенситной неупругости) и функции Лапласа – сплошные линии (случай накопления деформации прямого превращения).

Расчет проведен для малого внутреннего давления  $P = 0.2P^*$  и толстой сферы  $\beta = 2$ . Пара кривых №1 соответствует радиальному напряжению, пара №2 – кольцевому напряжению, пара №3 – интенсивности напряжений. Как видно, распределения напряжений, соответствующие прямому фазовому превращению,

существенно отличаются от распределений, соответствующих деформированию в режиме мартенситной неупругости. В частности, если для случая прямого превращения угловые напряжения убывают с ростом радиальной координаты, то для случая мартенситной неупругости наблюдается их возрастание.

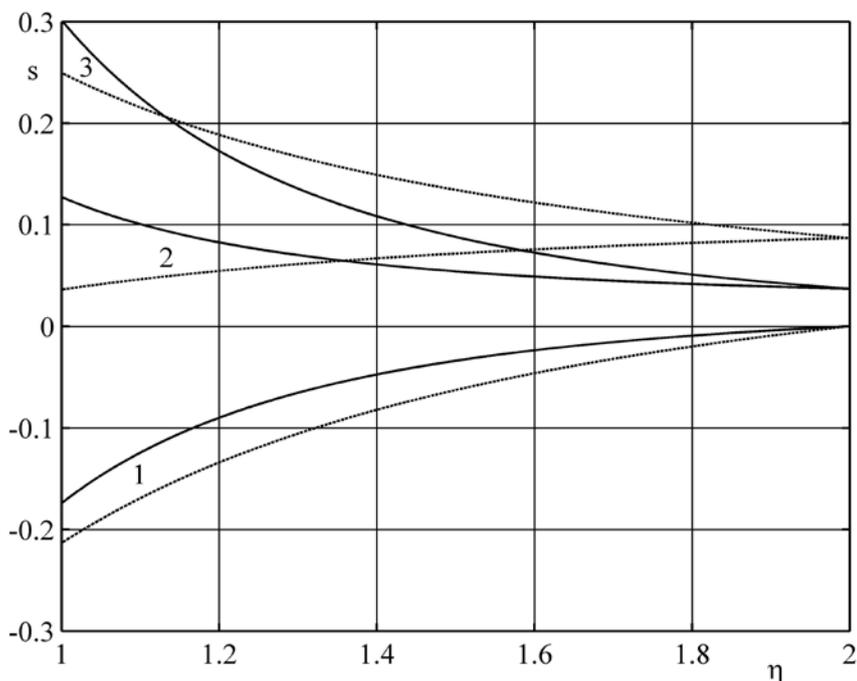


Рис.7.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены аналитические решения несвязной задачи о деформировании толстостенной сферы из СПФ, претерпевающей прямое термоупругое фазовое превращение под действием постоянных внутреннего и внешнего давления. Решена задача о деформировании сферы из СПФ, находящемся в мартенситном фазовом состоянии и нагруженной монотонно возрастающим внешним или внутренним давлением. Решения являются точными в рамках предположений о неучете упругих деформаций и о равномерном распределении объемной доли мартенситной фазы по координатам.

Установлено что в рамках сделанных предположений напряжения в процессе фазового перехода не меняются, а деформации и смещения пропорциональны величине объемной доли мартенситной фазы. Учет объемного эффекта фазового перехода не меняет распределения напряжений, но несколько увеличивает смещения и деформации в задаче о прямом превращении под действием внутреннего давления. Относительная ошибка в случае пренебрежения объемным эффектом фазового перехода тем больше, чем меньше внутреннее давление и больше значение радиальной координаты.

Получены выражения для двух типов предельных нагрузок, под которыми понимаются критические значения модуля разницы внутреннего и внешнего давления. Достижение критических значений первого типа соответствует исчерпанию возможности для СПФ деформироваться по фазово-структурному механизму. Достижение критических значений второго типа означает начало деформирования по механизму дислокационной пластичности. Критические нагрузки обоих типов монотонно возрастают с ростом толщины сферы,

асимптотически стремясь к некоторым конечным значениям при стремлении толщины к бесконечности. При прочих равных условиях критические нагрузки обоих типов при моделировании процесса прямого превращения оказываются меньше, чем при моделировании деформирования в режиме мартенситной неупругости. При рассмотрении процесса прямого превращения под действием нагрузки, равной определенной доле предельного значения и мартенситной неупругости, в котором максимальная нагрузка равна той же доле своего предельного значения, деформации и смещения при полном прямом превращении оказываются больше, чем в случае реализации явления мартенситной неупругости.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Материалы с эффектом памяти формы: Справ. изд. / Под. ред. Лихачева В.А. – СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ, 1998. – Т.2. – 374 с.
2. Мовчан А.А. Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы // Известия РАН. МТТ. – 1998. – №1. – С.79-90.
3. Мовчан А.А., Тант Зин Аунг, Мовчан И.А. Решение задач изгиба балок из сплавов с памятью формы в рамках модели нелинейного деформирования этих материалов при фазовых и структурных превращениях // Механика композиционных материалов и конструкций – 2009. – Т.15. – №3. – С.422-436.
4. Мишустин И.В., Мовчан А.А. Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – №1. – С.37-53.
5. Мовчан А.А. Кручение призматических стержней из сплавов с памятью формы // Известия РАН. МТТ. – 2000. – №6. – С.143-154.
6. Мовчан А.А., Тант Зин Аунг. Анализ работы пружин из сплава с памятью формы в рамках модели нелинейного деформирования этих материалов // Механика композиционных материалов и конструкций – 2009. – Т.15. – №4. – С.591-600.
7. Саганов Е.Б. Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // Механика композиционных материалов и конструкций – 2014. – Т. 20. – №3. – С.454-468.
8. Саганов Е.Б. Решение задачи об обратном мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.663-674.
9. Мовчан А.А., Машихин А.Е. Деформации кругового цилиндра из сплава с памятью формы при структурном переходе или прямом фазовом превращении // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №2. – С.235-247.
10. Машихин А.Е. Задача о контакте цилиндра из сплава с памятью формы с упругой трубой при обратном фазовом превращении // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.624-636.
11. Качанов Л.М. Основы теории пластичности // М.: Наука, 1969. – 420 с.
12. Ильюшин А.А. Пластичность // М.: ОГИЗ, 1948. – 376 с.
13. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 1994. – №6. – С.47-53.

14. Мовчан А.А. Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы // ПМТФ. – 1995. – Т.36. – №2. – С.173-181.
15. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. – 1995. – №1. – С.197-205.
16. Шкутин Л.И. Анализ осесимметричных фазовых деформаций в пластинах и оболочках // ПМТФ. – 2007. – Т.48. – №2. – С.163-171.
17. Шкутин Л.И. Анализ осесимметричных деформаций пластин и оболочек в термоцикле фазовых превращений // ПМТФ. – 2008. – Т.49. – №2. – С.204-210.
18. Шкутин Л.И. Нелинейные деформации и катастрофы тонких тел. – Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2014. – 138 с.
19. Мовчан А.А., Казарина С.А., Мишустин И.В., Мовчан И.А. Термодинамическое обоснование модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Деформации и разрушение материалов. – 2009. – №8. – С.2-9.
20. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – №3. – С.118-130.
21. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – №2. – С.44-56.
22. Мовчан А.А., Казарина С.А. Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
23. Lomakin E.V. Constitutive models of mechanical behavior of media with stress state dependent material properties // Adv. Structur. Materials. – 2011. – Vol.7. – P.339-350.
24. Lexcellent C., Boubakar M.L., Bouvet C., Calloch S. About modelling the shape memory alloy behavior based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal condition // Intern. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol.43. – P.613-626.
25. Sil'chenko L.G., Movchan A.A., Sil'chenko O.L. Stability of cylindrical shell made from shape-memory alloys // Intern. Applied Mechanics. – 2014. – Vol.50. – Iss.2. – P.171-178.
26. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. Эффект памяти формы. – Л.: Изд.-во ЛГУ, 1987. – 216 с.
27. Хачин В.Н., Гюнтер В.Э., Монасевич Л.А., Паскаль Ю.И. Обратимые изменения формы при мартенситных превращениях // Изв. Вузов. Физика. – 1977. – №5. – С.95-101.

Поступила в редакцию 6 марта 2015 года.

---

Сведения об авторах:

Мовчан Андрей Александрович – д.ф.-м.н., проф., гл.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [movchan47@mail.ru](mailto:movchan47@mail.ru)

Левин Александр Сергеевич – асп., Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; e-mail: [levinalex870@gmail.com](mailto:levinalex870@gmail.com)