

УДК 539.3

## МЕТОД НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ В КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ (II)<sup>1</sup>

Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Кержаев А.П.

*ФГБУН Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия*

### РЕЗЮМЕ

Статья является продолжением работы [1]. В ней на конкретных примерах подробно разобрана, зачастую весьма нетривиальная, техника выделения особенностей в подынтегральных выражениях, а также техника представления решений в виде рядов по функциям Фадля-Папковича.

**Ключевые слова:** бесконечная полоса; метод начальных функций; интегральное преобразование Фурье; функции Фадля-Папковича

## THE METHOD OF INITIAL FUNCTIONS AND FOURIER INTEGRAL TRANSFORM IN THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE ELASTICITY THEORY FOR AN INFINITE STRIP (II)

Kovalenko M.D., Men'shova I.V., Kerzhaev A.P.

*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

### SUMMARY

This article is sequel to the work [1]. In the article on concrete examples analyzed in detail, often very nontrivial, technique allocation of features in expressions under integral sign, and also technique representation of solutions in the form of series of Fadle-Papkovich functions.

**Key words:** infinite strip; method of initial functions; Fourier integral transform; Fadle-Papkovich functions

### 3. ОБРАТНО-СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПОЛОСЫ

Рассмотрим обратно-симметричную деформацию полосы. Будем считать, что нормальная и касательная нагрузки равны  $\sigma_y(x, \pm h) = \pm p(x)$ ,  $\tau_{xy}(x, \pm h) = \pm q(x)$  соответственно. Тогда начальные функции  $U_0$  и  $Y_0$  обращаются в нуль на оси симметрии  $y = 0$ . Удовлетворяя с помощью зависимостей (1.13) [1] граничным условиям

$$\sigma_y(x, h) = p(x), \quad \tau_{xy}(x, h) = q(x), \quad (0.1)$$

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 13-08-00118-а, 15-38-50034 мол\_нр).

получим систему из двух дифференциальных уравнений бесконечного порядка относительно начальных функций  $X_0(x)$  и  $V_0(x)$

$$\begin{cases} Y(x, h) = L_{YV}(\alpha, h)V_0(x) + L_{YX}(\alpha, h)X_0(x) = p(x); \\ X(x, h) = L_{XV}(\alpha, h)V_0(x) + L_{XX}(\alpha, h)X_0(x) = q(x). \end{cases} \quad (0.2)$$

Рассмотрим два случая: а) когда на продольных сторонах полосы действуют только нормальные напряжения, а касательные равны нулю; б) когда на продольных сторонах полосы приложены только касательные напряжения, а нормальные равны нулю.

а) В первом случае система дифференциальных уравнений бесконечного порядка (3.2) принимает такой вид

$$\begin{cases} L_{YV}(\alpha, h)V_0(x) + L_{YX}(\alpha, h)X_0(x) = p(x); \\ L_{XV}(\alpha, h)V_0(x) + L_{XX}(\alpha, h)X_0(x) = 0. \end{cases} \quad (0.3)$$

Применим к ней преобразование Фурье

$$\begin{cases} L_{YV}(-i\lambda, h)\widetilde{V}_0(\lambda) + L_{YX}(-i\lambda, h)\widetilde{X}_0(\lambda) = \widetilde{p}(\lambda), \\ L_{XV}(-i\lambda, h)\widetilde{V}_0(\lambda) + L_{XX}(-i\lambda, h)\widetilde{X}_0(\lambda) = 0 \end{cases} \quad (0.4)$$

и разрешим систему алгебраических уравнений (3.4) относительно преобразований Фурье искомых начальных функций  $\widetilde{X}_0(\lambda)$  и  $\widetilde{V}_0(\lambda)$ :

$$\widetilde{X}_0(\lambda) = \frac{L_{XV}(-i\lambda, h)\widetilde{p}(\lambda)}{N(-i\lambda)}, \quad \widetilde{V}_0(\lambda) = -\frac{L_{XX}(-i\lambda, h)\widetilde{p}(\lambda)}{N(-i\lambda)}, \quad (0.5)$$

где

$$\begin{aligned} N(-i\lambda) &= L_{YX}(-i\lambda, h)L_{XV}(-i\lambda, h) - L_{XX}(-i\lambda, h)L_{YV}(-i\lambda, h) = \\ &= (1 + \nu)\lambda(\lambda h - \text{sh } \lambda h \text{ ch } \lambda h). \end{aligned} \quad (0.6)$$

Соотношения метода начальных функций (1.13) в пространстве преобразований Фурье, при условии, что начальные функции  $U_0(x)$  и  $Y_0(x)$  равны нулю, имеют вид

$$\begin{aligned} \widetilde{U}(\lambda, y) &= L_{UV}(-i\lambda, y)\widetilde{V}_0(\lambda) + L_{UX}(-i\lambda, y)\widetilde{X}_0(\lambda), \\ \widetilde{V}(\lambda, y) &= L_{VV}(-i\lambda, y)\widetilde{V}_0(\lambda) + L_{VX}(-i\lambda, y)\widetilde{X}_0(\lambda), \\ \widetilde{\sigma}_x(\lambda, y) &= A_V(-i\lambda, y)\widetilde{V}_0(\lambda) + A_X(-i\lambda, y)\widetilde{X}_0(\lambda), \\ \widetilde{Y}(\lambda, y) &= L_{YV}(-i\lambda, y)\widetilde{V}_0(\lambda) + L_{YX}(-i\lambda, y)\widetilde{X}_0(\lambda), \\ \widetilde{X}(\lambda, y) &= L_{XV}(-i\lambda, y)\widetilde{V}_0(\lambda) + L_{XX}(-i\lambda, y)\widetilde{X}_0(\lambda). \end{aligned} \quad (0.7)$$

Подставляя сюда преобразования Фурье начальных функций  $X_0$  и  $V_0$ , т.е. (3.5), получим

$$\begin{aligned} \widetilde{U}^p(\lambda, y) &= \frac{L_{UX}(-i\lambda, y)L_{XV}(-i\lambda, h) - L_{UV}(-i\lambda, y)L_{XX}(-i\lambda, h)}{N(-i\lambda)} \widetilde{p}(\lambda), \\ \widetilde{V}^p(\lambda, y) &= \frac{L_{VX}(-i\lambda, y)L_{XV}(-i\lambda, h) - L_{VV}(-i\lambda, y)L_{XX}(-i\lambda, h)}{N(-i\lambda)} \widetilde{p}(\lambda), \\ \widetilde{\sigma}_x^p(\lambda, y) &= \frac{A_X(-i\lambda, y)L_{XV}(-i\lambda, h) - A_V(-i\lambda, y)L_{XX}(-i\lambda, h)}{N(-i\lambda)} \widetilde{p}(\lambda), \end{aligned} \quad (0.8)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}^p(\lambda, y) &= \frac{L_{YX}(-i\lambda, y)L_{XV}(-i\lambda, h) - L_{YV}(-i\lambda, y)L_{XX}(-i\lambda, h)}{N(-i\lambda)} \tilde{p}(\lambda), \\ \widetilde{X}^p(\lambda, y) &= \frac{L_{XX}(-i\lambda, y)L_{XV}(-i\lambda, h) - L_{XV}(-i\lambda, y)L_{XX}(-i\lambda, h)}{N(-i\lambda)} \tilde{p}(\lambda). \end{aligned}$$

Формулы (3.8) дают решение задачи в пространстве преобразований Фурье. Применяя к ним обратное преобразование Фурье, найдем искомые выражения для напряжений и перемещений

$$\begin{aligned} U^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_{UX}(-i\lambda, y)L_{XV}(-i\lambda, h) - L_{UV}(-i\lambda, y)L_{XX}(-i\lambda, h)}{N(-i\lambda)} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ V^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_{VX}(-i\lambda, y)L_{XV}(-i\lambda, h) - L_{VV}(-i\lambda, y)L_{XX}(-i\lambda, h)}{N(-i\lambda)} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_x^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_X(-i\lambda, y)L_{XV}(-i\lambda, h) - A_V(-i\lambda, y)L_{XX}(-i\lambda, h)}{N(-i\lambda)} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_{YX}(-i\lambda, y)L_{XV}(-i\lambda, h) - L_{YV}(-i\lambda, y)L_{XX}(-i\lambda, h)}{N(-i\lambda)} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy}^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{L_{XX}(-i\lambda, y)L_{XV}(-i\lambda, h) - L_{XV}(-i\lambda, y)L_{XX}(-i\lambda, h)}{N(-i\lambda)} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \end{aligned} \tag{0.9}$$

или, в развернутом виде

$$\begin{aligned} U^p(x, y) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \frac{1-\nu}{2} \operatorname{ch} \lambda h\right) \operatorname{sh} \lambda y + \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu)\lambda(\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ V^p(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h - \operatorname{ch} \lambda h\right) \operatorname{ch} \lambda y + \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu)\lambda(\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_x^p(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda[(\operatorname{ch} \lambda h - \lambda h \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda(\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y^p(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda[(\operatorname{ch} \lambda h + \lambda h \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y - \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda(\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy}^p(x, y) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda^2(h \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y - y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y)}{(1+\nu)\lambda(\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \tilde{p}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda. \end{aligned} \tag{0.10}$$

Приведем интегралы (3.10) к виду, удобному для вычислений, имея в виду, что подынтегральные функции должны быть четными по  $\lambda$  (чтобы интегралы тождественно не обратились в ноль). Если  $p(x)$  и, следовательно,  $\tilde{p}(\lambda) = \tilde{p}^c(\lambda)$  – четные функции, то, представляя экспоненту по формуле Эйлера, и с учетом (2.8), получим

$$\begin{aligned}
U^p(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(-\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \frac{1-\nu}{2} \operatorname{ch} \lambda h\right) \operatorname{sh} \lambda y + \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu) \lambda (\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \tilde{p}^c(\lambda) \sin \lambda x d \lambda, \\
V^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(-\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h - \operatorname{ch} \lambda h\right) \operatorname{ch} \lambda y + \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu) \lambda (\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \tilde{p}^c(\lambda) \cos \lambda x d \lambda, \\
\sigma_x^p(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu) \lambda [(\operatorname{ch} \lambda h - \lambda h \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu) \lambda (\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \tilde{p}^c(\lambda) \cos \lambda x d \lambda, \\
\sigma_y^p(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu) \lambda [(\operatorname{ch} \lambda h + \lambda h \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y - \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu) \lambda (\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \tilde{p}^c(\lambda) \cos \lambda x d \lambda, \\
\tau_{xy}^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu) \lambda^2 (h \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y - y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y)}{(1+\nu) \lambda (\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \tilde{p}^c(\lambda) \sin \lambda x d \lambda.
\end{aligned} \tag{0.11}$$

В том случае, когда  $p(x)$  нечетная функция, будем иметь

$$\begin{aligned}
U^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(-\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \frac{1-\nu}{2} \operatorname{ch} \lambda h\right) \operatorname{sh} \lambda y + \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu) \lambda (\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \tilde{p}^s(\lambda) \cos \lambda x d \lambda, \\
V^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(-\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h - \operatorname{ch} \lambda h\right) \operatorname{ch} \lambda y + \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu) \lambda (\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \tilde{p}^s(\lambda) \sin \lambda x d \lambda, \\
\sigma_x^p(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu) \lambda [(\operatorname{ch} \lambda h - \lambda h \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu) \lambda (\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \tilde{p}^s(\lambda) \sin \lambda x d \lambda, \\
\sigma_y^p(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu) \lambda [(\operatorname{ch} \lambda h + \lambda h \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y - \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu) \lambda (\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \tilde{p}^s(\lambda) \sin \lambda x d \lambda, \\
\tau_{xy}^p(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1+\nu) \lambda^2 (h \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y - y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y)}{(1+\nu) \lambda (\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \tilde{p}^s(\lambda) \cos \lambda x d \lambda.
\end{aligned} \tag{0.12}$$

Заменой переменной  $-i\lambda = \gamma$  перейдем в формулах (3.10) от интегрирования по вещественной оси к интегрированию по мнимой

$$\begin{aligned}
U^p(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\xi^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma, \quad V^p(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\chi^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma, \\
\sigma_x^p(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_x^p(\lambda, y)}{N(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma, \quad \sigma_y^p(x, y) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_y^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma, \\
\tau_{xy}^p(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{t_{xy}^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma.
\end{aligned} \tag{0.13}$$

Здесь функции

$$\begin{aligned}
\xi^p(\gamma, y) &= L_{UX}(\gamma, y) L_{XV}(\gamma, h) - L_{UV}(\gamma, y) L_{XX}(\gamma, h), \\
\chi^p(\gamma, y) &= L_{VX}(\gamma, y) L_{XV}(\gamma, h) - L_{VV}(\gamma, y) L_{XX}(\gamma, h),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_x^p(\gamma, y) &= A_x(\gamma, y)L_{xv}(\gamma, h) - A_v(\gamma, y)L_{xx}(\gamma, h), \\
 s_y^p(\gamma, y) &= L_{yx}(\gamma, y)L_{xv}(\gamma, h) - L_{yv}(\gamma, y)L_{xx}(\gamma, h), \\
 t_{xy}^p(\gamma, y) &= L_{xx}(\gamma, y)L_{xv}(\gamma, h) - L_{xv}(\gamma, y)L_{xx}(\gamma, h), \\
 N(\gamma) &= L_{yx}(\gamma, h)L_{xv}(\gamma, h) - L_{xx}(\gamma, h)L_{yv}(\gamma, h).
 \end{aligned}
 \tag{0.14}$$

Окончательные выражения для них имеют вид

$$\begin{aligned}
 \xi^p(\gamma, y) &= \left( \frac{1+\nu}{2} \gamma h \sin \gamma h + \frac{1-\nu}{2} \cos \gamma h \right) \sin \gamma y + \frac{1+\nu}{2} \gamma y \cos \gamma h \cos \gamma y, \\
 \chi^p(\gamma, y) &= \left( \frac{1+\nu}{2} \gamma h \sin \gamma h - \cos \gamma h \right) \cos \gamma y - \frac{1+\nu}{2} \gamma y \cos \gamma h \sin \gamma y, \\
 s_x^p(\gamma, y) &= (1+\nu) \gamma \left[ (\gamma h \sin \gamma h + \cos \gamma h) \sin \gamma y + \gamma y \cos \gamma h \cos \gamma y \right], \\
 s_y^p(\gamma, y) &= (1+\nu) \gamma \left[ (\cos \gamma h - \gamma h \sin \gamma h) \sin \gamma y - \gamma y \cos \gamma h \cos \gamma y \right], \\
 t_{xy}^p(\gamma, y) &= (1+\nu) \gamma^2 (h \sin \gamma h \cos \gamma y - y \cos \gamma h \sin \gamma y), \\
 N(\gamma) &= -(1+\nu) \gamma (\gamma h - \sin \gamma h \cos \gamma h).
 \end{aligned}
 \tag{0.15}$$

Замыкая в интегралах (3.13) контур интегрирования влево по окружности достаточно большого радиуса и устремляя радиус этой окружности к бесконечности, по теореме о вычетах получим

$$\begin{aligned}
 U^p(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\xi^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma = -\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\xi^p(\lambda_k, y)}{N'(\lambda_k)} \tilde{p}(\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right], \\
 V^p(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\chi^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma = -\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\chi^p(\lambda_k, y)}{N'(\lambda_k)} \tilde{p}(\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right], \\
 \sigma_x^p(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_x^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma = -\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{s_x^p(\lambda_k, y)}{N'(\lambda_k)} \tilde{p}(\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right], \\
 \sigma_y^p(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_y^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma = -\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{s_y^p(\lambda_k, y)}{N'(\lambda_k)} \tilde{p}(\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right], \\
 \tau_{xy}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{t_{xy}^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \tilde{p}(\gamma) e^{\gamma x} d\gamma = -\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{t_{xy}^p(\lambda_k, y)}{N'(\lambda_k)} \tilde{p}(\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right],
 \end{aligned}
 \tag{0.16}$$

где  $\xi^p(\lambda_k, y)$ ,  $\chi^p(\lambda_k, y)$ ,  $s_x^p(\lambda_k, y)$ ,  $s_y^p(\lambda_k, y)$ ,  $t_{xy}^p(\lambda_k, y)$  – функции Фадля-Папковича. Они получаются, если в соответствующих формулах (3.15) заменить  $\gamma$  на  $\lambda_k$  – комплексные корни уравнения  $N(\gamma) = 0$ . Кроме того,  $\operatorname{Re} \lambda_k < 0$ , поскольку контур интегрирования замыкается влево от мнимой оси в плоскости комплексной переменной  $\gamma$ , а через  $N'(\lambda_k) = -2(1+\nu)\lambda_k h \sin^2 \lambda_k h$  обозначена производная функции  $N(\gamma)$  в точке  $\gamma = \lambda_k$ . Ряды в формулах (3.16) также, как и в формулах (2.22) не полные. К ним нужно добавить вычеты при  $\gamma = 0$ , а также вычеты в полюсах функции  $\tilde{p}(\gamma)$ . Вычетам в нуле отвечает элементарное решение теории изгиба балок.

**Пример 4.** Пусть внешняя нормальная нагрузка представлена статически уравновешенной системой сосредоточенных сил, приложенных в точках  $x = 0$

и  $x = \pm a$  ( $a > 0$ ) на верхней и нижней сторонах полосы, как показано на рис.1. Тогда

$$p(x) = P\delta(x) - \frac{P}{2}\delta(x-a) - \frac{P}{2}\delta(x+a), \quad (0.17)$$

а

$$\tilde{p}(\lambda) = P - \frac{P}{2}e^{i\lambda a} - \frac{P}{2}e^{-i\lambda a} = P(1 - \cos a\lambda) \quad (0.18)$$

и, следовательно,

$$\tilde{p}(\lambda) = P - \frac{P}{2}e^{-\gamma a} - \frac{P}{2}e^{\gamma a} \quad (0.19)$$

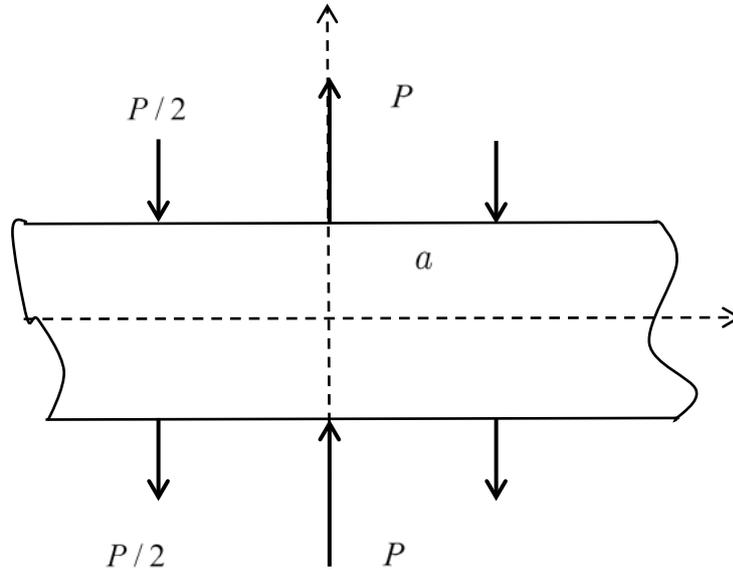


Рис.1.

Решение задачи дается формулами (3.11). Преобразуем их, выделив особенности в подынтегральных выражениях при  $\lambda \rightarrow 0$ , если они есть. Рассмотрим выражение для  $U^p(x, y)$ . Разложим числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком интеграла, в степенной ряд по  $\lambda$ , оставляя по 2 члена ряда. Для числителя получим следующее выражение (учтен минус, стоящий перед интегралом)

$$a\lambda + b\lambda^3 + \dots, \quad (0.20)$$

$$a = -y, \quad b = \frac{h\nu y}{2} - \frac{y^3}{3} \left(1 + \frac{\nu}{2}\right),$$

а для знаменателя

$$A\lambda^4 + B\lambda^6 + \dots, \quad (0.21)$$

$$A = -\frac{2h^3(1+\nu)}{3}, \quad B = -\frac{2h^5(1+\nu)}{15}.$$

Тогда рассматриваемую дробь можно записать так

$$\frac{a\lambda + b\lambda^3 + \dots}{A\lambda^4 + B\lambda^6 + \dots}. \quad (0.22)$$

Выделим здесь особенности в нуле. Очевидно, при  $\lambda \rightarrow 0$

$$\frac{a\lambda + b\lambda^3 + \dots}{A\lambda^4 + B\lambda^6 + \dots} \approx \frac{a}{A\lambda^3} \tag{0.23}$$

Вычитая (3.23) из (3.22), получим

$$\begin{aligned} \frac{a\lambda + b\lambda^3 + \dots}{A\lambda^4 + B\lambda^6 + \dots} - \frac{a}{A\lambda^3} &= \frac{A\lambda^3(a\lambda + b\lambda^3 + \dots) - a(A\lambda^4 + B\lambda^6 + \dots)}{A\lambda^3(A\lambda^4 + B\lambda^6 + \dots)} = \\ &= \frac{Ab - aB}{A^2\lambda} + r(\lambda), \end{aligned} \tag{0.24}$$

где  $r(\lambda)$  – регулярная в нуле функция. Таким образом, имеет место следующее асимптотическое равенство (регулярные в нули части представлений опущены)

$$\begin{aligned} &-\frac{\left(-\frac{1+\nu}{2}\lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \frac{1-\nu}{2}\operatorname{ch} \lambda h\right)\operatorname{sh} \lambda y + \frac{1+\nu}{2}\lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu)\lambda(\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \approx \\ &\approx \frac{3y}{2h^3(1+\nu)\lambda^3} + \left(\frac{y^3(2+\nu)}{4h^3(1+\nu)} - \frac{3y(2+5\nu)}{20h(1+\nu)}\right)\frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \tag{0.25}$$

Аналогично можно получить такие асимптотические равенства (дробь в подынтегральном выражении для функции  $\sigma_y^p(x, y)$  не имеет особенности при  $\lambda \rightarrow 0$ )

для  $V^p(x, y)$

$$\begin{aligned} &\frac{\left(-\frac{1+\nu}{2}\lambda h \operatorname{sh} \lambda h - \operatorname{ch} \lambda h\right)\operatorname{ch} \lambda y + \frac{1+\nu}{2}\lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu)\lambda(\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \approx \\ &\approx \frac{3}{2h^3(1+\nu)\lambda^4} + \frac{15\nu(h^2 - y^2) + 24h^2}{20h^3(1+\nu)\lambda^2}, \end{aligned} \tag{0.26}$$

для  $\sigma_x^p(x, y)$

$$-\frac{(1+\nu)\lambda[(\operatorname{ch} \lambda h - \lambda h \operatorname{sh} \lambda h)\operatorname{sh} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda(\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \approx \frac{3y}{h^3\lambda^2}, \tag{0.27}$$

для  $\tau_{xy}^p(x, y)$

$$\frac{(1+\nu)\lambda^2(h \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y - y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y)}{(1+\nu)\lambda(\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} \approx \frac{3(y^2 - h^2)}{2h^3\lambda}. \tag{0.28}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} U^{pa}(x, y) &= \frac{3y}{2h^3(1+\nu)} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda^3} \tilde{p}^c(\lambda) d\lambda + \\ &+ \left(\frac{y^3(2+\nu)}{4h^3(1+\nu)} - \frac{3y(2+5\nu)}{20h(1+\nu)}\right) \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \tilde{p}^c(\lambda) d\lambda, \\ V^{pa}(x, y) &= \frac{3}{2h^3(1+\nu)} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^4} \tilde{p}^c(\lambda) d\lambda + \\ &+ \frac{15\nu(h^2 - y^2) + 24h^2}{20h^3(1+\nu)\lambda^2} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} \tilde{p}^c(\lambda) d\lambda, \end{aligned} \tag{0.29}$$

$$\sigma_x^{pa}(x, y) = \frac{3y}{h^3} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} \tilde{p}^c(\lambda) d\lambda, \quad \tau_{xy}^{pa}(x, y) = \frac{3(y^2 - h^2)}{2h^3} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \tilde{p}^c(\lambda) d\lambda.$$

Вычислим входящие в выражения (3.29) интегралы, пользуясь формулой Эйлера и справочником [2]. Опуская пока  $\tilde{p}^c(\lambda)$ , получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda^3} d\lambda &= \frac{-1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda^3} d\lambda = -\frac{|x|^2}{4} \operatorname{sgn} x, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda} d\lambda &= \frac{\operatorname{sgn} x}{2}, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^4} d\lambda &= \frac{|x|^3}{12}, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} d\lambda = -\frac{|x|}{2}.\end{aligned}\tag{0.30}$$

Теперь умножим в формулах (3.30) подынтегральные выражения на  $\tilde{p}^c(\lambda)$  (3.18) и, воспользовавшись свойством преобразования Фурье свертки [3], найдем интегралы. В силу симметрии задачи относительно вертикальной оси, выпишем значения интегралов только при  $a \geq x \geq 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda^3} \tilde{p}^c(\lambda) d\lambda &= -\frac{|x|^2}{4} \operatorname{sgn} x * p(x) = \\ &= -\frac{P}{4} \int_{-\infty}^\infty |\xi|^2 \operatorname{sgn} \xi \left[ \delta(x-\xi) - \frac{1}{2} \delta(x-a-\xi) - \frac{1}{2} \delta(x+a-\xi) \right] d\xi = \\ &= -\frac{P}{4} \left[ x^2 + \frac{1}{2}(x-a)^2 - \frac{1}{2}(x+a)^2 \right] = \frac{P}{4} x(2a-x); \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \lambda x}{\lambda} \tilde{p}^c(\lambda) d\lambda &= \frac{\operatorname{sgn} x}{2} * p(x) = \\ &= \frac{P}{2} \int_{-\infty}^\infty \operatorname{sgn} \xi \left[ \delta(x-\xi) - \frac{1}{2} \delta(x-a-\xi) - \frac{1}{2} \delta(x+a-\xi) \right] d\xi = \frac{P}{2}; \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^4} \tilde{p}^c(\lambda) d\lambda &= \frac{|x|^3}{12} * p(x) = \\ &= \frac{P}{12} \int_{-\infty}^\infty |\xi|^3 \left[ \delta(x-\xi) - \frac{1}{2} \delta(x-a-\xi) - \frac{1}{2} \delta(x+a-\xi) \right] d\xi = \\ &= \frac{P}{12} \left[ x^3 + \frac{1}{2}(x-a)^3 - \frac{1}{2}(x+a)^3 \right] = \frac{P}{12} (x^3 - 3xa^2 - a^3); \\ \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} \tilde{p}^c(\lambda) d\lambda &= -\frac{|x|}{2} * p(x) = \\ &= -\frac{P}{2} \int_{-\infty}^\infty |\xi| \left[ \delta(x-\xi) - \frac{1}{2} \delta(x-a-\xi) - \frac{1}{2} \delta(x+a-\xi) \right] d\xi = \\ &= -\frac{P}{2} \left[ x - \frac{1}{2}|x-a| - \frac{1}{2}|x+a| \right] = \frac{P}{2} (a-x).\end{aligned}\tag{0.31}$$

С учетом этих равенств формулам (3.29) можно придать такой вид

$$\begin{aligned}U^{pa}(x, y) &= \left\{ \frac{3y}{2h^3(1+\nu)} \frac{x(2a-x)}{4} + \left[ \frac{(2+\nu)y^3}{4h^3(1+\nu)} - \frac{3y(2+5\nu)}{20h(1+\nu)} \right] \frac{1}{2} \right\} P, \\ V^{pa}(x, y) &= \left[ \frac{3}{2h^3(1+\nu)} \frac{x^3 - 3xa^2 - a^3}{12} + \frac{15\nu(h^2 - y^2) + 24h^2(a-x)}{20h^3(1+\nu)} \frac{1}{2} \right] P,\end{aligned}\tag{0.32}$$

$$\sigma_x^{pa}(x, y) = \frac{3y}{2h^3} \frac{a-x}{2} P, \quad \tau_{xy}^{pa}(x, y) = \frac{3(y^2 - h^2)}{2h^3} \frac{P}{2}.$$

Теперь интегралы (3.11) можно сделать сходящимися при всех  $\lambda$ , вычитая из них соответствующие выражения в форме (3.29) и добавляя их в виде (3.32). Окончательно получим ( $P = 1$ )

$$\begin{aligned}
 U^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\left( -\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h + \frac{1-\nu}{2} \operatorname{ch} \lambda h \right) \operatorname{sh} \lambda y + \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu)\lambda(\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} - \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \frac{3y}{2h^3(1+\nu)\lambda^3} + \left( \frac{y^3(2+\nu)}{4h^3(1+\nu)} - \frac{3y(2+5\nu)}{20h(1+\nu)} \right) \frac{1}{\lambda} \right] \right\} (1 - \cos a\lambda) \sin \lambda x d\lambda + U^{pa}(x, y); \\
 V^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{\left( -\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{sh} \lambda h - \operatorname{ch} \lambda h \right) \operatorname{ch} \lambda y + \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu)\lambda(\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} - \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \frac{3}{2h^3(1+\nu)\lambda^4} + \frac{15\nu(h^2 - y^2) + 24h^2}{20h^3(1+\nu)\lambda^2} \right] \right\} (1 - \cos a\lambda) \cos \lambda x d\lambda + V^{pa}(x, y); \\
 \sigma_x^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ -\frac{(1+\nu)\lambda[(\operatorname{ch} \lambda h - \lambda h \operatorname{sh} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y + \lambda y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda(\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3y}{h^3\lambda^2} \right\} (1 - \cos a\lambda) \cos \lambda x d\lambda + \sigma_x^{pa}(x, y); \\
 \tau_{xy}^p(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \left\{ \frac{(1+\nu)\lambda^2(h \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y - y \operatorname{ch} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y)}{(1+\nu)\lambda(\lambda h - \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h)} - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{3(y^2 - h^2)}{2h^3\lambda} \right\} (1 - \cos a\lambda) \sin \lambda x d\lambda + \tau_{xy}^{pa}(x, y).
 \end{aligned} \tag{0.33}$$

Здесь  $U^{pa}(x, y)$ ,  $V^{pa}(x, y)$  и т.д. – функции (3.32) при  $P = 1$ .

Преобразуем интегралы (3.16) и получим решение в виде разложений в ряды по функциям Фадля-Папковича полагая, по-прежнему, что  $a \geq x \geq 0$ . Рассмотрим функцию

$$\tilde{p}(\gamma)e^{\gamma x} = \left( e^{\gamma x} - \frac{1}{2}e^{-\gamma(a-x)} - \frac{1}{2}e^{\gamma(a+x)} \right) P. \tag{0.34}$$

При замыкании в интегралах (3.16) контура интегрирования влево от мнимой оси, функция  $\frac{1}{2}e^{-\gamma(a-x)}$ , входящая в формулу (3.34) экспоненциально растёт. Чтобы избежать этого, поступим следующим образом. Рассмотрим, например, интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\xi^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \left( -\frac{e^{-\gamma(a-x)}}{2} \right) d\gamma = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\xi^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \left( \frac{e^{-\gamma(a-x)}}{2} \right) d\gamma. \tag{0.35}$$

Полагая  $t = -\gamma$  и учитывая нечетность относительно  $\gamma$  дроби, стоящей под интегралом (3.35), получим

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\xi^p(-t, y)}{N(-t)} \left( \frac{e^{t(a-x)}}{2} \right) dt = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\xi^p(t, y)}{N(t)} \left( \frac{e^{t(a-x)}}{2} \right) dt. \quad (0.36)$$

Последний интеграл в формуле (3.36) отличается от последнего интеграла в формуле (3.35) знаком и тем, что в нем контур интегрирования уже можно замкнуть влево от мнимой оси. Теперь переменную интегрирования  $t$  в (3.36) можно формально заменить на  $\gamma$ . Окончательно вместо (3.34) получим

$$\tilde{p}(\gamma)e^{\gamma x} = \left( e^{\gamma x} + \frac{1}{2}e^{\gamma(a-x)} - \frac{1}{2}e^{\gamma(a+x)} \right) P. \quad (0.37)$$

Дроби, стоящие под знаками интегралов в формулах (3.16) для функций  $U^p(x, y)$  и  $\tau_{xy}^p(x, y)$ , нечетны относительно  $\gamma$ . Поэтому для них, как только что было установлено, верно равенство (3.37). А для функций  $V^p(x, y)$ ,  $\sigma_x^p(x, y)$ ,  $\tau_{xy}^p(x, y)$  – дроби четны и для них

$$\tilde{p}(\gamma)e^{\gamma x} = \left( e^{\gamma x} - \frac{1}{2}e^{\gamma(a-x)} - \frac{1}{2}e^{\gamma(a+x)} \right) P. \quad (0.38)$$

Поэтому интегралы (3.16) нужно переписать в следующем виде

$$\begin{aligned} U^p(x, y) &= -\frac{P}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\xi^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \left( e^{\gamma x} + \frac{1}{2}e^{\gamma(a-x)} - \frac{1}{2}e^{\gamma(a+x)} \right) d\gamma, \\ V^p(x, y) &= -\frac{P}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\chi^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \left( e^{\gamma x} - \frac{1}{2}e^{\gamma(a-x)} - \frac{1}{2}e^{\gamma(a+x)} \right) d\gamma, \\ \sigma_x^p(x, y) &= -\frac{P}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_x^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \left( e^{\gamma x} - \frac{1}{2}e^{\gamma(a-x)} - \frac{1}{2}e^{\gamma(a+x)} \right) d\gamma, \\ \sigma_y^p(x, y) &= -\frac{P}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{s_y^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \left( e^{\gamma x} - \frac{1}{2}e^{\gamma(a-x)} - \frac{1}{2}e^{\gamma(a+x)} \right) d\gamma, \\ \tau_{xy}^p(x, y) &= -\frac{P}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{t_{xy}^p(\gamma, y)}{N(\gamma)} \left( e^{\gamma x} + \frac{1}{2}e^{\gamma(a-x)} - \frac{1}{2}e^{\gamma(a+x)} \right) d\gamma. \end{aligned} \quad (0.39)$$

Выделим особенности в мероморфных функциях, стоящих под знаками интегралов так, как это было сделано раньше, т.е. вычтем из них соответствующие выражения (3.25)-(3.28), в которых надо положить  $\lambda = i\gamma$ , и добавим функции (3.32). Т.к. подынтегральные функции не будут иметь других особенностей, кроме комплексных нулей функции  $N(\gamma)$ , то по теореме о вычетах окончательно получим

$$\begin{aligned} U^p(x, y) &= U^{pa}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\xi^p(\lambda_k, y)}{N'(\lambda_k)} \left( e^{\lambda_k x} + \frac{1}{2}e^{\lambda_k(a-x)} - \frac{1}{2}e^{\lambda_k(a+x)} \right) \right], \\ V^p(x, y) &= V^{pa}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\chi^p(\lambda_k, y)}{N'(\lambda_k)} \left( e^{\lambda_k x} - \frac{1}{2}e^{\lambda_k(a-x)} - \frac{1}{2}e^{\lambda_k(a+x)} \right) \right], \\ \sigma_x^p(x, y) &= \sigma_x^{pa}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{s_x^p(\lambda_k, y)}{N'(\lambda_k)} \left( e^{\lambda_k x} - \frac{1}{2}e^{\lambda_k(a-x)} - \frac{1}{2}e^{\lambda_k(a+x)} \right) \right], \end{aligned} \quad (0.40)$$

$$\sigma_y^p(x, y) = \sigma_y^{pa}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{s_y(\lambda_k, y)}{N'(\lambda_k)} \left( e^{\lambda_k x} - \frac{1}{2} e^{\lambda_k(a-x)} - \frac{1}{2} e^{\lambda_k(a+x)} \right) \right],$$

$$\tau_{xy}^p(x, y) = \tau_{xy}^{pa}(x, y) + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{N'(\lambda_k)} \left( e^{\lambda_k x} + \frac{1}{2} e^{\lambda_k(a-x)} - \frac{1}{2} e^{\lambda_k(a+x)} \right) \right].$$

Ряды (3.40) сходятся при всех  $\{x \geq 0, |y| \leq h\}$ . Можно проверить численно, что решения (3.40) и (3.33) совпадают (рис.2). Здесь точечный график  $sx(x, y)$  соответствует нормальным напряжениям  $\sigma_x^p(x, y)$  (3.40), а сплошная кривая  $sxI(x, y)$  рассчитана по формулам (3.33). Считалось, что  $a = 2, h = 1, \nu = 1/3, x = 1/2$ .

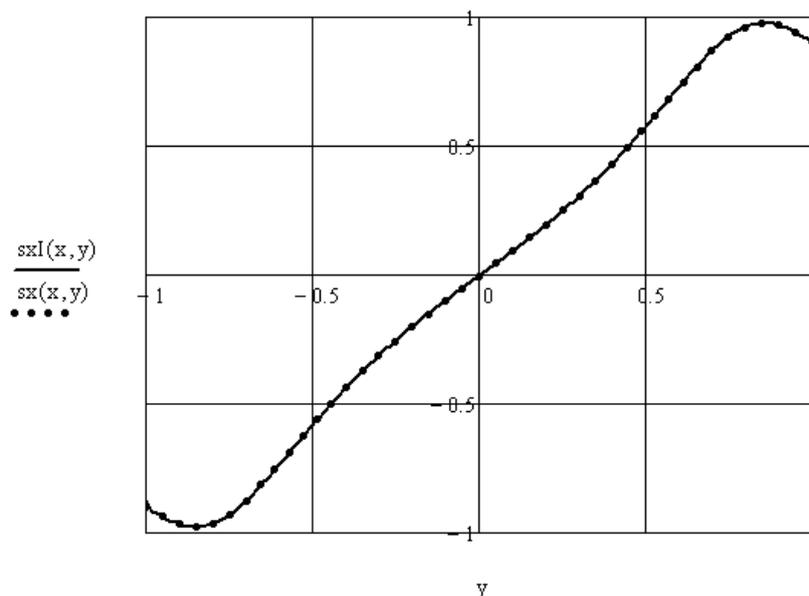


Рис.2.

б) Пусть на длинных сторонах полосы заданы только касательные напряжения, равные  $q(x)$ , а нормальные напряжения равны нулю. Тогда имеем систему

$$\begin{cases} L_{YV}(\alpha, h) V_0(x) + L_{YX}(\alpha, h) X_0(x) = 0; \\ L_{XV}(\alpha, h) V_0(x) + L_{XX}(\alpha, h) X_0(x) = q(x), \end{cases} \quad (0.41)$$

которая в образах Фурье принимает вид

$$\begin{cases} L_{YV}(-i\lambda, h) \widetilde{V}_0(x) + L_{YX}(-i\lambda, h) \widetilde{X}_0(x) = 0; \\ L_{XV}(-i\lambda, h) \widetilde{V}_0(x) + L_{XX}(-i\lambda, h) \widetilde{X}_0(x) = \widetilde{q}(x). \end{cases} \quad (0.42)$$

Отсюда находим

$$\widetilde{X}_0(\lambda) = -\frac{L_{YV}(-i\lambda, h) \widetilde{q}(\lambda)}{N(-i\lambda)}, \quad \widetilde{V}_0(\lambda) = \frac{L_{YX}(-i\lambda, h) \widetilde{q}(\lambda)}{N(-i\lambda)}, \quad (0.43)$$

где

$$\widetilde{q}(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(x) e^{i\lambda x} dx. \quad (0.44)$$

Подставим выражения (3.43) в формулы (3.7). Следующие формулы, аналоги формул (3.8), получаются из них заменой операторов  $L_{xv}(-i\lambda, h)$  на  $-L_{yv}(-i\lambda, h)$ , а  $L_{xx}(-i\lambda, h)$  на  $-L_{yx}(-i\lambda, h)$

$$\begin{aligned}\widetilde{U}^q(\lambda, y) &= -\frac{L_{ux}(-i\lambda, y)L_{yv}(-i\lambda, h) - L_{uv}(-i\lambda, y)L_{yx}(-i\lambda, h)}{N(-i\lambda)}\tilde{q}(\lambda), \\ \widetilde{V}^q(\lambda, y) &= -\frac{L_{yx}(-i\lambda, y)L_{yv}(-i\lambda, h) - L_{yv}(-i\lambda, y)L_{yx}(-i\lambda, h)}{N(-i\lambda)}\tilde{q}(\lambda), \\ \widetilde{\sigma}_x^q(\lambda, y) &= -\frac{A_x(-i\lambda, y)L_{yv}(-i\lambda, h) - A_v(-i\lambda, y)L_{yx}(-i\lambda, h)}{N(-i\lambda)}\tilde{q}(\lambda), \\ \widetilde{Y}^q(\lambda, y) &= -\frac{L_{yx}(-i\lambda, y)L_{yv}(-i\lambda, h) - L_{yv}(-i\lambda, y)L_{yx}(-i\lambda, h)}{N(-i\lambda)}\tilde{q}(\lambda), \\ \widetilde{X}^q(\lambda, y) &= -\frac{L_{xx}(-i\lambda, y)L_{yv}(-i\lambda, h) - L_{xv}(-i\lambda, y)L_{yx}(-i\lambda, h)}{N(-i\lambda)}\tilde{q}(\lambda).\end{aligned}\quad (0.45)$$

Раскрывая подынтегральные выражения в формулах (3.45), получим

$$\begin{aligned}U^q(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h - \operatorname{sh} \lambda h\right) \operatorname{sh} \lambda y + \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h - \lambda h]} \tilde{q}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ V^q(x, y) &= -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\left(\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \frac{1-\nu}{2} \operatorname{sh} \lambda h\right) \operatorname{ch} \lambda y - \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\operatorname{sh} \gamma h \operatorname{ch} \gamma h - \gamma h]} \tilde{q}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_x^q(x, y) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda[(-2 \operatorname{sh} \lambda h + \lambda h \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{sh} \lambda y - \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y]}{(1+\nu)\lambda[\operatorname{sh} \gamma h \operatorname{ch} \gamma h - \gamma h]} \tilde{q}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \sigma_y^q(x, y) &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda^2(-h \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y + y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y)}{(1+\nu)\lambda[\operatorname{sh} \gamma h \operatorname{ch} \gamma h - \gamma h]} \tilde{q}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda, \\ \tau_{xy}^q(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+\nu)\lambda((\operatorname{sh} \lambda h - \lambda h \operatorname{ch} \lambda h) \operatorname{ch} \lambda y + \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y)}{(1+\nu)\lambda[\operatorname{sh} \gamma h \operatorname{ch} \gamma h - \gamma h]} \tilde{q}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda.\end{aligned}\quad (0.46)$$

Приведем интегралы (3.46) к виду, удобному для вычислений, аналогично тому, как это было сделано выше. Если  $q(x)$  и, следовательно,  $\tilde{q}(\lambda) = \tilde{q}^c(\lambda)$  – четные функции, то представляя экспоненту по формуле Эйлера и с учетом (2.8), получим

$$\begin{aligned}U^q(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h - \operatorname{sh} \lambda h\right) \operatorname{sh} \lambda y + \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\operatorname{sh} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h - \lambda h]} \tilde{q}^c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \\ V^q(x, y) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1+\nu}{2} \lambda h \operatorname{ch} \lambda h + \frac{1-\nu}{2} \operatorname{sh} \lambda h\right) \operatorname{ch} \lambda y - \frac{1+\nu}{2} \lambda y \operatorname{sh} \lambda h \operatorname{sh} \lambda y}{(1+\nu)\lambda[\operatorname{sh} \gamma h \operatorname{ch} \gamma h - \gamma h]} \tilde{q}^c(\lambda) \sin \lambda x d\lambda,\end{aligned}$$

$$\sigma_x^q(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+\nu)\lambda[(-2\operatorname{sh}\lambda h + \lambda h \operatorname{ch}\lambda h)\operatorname{sh}\lambda y - \lambda y \operatorname{sh}\lambda h \operatorname{ch}\lambda y]}{(1+\nu)\lambda[\operatorname{sh}\gamma h \operatorname{ch}\gamma h - \gamma h]} \tilde{q}^c(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \tag{0.47}$$

$$\sigma_y^q(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+\nu)\lambda^2(-h \operatorname{sh}\lambda h \operatorname{sh}\lambda y + y \operatorname{sh}\lambda h \operatorname{ch}\lambda y)}{(1+\nu)\lambda[\operatorname{sh}\gamma h \operatorname{ch}\gamma h - \gamma h]} \tilde{q}^c(\lambda) \sin \lambda x d\lambda,$$

$$\tau_{xy}^q(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+\nu)\lambda((\operatorname{sh}\lambda h - \lambda h \operatorname{ch}\lambda h)\operatorname{ch}\lambda y + \lambda y \operatorname{sh}\lambda h \operatorname{sh}\lambda y)}{(1+\nu)\lambda[\operatorname{sh}\gamma h \operatorname{ch}\gamma h - \gamma h]} \tilde{q}^c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda.$$

В том случае, когда  $q(x)$  – нечетная функция, будем иметь

$$U^q(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1+\nu}{2}\lambda h \operatorname{ch}\lambda h - \operatorname{sh}\lambda h\right)\operatorname{sh}\lambda y + \frac{1+\nu}{2}\lambda y \operatorname{sh}\lambda h \operatorname{ch}\lambda y}{(1+\nu)\lambda[\operatorname{sh}\lambda h \operatorname{ch}\lambda h - \lambda h]} \tilde{q}^s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda,$$

$$V^q(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{1+\nu}{2}\lambda h \operatorname{ch}\lambda h + \frac{1-\nu}{2}\operatorname{sh}\lambda h\right)\operatorname{ch}\lambda y - \frac{1+\nu}{2}\lambda y \operatorname{sh}\lambda h \operatorname{sh}\lambda y}{(1+\nu)\lambda[\operatorname{sh}\gamma h \operatorname{ch}\gamma h - \gamma h]} \tilde{q}^s(\lambda) \cos \lambda x d\lambda,$$

$$\sigma_x^q(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+\nu)\lambda[(-2\operatorname{sh}\lambda h + \lambda h \operatorname{ch}\lambda h)\operatorname{sh}\lambda y - \lambda y \operatorname{sh}\lambda h \operatorname{ch}\lambda y]}{(1+\nu)\lambda[\operatorname{sh}\gamma h \operatorname{ch}\gamma h - \gamma h]} \tilde{q}^s(\lambda) \cos \lambda x d\lambda, \tag{0.48}$$

$$\sigma_y^q(x, y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+\nu)\lambda^2(-h \operatorname{sh}\lambda h \operatorname{sh}\lambda y + y \operatorname{sh}\lambda h \operatorname{ch}\lambda y)}{(1+\nu)\lambda[\operatorname{sh}\gamma h \operatorname{ch}\gamma h - \gamma h]} \tilde{q}^s(\lambda) \cos \lambda x d\lambda,$$

$$\tau_{xy}^q(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(1+\nu)\lambda((\operatorname{sh}\lambda h - \lambda h \operatorname{ch}\lambda h)\operatorname{ch}\lambda y + \lambda y \operatorname{sh}\lambda h \operatorname{sh}\lambda y)}{(1+\nu)\lambda[\operatorname{sh}\gamma h \operatorname{ch}\gamma h - \gamma h]} \tilde{q}^s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda.$$

Представление решения (3.46) по теореме о вычетах имеет такой вид

$$U^q(x, y) = -\sum_{k=1}^\infty 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\xi^q(\lambda_k, y)}{N'(\lambda_k)} \tilde{q}(\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right], \quad V^q(x, y) = -\sum_{k=1}^\infty 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\chi^q(\lambda_k, y)}{N'(\lambda_k)} \tilde{q}(\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right],$$

$$\sigma_x^q(x, y) = -\sum_{k=1}^\infty 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{s_x^q(\lambda_k, y)}{N'(\lambda_k)} \tilde{q}(\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right], \quad \sigma_y^q(x, y) = -\sum_{k=1}^\infty 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{s_y^q(\lambda_k, y)}{N'(\lambda_k)} \tilde{q}(\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right],$$

$$\tau_{xy}^q(x, y) = -\sum_{k=1}^\infty 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{t_{xy}^q(\lambda_k, y)}{N'(\lambda_k)} \tilde{q}(\lambda_k) e^{\lambda_k x} \right], \tag{0.49}$$

где функции Фадля-Папковича равны

$$\begin{aligned} \xi^q(\lambda_k, y) &= \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda_k h \cos \lambda_k h - \sin \lambda_k h \right) \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y, \\ \chi^q(\lambda_k, y) &= \left( \frac{1+\nu}{2} \lambda_k h \cos \lambda_k h + \frac{1-\nu}{2} \sin \lambda_k h \right) \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y, \\ s_x^q(\lambda_k, y) &= -(1+\nu) \lambda_k \left( (2 \sin \lambda_k h - \lambda_k h \cos \lambda_k h) \sin \lambda_k y + \lambda_k y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y \right), \end{aligned} \tag{0.50}$$

$$s_y^q(\lambda_k, y) = -(1+\nu) \lambda_k^2 (h \cos \lambda_k h \sin \lambda_k y - y \sin \lambda_k h \cos \lambda_k y),$$

$$t_{xy}^q(\lambda_k, y) = -(1+\nu) \lambda_k \left( (\sin \lambda_k h - \lambda_k h \cos \lambda_k h) \cos \lambda_k y - \lambda_k y \sin \lambda_k h \sin \lambda_k y \right).$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко М. Д., Меньшова И. В., Кержаев А. П. Метод начальных функций и интегральное преобразование Фурье в краевой задаче теории упругости для бесконечной полосы (I) // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №1. – С.47-64.
2. Брычков Ю.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования обобщенных функций. – М.: Наука, 1977. – 286 с.
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1976. – 542 с.

*Поступила в редакцию 2 декабря 2014 года.*

---

### Сведения об авторах:

Коваленко Михаил Денисович – д.ф.-м.н., в.н.с., Лаборатория геодинамики, ФГБУН Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [kov08@inbox.ru](mailto:kov08@inbox.ru)

Меньшова Ирина Владимировна – к.ф.-м.н., с.н.с., Лаборатория геодинамики, ФГБУН Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [menshovairina@yandex.ru](mailto:menshovairina@yandex.ru)

Кержаев Александр Петрович, – к.ф.-м.н., с.н.с., Лаборатория геодинамики, ФГБУН Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [alex\\_kerg@mail.ru](mailto:alex_kerg@mail.ru)