

УДК 681.03.06:531.383:532.516

ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ В ВЯЗКОУПРУГОЙ ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ, СОДЕРЖАЩЕЙ ВЯЗКУЮ ЖИДКОСТЬ И ОКРУЖЕННОЙ УПРУГОЙ СРЕДОЙ¹

Блинков Ю.А., Кузнецова Е.Л. *, Могилевич Л.И. *, Рабинский Л.Н. *

*ФГБОУ ВПО Саратовский государственный университет
им.Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия***ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет), г. Москва, Россия***РЕЗЮМЕ**

Получено уравнение, обобщающее известное уравнение Гарднера, описывающее волны деформации с помощью асимптотических методов решения связанной задачи гидроупругости, физически нелинейной вязкоупругой оболочки, содержащей вязкую несжимаемую жидкость и окруженной упругой средой. При условии того, что длина волны деформации больше радиуса срединной поверхности оболочки, в уравнениях динамики вязкой несжимаемой жидкости сделан асимптотический переход к классическому уравнению гидродинамической теории смазки.

В данной работе при численном решении задачи Коши для полученного нового уравнения с учетом влияния жидкости и окружающей оболочку упругой среды применяется переопределенная система разностных уравнений, получаемая путем аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. В результате разностная схема автоматически обеспечивает выполнение интегральных законов сохранения по областям, состоящим из базовых конечных объемов.

Наличие жидкости в оболочке, окруженной упругой средой, приводит к росту амплитуды волны деформации или ее падению в зависимости от параметров вязкоупругой среды. Упругая среда, окружающая оболочку, приводит к увеличению скорости нелинейной волны деформации.

Ключевые слова: нелинейные волны; вязкая несжимаемая жидкость; цилиндрические вязкоупругие оболочки; окружающая упругая среда

NONLINEAR WAVES IN VISCOELASTIC PHYSICALLY NONLINEAR CYLINDRICAL SHELL WITH A VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLUID AND SURROUNDED BY AN ELASTIC MEDIUM

Blinkov Yu.A., Kuznetsova E.L. *, Mogilevich L.I. *, Rabinskiy L.N. *

*Saratov State University named after N.G.Chernyshevsky, Saratov, Russia***Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта РФФИ проект 13-01-00049-а, 14-01-00479 и Грантов Президента РФ МД-4560.2015.8, НШ-1387.2014.8.

SUMMARY

A well-known Gardner equation modeling deformation waves was generalized. A new equation was obtained by means of the asymptotic approach applied to the coupled hydroelasticity problem including the dynamic equations for a nonlinearly deformed viscoelastic shell surrounded by an elastic media and the dynamic equations for a viscous incompressible liquid in the shell with their boundary conditions. The radius of the shell midsurface is significantly less than the deformation wavelength, so that the asymptotic transformation of the dynamic equations for the viscous incompressible liquid to the ones of the hydrodynamic lubrication theory becomes possible.

Here we use the new method of a finite-difference schema's construction based on the overdetermined finite-difference equations system that follows from the approximation of the integral conservation laws as well as the integral relations between the unknown functions and their derivatives. The interference of the liquid, the elastic media, and the shell is taken into account. As a result, the finite difference schema is defined as a compatibility equation for this system and secures the conservation laws for the domains compounded from the basic finite volumes.

The presence of the liquid in the shell surrounded by the elastic media results the growth or drop of the deformation wave amplitude depending on the Poisson ratio of the viscoelastic media. The elastic media surrounding the shell results the growth of the velocity of the nonlinear wave of deformation.

Key words: nonlinear waves; viscous incompressible liquid; viscoelastic cylindrical shells surrounded by an elastic media

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее исследование посвящено анализу распространения нелинейных продольных волн деформаций в бесконечно длинной цилиндрической оболочке, окруженной упругой средой и содержащей вязкую несжимаемую жидкость внутри. Такая физико-механическая модель адекватно описывает распространение нелинейных упругих волн в элементах конструкции авиационной и ракетно-космической техники. Физические свойства оболочки определяются уравнениями квадратичной теории вязкоупругости.

Проблемы распространения волн в вязкоупругих и нелинейных тонкостенных конструкциях, в том числе в цилиндрических оболочках без жидкости, рассмотрены ранее с позиции теории солитонов [1]. Наличие жидкости потребует разработки новой математической модели и компьютерного моделирования процессов, происходящих в рассматриваемой системе.

1. Волновые процессы в вязкоупругих и нелинейных вязкоупругих оболочках без жидкости рассмотрены в [1-3]. Получим уравнения динамики с учётом наличия вязкой несжимаемой жидкости в цилиндрической оболочке с помощью асимптотических методов для решения связанной задачи гидроупругости с соответствующими граничными условиями. Рассмотрим бесконечно длинную вязкоупругую цилиндрическую оболочку, окруженную упругой средой, внутри которой находится вязкая несжимаемая жидкость.

Уравнения движения вязкой несжимаемой жидкости и уравнение неразрывности в цилиндрической системе координат r, ϑ, x записываются в случае осесимметричного течения в виде [4]

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \text{grad} \frac{1}{2} V^2 + \text{rot} \bar{V} \times \bar{V} + \frac{1}{\rho} \text{grad} p = -\nu \text{rot rot} \bar{V};$$

$$\text{div} \bar{V} = 0.$$
(1)

На границе с оболочкой при $r = R_1$ выполняются условия прилипания жидкости

$$\frac{\partial U}{\partial t} = V_x + U \frac{\partial V_x}{\partial x} - W \frac{\partial V_x}{\partial r}$$

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = V_r + U \frac{\partial V_r}{\partial x} - W \frac{\partial V_r}{\partial r}.$$
(2)

Здесь t – время; V_r, V_x – проекции вектора скорости жидкости \bar{V} на оси цилиндрической системы координат; p – давление; ρ – плотность; ν – кинематический коэффициент вязкости; U – продольное упругое перемещение оболочки; W – прогиб, положительный внутрь оболочки; R_1 – внутренний радиус оболочки.

В случае осевой симметрии используя гипотезу Кирхгофа-Лява, имеем связь между компонентами деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ и перемещениями [5]

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U}{\partial x} - z \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \varepsilon_y = -\frac{1}{R} W,$$
(3)

где R – радиус срединной поверхности оболочки, z – расстояние от нее. Связь между компонентами напряжений σ_x, σ_y и деформаций зададим уравнениями квадратичной теории вязкоупругости [6], учитывающей линейную упругость объёмных деформаций

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu_0^2} (\varepsilon_x + \mu_0 \varepsilon_y) - \frac{E}{1+\mu_0} \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} (1+a\varepsilon_u^2) e_x d\tau,$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu_0^2} (\varepsilon_y + \mu_0 \varepsilon_x) - \frac{E}{1+\mu_0} \alpha \int_{-\infty}^t e^{-\beta(t-\tau)} (1+a\varepsilon_u^2) e_y d\tau.$$
(4)

Здесь E – модуль Юнга, μ_0 – коэффициент Пуассона материала оболочки; α, β, a – параметры вязкоупругости; ε_u^2 – квадрат интенсивности деформаций, e_x, e_y – компоненты деватора деформаций

$$\varepsilon_u^2 = \frac{4}{3} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 - \varepsilon_x \varepsilon_y); \quad e_x = \frac{2}{3} \varepsilon_x - \frac{1}{3} \varepsilon_y, \quad e_y = \frac{2}{3} \varepsilon_y - \frac{1}{3} \varepsilon_x.$$
(5)

Разлагая функции $(1+a\varepsilon_u^2)e_x, (1+a\varepsilon_u^2)e_y$ в ряды Тейлора по степеням $(t-\tau)$, при условии $\beta t \gg 1$ и сохраняем два члена разложения, из формул (4) получим приближенные уравнения состояния [1-3]

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu_0^2} (\varepsilon_x + \mu_0 \varepsilon_y) + p \left[\frac{2}{3} \varepsilon_x - \frac{1}{3} \varepsilon_y + a (e_x^2 e_x) \right],$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\mu_0^2} (\varepsilon_y + \mu_0 \varepsilon_x) + p \left[\frac{2}{3} \varepsilon_y - \frac{1}{3} \varepsilon_x + a (e_y^2 e_y) \right].$$
(6)

где введен оператор p , такой, что

$$pf = \frac{E}{1 + \mu_0} \left(\frac{\alpha}{\beta^2} \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\alpha}{\beta} f \right) \quad (7)$$

Вычислим с использованием (6) усилия и моменты по формулам [5]

$$N_x = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x dz, N_y = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_y dz, M_x = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_x z dz, M_y = \int_{-\frac{h_0}{2}}^{\frac{h_0}{2}} \sigma_{yz} z dz \quad (8)$$

и подставим их в систему динамических уравнений оболочки [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = -q_x, \quad \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{1}{R} N_y + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial x} N_x \right) - \rho_0 h_0 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = \\ = -q_n - \rho_0 h_0 \left[k_1 \frac{c_0^2}{l^2} W - k_2 \frac{c_0^2 l^2}{R^6} W^3 - 2t_1 c_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь h_0 , ρ_0 - толщина и плотность материала оболочки; q_x, q_n напряжения, действующие со стороны жидкости на поверхность оболочки, снесенные на ее невозмущенную поверхность ($W \ll R$)

$$q_x = \left[\rho v \left(\frac{\partial V_x}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial x} \right) \right]_{r=R}, \quad q_n = \left[-\rho + 2\rho v \frac{\partial V_r}{\partial r} \right]_{r=R} \quad (10)$$

Выражение в квадратных скобках во втором уравнении (9) представляет реакцию упругой среды, в которой расположена труба кругового сечения

Власова-Леонтьева [7], где $k_1 \frac{c_0^2}{l^2} W - k_2 \frac{c_0^2 l^2}{R^6} W^3$ - реакция на сдавливание (сжатие), $-2t_1 c_0^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}$ - реакция на сдвиг, $m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}$ - реакция инерции основания.

Коэффициенты k_1, k_2, t_1, m определены в [7].

2. Принимая l за характерную длину волны деформации, перейдем к безразмерным переменным для исследования уравнений динамики оболочки (3)-(9)

$$W = w_m u_3, \quad U = u_m u_1, \quad t^* = \frac{c_0}{l} t, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho_0 (1 - \mu_0^2)}}. \quad (11)$$

здесь c_0 - скорость звука в оболочке

Положим

$$\begin{aligned} \frac{u_m}{l} = \varepsilon = o(1), \quad \frac{w_m}{R} = O(\varepsilon), \quad a = O(\varepsilon^{-1}), \quad \frac{\alpha}{\beta} = O(1), \\ \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{c_0}{l} = O(\varepsilon), \quad \frac{R}{l} = O(\varepsilon^{1/2}), \quad \frac{h_0}{R} = O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (12)$$

где $\varepsilon \ll 1$ - малый параметр.

Применим метод двухмасштабных разложений, вводя независимые переменные в виде

$$\xi = x^* - ct^*, \quad \tau = \varepsilon t^*, \quad (13)$$

где c - безразмерная неизвестная скорость волны. Зависимые переменные представлены в виде разложения по малому параметру ε

$$u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \dots, \quad u_3 = u_{30} + \varepsilon u_{31} + \dots \quad (14)$$

Подставляя (11), (13), (14) в уравнения (9) с учетом оценок (12), получим в нулевом приближении по ε линейную систему уравнений, из которой следует связь

$$\frac{w_m}{R} u_{30} = \mu_1 \frac{u_m}{l} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi}, \mu_1 = \frac{\mu_0 + \frac{1}{3}(1-\mu_0) \frac{\alpha}{\beta}}{1 - \frac{2}{3}(1-\mu_0) \frac{\alpha}{\beta}} \quad (15)$$

и определяется безразмерная скорость волны

$$c^2 = \left[1 - \frac{2}{3}(1-\mu_0) \frac{\alpha}{\beta} \right] (1 - \mu_1^2). \quad (16)$$

Из следующего приближения по ε , учитывая (15) и (16), получается уравнение для u_{10}

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi \partial \tau} + \frac{c}{2} \frac{R^2}{l^2 \varepsilon} \mu_1^2 \left(1 + m - \frac{2t_1}{c^2} \right) \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} - \\ - \left\{ \frac{2}{3} \frac{(1-\mu_0) \frac{\alpha}{\beta}}{c} \left[1 + \mu_1^4 + (1 + \mu_1)^4 \right] \frac{a}{\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 + \frac{3}{2c} \frac{1}{\varepsilon} \frac{u_m^2}{R^2} k_2 \mu_1^4 \right\} \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} - \\ - \frac{1}{3} (1-\mu_0) \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{c_0}{l \varepsilon} (1 + \mu_1 + \mu_1^2) \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_1^2}{2c} k_1 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} = \\ = - \frac{l^2}{\varepsilon u_m \rho_0 h_0 c_0^2 2c} \left[q_x - \mu_1 \frac{R}{e} \frac{\partial q_n}{\partial \xi} \right] \end{aligned} \quad (17)$$

3. Для определения правой части уравнения (17) введем безразмерные переменные и параметры

$$\begin{aligned} V_r = w_m \frac{c_0}{l} v_r, \quad V_x = w_m \frac{c_0}{R_1} v_x, \quad r^* = \frac{r}{R_1}, \quad p = \frac{\rho v c_0 l w_m}{R_1^3} P; \\ \psi = \frac{R_1}{l} = o(\varepsilon^{\frac{1}{2}}), \quad \lambda = \frac{w_m}{R_1}, \quad \psi \ll 1, \quad \lambda \ll 1 \end{aligned} \quad (18)$$

Подставляя (18) в уравнения гидродинамики (1) и граничные условия (2), представим безразмерные скорость и давление в виде разложения по малому параметру λ

$$v_x = v_x^0 + \lambda v_x^1 + \dots, \quad v_r = v_r^0 + \lambda v_r^1 + \dots, \quad P = P^0 + \lambda P^1 + \dots \quad (19)$$

В нулевом приближении по ψ ($\psi \approx 0$ – гидравлическая теория смазки), считая $\psi (R_1 c_0 / \nu) \ll 1$ (– ползущие течения [8,9]), и в нулевом приближении по λ получаем уравнения гидродинамики (классические уравнения гидродинамической теории смазки)

$$\frac{\partial P^0}{\partial r^*} = 0, \quad \frac{\partial P^0}{\partial x} = \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right), \quad \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* v_r^0) + \frac{\partial v_x^0}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

и граничные условия

$$r^* \frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = 0, \quad r^* \frac{\partial v_r^0}{\partial r^*} = 0 \quad \text{при } r^* = 0$$

$$v_r^0 = -\frac{\partial u_{30}}{\partial t^*}, \quad v_x^0 = \frac{u_m R_1}{W_m l} \frac{\partial u_{10}}{\partial t^*} \quad \text{при } r^* = 1$$
(21)

Из решения уравнений (20), (21) следует, что

$$P^0 = 16 \int \left[\frac{1}{2} \frac{u_m R_1}{w_m l} \frac{\partial u_{10}}{\partial t^*} - \int \frac{\partial u_{30}}{\partial t^*} dx^* \right] dx^*,$$

$$\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} = \frac{1}{2} r^* \frac{\partial P_0}{\partial x^*}.$$
(22)

С принятой точностью по $\varepsilon, \psi, \lambda$ из (5) найдем

$$q_x = \rho v \frac{w_m c_0}{R_1^2} \frac{\partial v_x^0}{\partial R^*} \Big|_{r^*=1}, \quad q_n = -\rho v \frac{w_m c_0}{R_1^2} \frac{l}{R_1} P^0.$$

Тогда выражение в квадратных скобках правой части (17) примет вид

$$\left[q_x - \mu_1 \frac{R}{l} \frac{\partial q_n}{\partial \varepsilon} \right] = \rho v \frac{w_m c_0}{R_1^2} \left[\left(\frac{\partial v_x^0}{\partial r^*} \right)_{r^*=1} + \mu_1 \frac{R}{l} \frac{l}{R_1} \frac{\partial P^0}{\partial x^*} \right] =$$

$$= \rho v \frac{w_m c_0}{R_1^2} \frac{1}{2} \frac{\partial P^0}{\partial \xi} \left[1 + 2\mu_1 \frac{R}{R_1} \right]$$
(23)

Учитывая (19) (20) и (23), получим

$$P^0 = 8c \frac{u_m R_1}{w_m l} \left[2\mu_1 \frac{R}{R_1} - 1 \right] u_{10}$$
(24)

Следовательно, в правой части уравнения (17) остается выражение

$$2 \frac{\rho l v}{\rho_0 h_0 R_1 c_0 \varepsilon} \left[1 - \left(2\mu_1 \frac{R}{R_1} \right)^2 \right] \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi^2}$$
(25)

с принятой точностью по ψ, ε $R_1 \approx R$

Подставляя (25) в уравнение (17), окончательно получим

$$\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2 \partial \tau} + \frac{c}{2 l^2 \varepsilon} \mu_1^2 \left(1 + m - \frac{2t_1}{c^2} \right) \frac{\partial^4 u_{10}}{\partial \xi^4} +$$

$$+ \left\{ \frac{2}{3} \frac{(1-\mu_0) \alpha}{c} \frac{\beta}{\varepsilon} \left[1 + \mu_1^4 + (1 + \mu_1)^4 \right] \frac{a}{\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 + \frac{3}{2c} \frac{1}{\varepsilon} \frac{u_m}{R^2} k_2 \mu_1^4 \right\} \left(\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} \right)^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} -$$

$$- \frac{1}{3} (1-\mu_0) \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{c_0}{l \varepsilon} (1 + \mu_1 + \mu_1^2) \frac{\partial^3 u_{10}}{\partial \xi^3} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_1^2}{2c} k_1 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial \xi^2} -$$

$$- 2 \left[1 - (2\mu_1)^2 \right] \frac{\rho l v}{\rho_0 h_0 R_1 c_0 \varepsilon} \frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = 0$$
(26)

При отсутствии жидкости $\rho = 0$ последнее слагаемое в левой части уравнения выпадает и оно превращается в уравнение Гарднера-Бюргера для $\partial u_{10} / \partial \xi$ имеющее точное частное решение. В зависимости от физических параметров величина μ_1 может быть больше $1/2$, меньше $1/2$ или равна $1/2$.

Последний случай эквивалентен отсутствию жидкости, но означает, что она не влияет на волну деформации.

Легко видеть, что замена

$$\frac{\partial u_{10}}{\partial \xi} = c_3 \varphi, \quad \eta = c_1 \xi, \quad t = c_2 \tau \quad (27)$$

позволяет записать уравнение (26) в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \eta^3} - 6\sigma_1 \varphi^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \sigma_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \sigma_3 \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} - \sigma \varphi = 0. \quad (28)$$

Здесь $\sigma = 1$ при $\mu_1 < 1/2$, $\sigma = -1$ при $\mu_1 > 1/2$ и $\sigma = 0$ при $\mu_1 = 1/2$

Постоянные c_3, c_1, c_2 определяются по формулам

$$c_2 = 2\sigma \left[1 - (2\mu_1)^2 \right] \frac{\rho l v}{\rho_0 h_0 R_1 c_0 \varepsilon}, \quad c_1 = \left[c_2 \varepsilon \left(\frac{l}{R} \right)^2 \frac{2}{c \mu_1^2 \left(1 + m - \frac{2t_1}{c^2} \right)} \right]^{1/3},$$

$$c_3 = \left\{ \frac{c_1}{c_2 6\sigma_1} \left[\frac{2}{3} \frac{a}{\varepsilon} \left(\frac{u_m}{l} \right)^2 (1 - \mu_0) \frac{\alpha}{\beta} \frac{1 + \mu_1^4 + (1 + \mu_1)^4}{c} + 3k_2 \frac{1}{\varepsilon} \frac{u_m}{R^2} \frac{\mu_1^4}{2c} \right] \right\}^{1/2}$$

где

$$\sigma_2 = \frac{c_1^2}{c_2} \frac{1}{3} \frac{\alpha}{\beta^2} \frac{c_0}{l \varepsilon} (1 - \mu_0) (1 + \mu_1 + \mu_1^2); \quad \sigma_3 = \frac{c_1}{c_2} \frac{1}{\varepsilon} \frac{R^2}{l^2} \frac{\mu_1^2}{2c} k_1 \quad (29)$$

Точные частные решения уравнения (28) при $\rho = 0$ или $\mu_1 = 1/2$ будут

$$\varphi = \mp \frac{\sigma_2}{6} \mp k \operatorname{th} \left\{ k\eta + \left(2k^3 + \frac{\sigma_2 k}{6} - \sigma_3 k \right) t \right\}. \quad (30)$$

При численном решении уравнения (28) решение (30) при $t = 0$ можно использовать в качестве начального условия

$$\phi(\eta, t = 0) = \frac{\sigma_2}{6} + k \operatorname{th} \{ k\eta \}. \quad (31)$$

4. В работах [10-12] развит подход к построению разностных схем, основанный на построении переопределенной системы разностных уравнений, получаемой из аппроксимации интегральных законов сохранения и интегральных соотношений, связывающих искомые функции и их производные. Таким образом, получается разностная схема метода конечных объемов, автоматически обеспечивающая выполнение интегральных законов сохранения по областям, составленным из базовых конечных объемов.

Запишем уравнение (28) в интегральной форме

$$\oint_{\partial \Omega} (-\varphi_{\eta\eta} + 2\sigma_1 \varphi^3 + 2\sigma_2 \varphi_\eta - \sigma_3 \varphi) dt + \sigma \varphi d\eta - \iint_{\Omega} \sigma \varphi dt d\eta = 0 \quad (32)$$

для любой области Ω . Для перехода к дискретной формулировке сопоставим $u_j^n = \varphi(t_n, \eta_j)$ и выберем в качестве базового контур, показанный на рис.1.

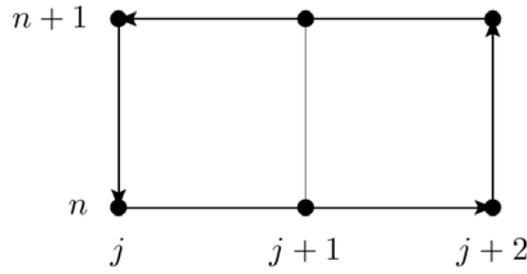


Рис. 1. Базовый контур для уравнения (32).

Добавим интегральные соотношения

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta} d\eta = u(t, \eta_{j+1}) - u(t, \eta_j) \quad (33)$$

$$\int_{\eta_j}^{\eta_{j+1}} u_{\eta\eta} d\eta = u_{\eta}(t, \eta_{j+1}) - u_{\eta}(t, \eta_j)$$

Используя для интегрирования по времени и по четным производным по η формулу трапеций, а по нечетным производным по η формулу среднего значения, и полагая $t_{n+1} - t_n = \tau$, $\eta_{j+1} - \eta_j = h$, перепишем соотношения (32), (33) в виде

$$\begin{aligned} & \left(-\left(u_{\eta\eta}^n + u_{\eta\eta}^{n+1} - u_{\eta\eta}^n - u_{\eta\eta}^{n+1} \right) + 2\sigma_1 \left(u_j^{3n} + u_j^{3n+1} - u_{j+2}^{3n} - u_{j+2}^{3n+1} \right) + \right. \\ & \left. + 2\sigma_2 \left(u_{\eta_j}^n + u_{\eta_j}^{n+1} - u_{\eta_{j+2}}^n - u_{\eta_{j+2}}^{n+1} \right) - \sigma_3 \left(u_j^n + u_j^{n+1} - u_{j+2}^n - u_{j+2}^{n+1} \right) \right) \cdot \frac{\tau}{2} + \\ & \left. + \left(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n \right) \cdot 2h - \sigma \left(u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n \right) \cdot h\tau = 0, \right. \quad (34) \\ & \left. \left(u_{\eta_{j+1}}^n + u_{\eta_j}^n \right) \cdot \frac{h}{2} = u_{j+1}^n - u_j^n, \quad u_{\eta_{j+1}}^n \cdot 2h = u_{\eta_{j+2}}^n - u_{\eta_j}^n. \right. \end{aligned}$$

Используем для построения базисов Грёбнера, в случае разностных идеалов, библиотеку с полиномиальными модулями, реализованную в системе компьютерной алгебры Singular (<http://www.singular.uni-kl.de/>).

В результате получим следующую разностную схему для уравнения (28), аналогичную схеме Кранка-Николсона для уравнения теплопроводности

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{(u_{j+2}^{n+1} - 2u_{j+1}^{n+1} + 2u_{j-1}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1}) + (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + 2u_{j-1}^n - u_{j-2}^n)}{4h^3} - \\ & - 2\sigma_1 \frac{(u_{j+1}^{3n+1} - u_{j-1}^{3n+1}) + (u_{j+1}^{3n} - u_{j-1}^{3n})}{4h} + \\ & - \sigma_2 \frac{(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)}{2h^2} + \\ & + 2\sigma_3 \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} - \sigma \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} = 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Полученные неявные разностные схемы имеют кубическую нелинейность для следующего временного слоя. При построении решения использована следующая линеаризация

$$v_{k+1}^3 = v_{k+1}^3 - v_k^3 + v_k^3 = (v_{k+1} - v_k)(v_{k+1}^2 + v_{k+1}v_k + v_k^2) + v_k^3 \approx v_{k+1} \cdot 3v_k^2 - 2v_k^3.$$

Количество итераций при расчетах для достижения точности 10^{-12} на следующем временном слое, как правило, не превышало 3. Шаг по времени t

брался равным половине шага по переменной η . Программа расчета была написана на языке Python с использованием пакета SciPy (<http://www.scipy.org/>).

Результаты проведенного компьютерного моделирования представлены на рис.2-4. Расчеты позволяют сделать следующие выводы. Наличие жидкости в оболочке, как и в работе [13], приводит к существенному изменению характера распространения в ней продольных волн деформаций. Если в оболочке нет жидкости (эквивалентно условию $\sigma = 0$), как и в работах [14,15], уединенная волна (кинк) движется, сохраняя свою первоначальную форму и скорость (рис.2).

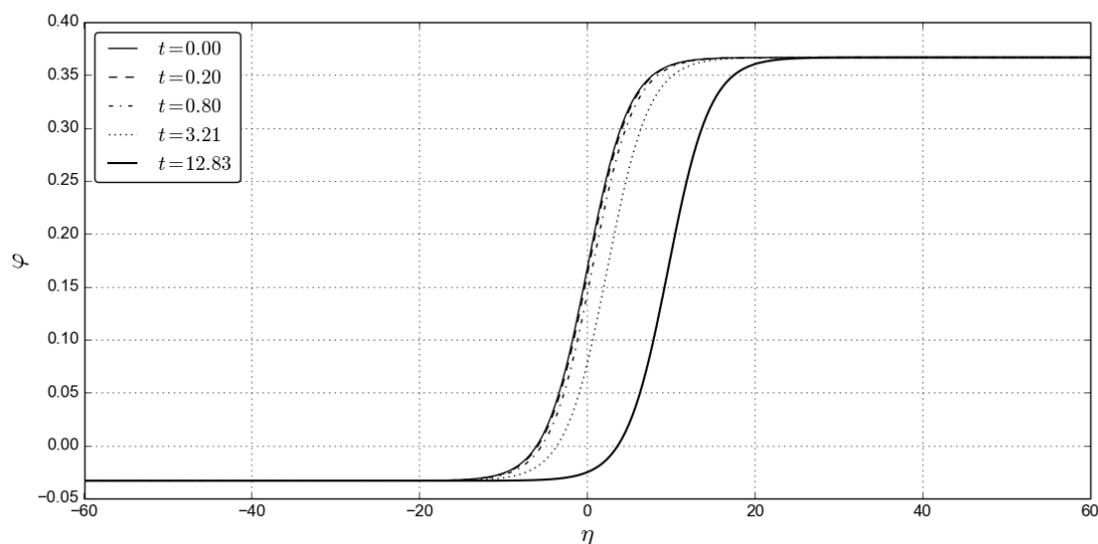


Рис.2. График численного решения уравнения (28) с начальным условием (31) при $\sigma_2 = 1.0$, $\sigma_3 = 1.0$, $\sigma = 0.0$, $k = 0.2$ и для $t = 0.0 \dots 12.83$.

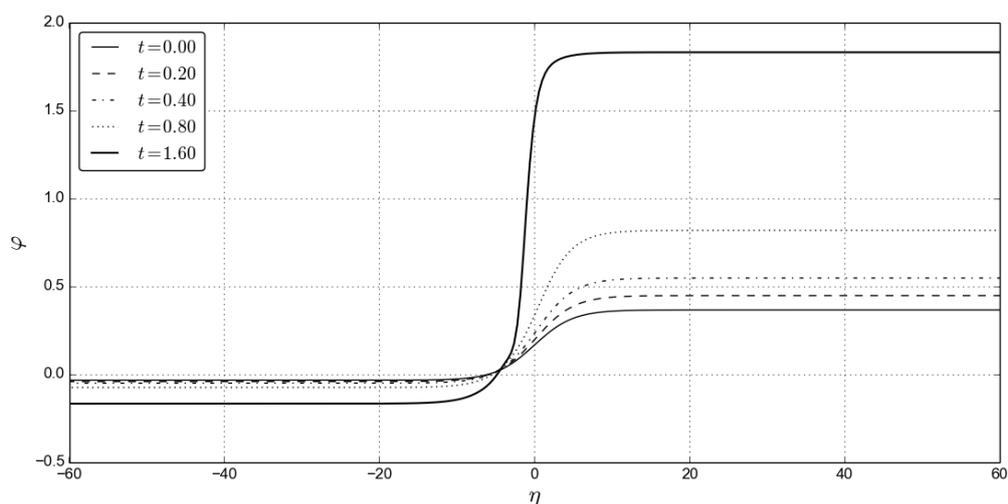


Рис.3. График численного решения уравнения (28) с начальным условием (31) при $\sigma_2 = 1.0$, $\sigma_3 = 1.0$, $\sigma = 1.0$, $k = 0.2$ и для $t = 0.0 \dots 1.60$.

Наличие жидкости в оболочке из неорганических материалов ($\sigma = 1$) ведет к росту амплитуды волны (рис.3). Таким образом, можно утверждать, что жидкость способствует постоянной дополнительной «подпитке» энергией (из источника первоначального возбуждения), обеспечивающей рост амплитуды.

Наличие жидкости в оболочке из органических материалов (живые организмы, что соответствует $\sigma = -1$) ведет к быстрому уменьшению амплитуды волны, то есть к её затуханию (см.рис.4). Для поддержания процесса распространения волны необходимо периодическое её возбуждение.

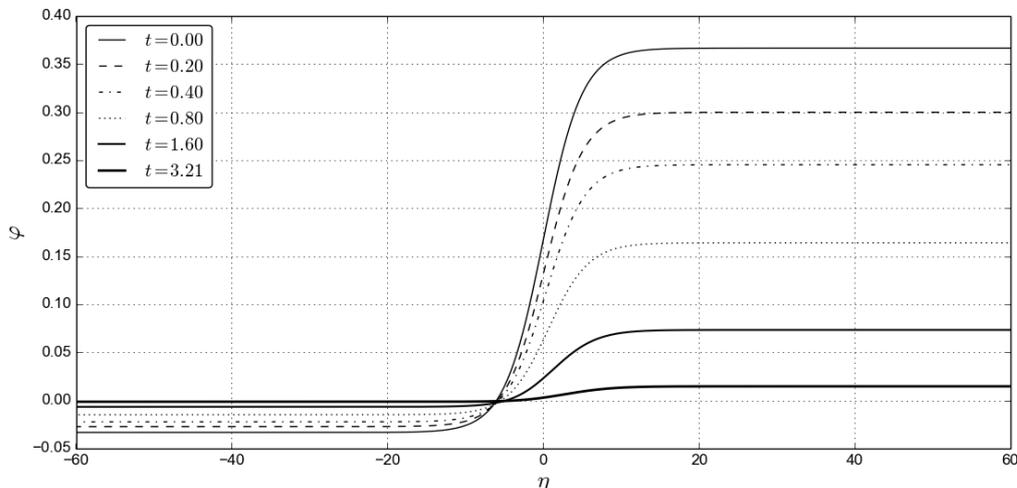


Рис.4. График численного решения уравнения (28) с начальным условием (31) при $\sigma_2 = 1.0$, $\sigma_3 = 1.0$, $\sigma = -1.0$, $k = 0.2$ и для $t = 0.0 \dots 3.21$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное моделирование с использованием компьютерной алгебры позволило выявить особенности поведения волн деформаций в физически нелинейной упругой цилиндрической оболочке, содержащей вязкую несжимаемую жидкость.

Использование базиса Грёбнера для генерации разностной схемы при численном решении задачи Коши для нелинейного уравнения в частных производных третьего порядка по пространственной переменной, позволило получить результат расчета без осцилляций, вызываемых численной реализацией. Численная схема также была протестирована на точном решении для $\sigma = 0$ (рис.2).

Полученные результаты расчета показали влияние вязкой несжимаемой жидкости на поведение нелинейной волны деформации в оболочке в зависимости от величины параметра μ_1 , характеризующего материал оболочки: рост амплитуды уединенной волны для $\mu_1 < 1/2$; падения амплитуды уединенной волны для $\mu_1 > 1/2$; сохранение амплитуды уединенной волны для $\mu_1 = 1/2$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны в цилиндрических оболочках: солитоны, симметрии, эволюция. – Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1999. – 132 с.
2. *Аршинов Г.А., Землянухин А.И., Могилевич Л.И.* Двумерные уединенные волны в нелинейной вязкоупругой деформируемой среде // РАН Акустический журнал. – 2000. – Т.46. – №1. – С.116-117.

3. *Аршинов Г.А., Могилевич Л.И.* Статические и динамические задачи вязкоупругости. – Саратов: Сарат. гос. агр. ун-т, 2000. – 152 с
4. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Дрофа, 2003. – 840 с.
5. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 328 с.
6. *Москвитин В.В.* Сопротивление вязко-упругих материалов. – М.: Наука, 1972. – 328 с
7. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании. – М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1960. – С.490.
8. *Чивилихин С.А., Попов И.Ю., Гусаров В.В.* Динамика скручивающихся нанотрубок в вязкой жидкости // Доклады РАН. – 2007. – Т.412. – №2. – С.201-203.
9. *Попов Ю.И., Розыгина О.А., Чивилихин С.А., Гусаров В.В.* Солитоны в стенке нанотрубки и стоково течение в ней // Письма в ЖТФ. – 2010. – Т.36. – Вып.18. – С.42-54.
10. *Блинков Ю.А., Мозжилкин В.В.* Генерация разностных схем для уравнения Бюргерса построением базисов Грёбнера // Программирование. – 2006. – Т.32. – №2. – С.71-74.
11. *Gerdt V.P., Blinkov Yu.A., Mozhilkin V.V.* Gröbner bases and generation of difference schemes for partial differential equations // Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications. – 2006. – Vol.2. – P.26. – <http://www.emis.de/journals/SIGMA/2006/Paper051/index.html>.
12. *Gerdt V.P., Blinkov Yu.A.* Involution and difference schemes for the Navier-Stokes equations // Computer Algebra in Scientific Computing. – Berlin/Heidelberg: Springer, 2009. – Vol.5743 of Lecture Notes in Computer Science. – P.94-105.
13. *Блинков Ю.А., Ковалева И.А., Кузнецова Е.Л., Могилевич Л.И.* Нелинейные волны в трех упругих соосных цилиндрических оболочках, содержащих вязкую несжимаемую жидкость между ними // Труды МАИ (электронный журнал). – 2014. – №75. – 15 с.
14. *Данилин А.Н., Кузнецова Е.Л., Рабинский Л.Н.* Модель гистерезиса энергорассеяния при колебаниях механических систем // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2014. – №4. – С.45-67.
15. *Формалев В.Ф., Кузнецова Е.Л.* Исследование теплопереноса в нелинейном анизотропном пространстве в условиях импульсного нагрева. // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №1. – С.87-96.

Поступила в редакцию 29 марта 2015 года.

Сведения об авторах:

Блинков Юрий Анатольевич – д.ф.-м.н., зав. кафедрой математического и компьютерного моделирования, ФГБОУ ВПО Саратовский государственный университет им.Н.Г. Чернышевского, г. Саратов, Россия

Кузнецова Екатерина Львовна – д.ф.-м.н., в.н.с., Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: lareyna@mail.ru

Могилевич Лев Ильич – д.т.н., проф., Московский государственный университет путей сообщения (Поволжский филиал), г. Саратов, Россия; e-mail: mogilevich@sgu.ru

Рабинский Лев Наумович – д.ф.-м.н., проф., декан, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: f9@mai.ru