

УДК 539.376

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ ИЗ НЕЛИНЕЙНО-НАСЛЕДСТВЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ С УЧЕТОМ ОСЛАБЛЕННОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ ПОПЕРЕЧНЫМ СДВИГАМ¹

Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А.Христиановича
СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

РЕЗЮМЕ

На основе метода шагов по времени построена итерационная модель, описывающая реономное поведение слоистой среды регулярной структуры, состоящей из изотропных материалов, подчиняющихся определяющим уравнениям нелинейно-наследственной теории Ю.Н. Работнова. На базе теорий типа Тимошенко сформулирована задача расчета ползучести слоистых пластин, выполненных из указанных материалов, с учетом их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам. Исследовано изгибное поведение в условиях ползучести кольцевой пластины, изготовленной из регулярно чередующихся алюминиевых и стальных слоев. Показано, что при кратковременном нагружении классическая теория вполне приемлема для расчета механического поведения таких конструкций. При длительном же нагружении в процессе ползучести в слоистой пластине активно и ускоренно развиваются деформации поперечных сдвигов, поэтому учет ослабленного сопротивления поперечным сдвигам при расчетах на ползучесть тонкостенных элементов композитных конструкций обязателен. Податливость пластины, предсказываемая классической теорией и первым вариантом теории Тимошенко, существенно меньше, чем определяемая по второму варианту теории Тимошенко, поэтому для расчета ползучести слоистых пластин рекомендуется использовать именно второй вариант теории Тимошенко.

Ключевые слова: слоистая среда; регулярная структура; ползучесть; структурная теория; нелинейная наследственность; неупругое деформирование; изгибаемые пластины; теории типа Тимошенко

STUDY OF UNSTEADY CREEP OF LAMINATED PLATES FROM NONLINEAR-HEREDITARY MATERIALS OF REGULAR STRUCTURE IN VIEW OF WEAKENED RESISTANCE TO TRANSVERSE SHIFT

Yankovskii A.P.

*Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch of the
Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia*

SUMMARY

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-90400-Укр_а).

On the basis of method of steps in time the iterative model is built for describing the rheonomous behavior of layered medium of regular structure consisting of an isotropic material obeying constitutive equations of nonlinear-hereditary Yu. Rabotnov theory. Based on the theories of Timoshenko type the problem is formulated to calculate the creep of laminated plates of these materials, in view of their weakened resistance to the transverse shifts. The bending of annular plates made of regularly alternating aluminum and steel layers is investigated under creep conditions. It is shown that the classical theory is quite acceptable for the calculation of the behavior of such structures under short-term loading. At long load of the layered plate the deformations of the transverse shifts are actively and rapidly developed in the process of creep, therefore, the account of weakened resistance to the transverse shifts in the calculations on the creep of thin-walled elements in composite structures is required. The compliance of the plate predicted by the classical theory and the first version of the Timoshenko theory is substantially less than that which is determined according to the second version of the theory of Timoshenko. Therefore, it is recommended to use the second option Timoshenko theory for the calculation of creep of laminated plates.

Keywords: layered medium; regular structure; creep; structural theory; nonlinear heredity; inelastic deformation; flexural plates; theory of Timoshenko type

ВВЕДЕНИЕ

Все материалы в условиях длительного нагружения в большей или меньшей степени проявляют реономные свойства [1], поэтому актуальной является проблема изучения особенностей механического поведения композитных конструкций (в том числе и слоистых тонкостенных элементов регулярной структуры), работающих в условиях неустановившейся ползучести. Для решения этой проблемы, с одной стороны, нужно построить структурную модель рассматриваемой среды, материалы фаз которой обладают определенными реономными свойствами, а с другой стороны, при исследовании изгибного поведения тонкостенных элементов конструкций типа композитных балок, пластин и оболочек необходимо обоснованно выбрать ту или иную модель их деформирования в условиях изгиба.

Так, в работе [2] дан краткий обзор структурных моделей различных композитных сред, обладающих реономными свойствами. Из этого обзора следует, что на сегодняшний день отсутствуют структурные модели, базирующиеся на технических теориях неустановившейся ползучести, что не позволяет рассматривать, например, реономное поведение металлокомпозитных сред. С другой стороны, в [2,3] показано, как можно моделировать поведение композитных сред, материалы фаз композиции которых подчиняются нелинейно-наследственной теории ползучести Ю.Н. Работнова [1,4]. Эта теория описывает реономное поведение не только полимерных материалов, но и некоторых металлов на стадиях упрочнения и установившейся ползучести [1,4]. Следовательно, на базе данной теории можно описать с единых позиций неустановившуюся ползучесть композитных конструкций, состоящих как из полимерных, так и металлических материалов компонентов композиции.

В работах [2,5] была исследована ползучесть армированных и слоистых балок-стенок регулярной структуры, материалы фаз композиции которых описываются нелинейно-наследственной теорией ползучести Ю.Н. Работнова, где было показано, что при изгибном деформировании таких конструкций, даже если они выполнены из металлокомпозиций, необходимо учитывать их ослабленное

сопротивление поперечным сдвигам. До настоящего же времени ползучесть тонкостенных слоистых элементов конструкций в основном исследовалась в рамках классических теорий их изгибного деформирования [6 и др.], в рамках которых ослабленное сопротивление поперечным сдвигам не учитывается.

Исследованные в [2,5] композитные балки-стенки являются простейшими типами тонкостенных элементов конструкций, в которых реализуется обобщенное плоское напряженное состояние. В тонкостенных же элементах более сложной геометрии (пластинах и оболочках) при учете в них ослабленного сопротивления поперечным сдвигам имеет место объемное напряженное состояние, поэтому в силу нелинейного поведения материалов фаз композиции (в рамках указанной теории ползучести Ю.Н. Работнова) деформирование пластин и оболочек в условиях неустановившейся ползучести может обладать особенностями, которые не проявляются при изгибе композитных балок-стенок.

В связи с этим, настоящая работа посвящена изучению реономного поведения слоистых пластин регулярной структуры, механическое поведение материалов фаз композиции которых описывается соотношениями нелинейно-наследственной теории ползучести Ю.Н. Работнова, с учетом их (пластин) ослабленного сопротивления поперечным сдвигам.

1. ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ УРАВНЕНИЯ СЛОИСТОЙ КОМПОЗИТНОЙ СРЕДЫ ИЗ НЕЛИНЕЙНО-НАСЛЕДСТВЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Рассмотрим в декартовой прямоугольной системе координат x_1, x_2, x_3 гибридный слоистый композит (рис.1), состоящий из N семейств регулярно чередующихся в направлении x_3 тонких изотропных слоев с относительным объемным содержанием ω_k ($k = 1, 2, \dots, N$) в произвольно выделенном представительном элементе. При этом выполняется условие нормировки

$$\sum_{k=1}^N \omega_k = 1 \quad (\omega_k > 0, \quad k = 1, 2, \dots, N). \quad (1)$$

Предполагается, что механическое поведение материалов всех фаз композитной среды описывается соотношениями нелинейно-наследственной теории ползучести Ю.Н. Работнова [1,4,7]

$$g_1^{(k)}(\varepsilon_*^{(k)}, \varepsilon_0^{(k)}) (\varepsilon_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \varepsilon_0^{(k)}) = s_{ij}^{(k)}(t) + \int_0^t K_1^{(k)}(t-\tau) s_{ij}^{(k)}(\tau) d\tau, \quad (2)$$

$$g_0^{(k)}(\varepsilon_*^{(k)}, \varepsilon_0^{(k)}) \varepsilon_0^{(k)} = \sigma_0^{(k)}(t) + \int_0^t K_0^{(k)}(t-\tau) \sigma_0^{(k)}(\tau) d\tau \quad (i, j = \overline{1, 3}, \quad 1 \leq k \leq N),$$

где

$$\varepsilon_0^{(k)} = \frac{1}{3} (\varepsilon_{11}^{(k)} + \varepsilon_{22}^{(k)} + \varepsilon_{33}^{(k)}), \quad \sigma_0^{(k)} = \frac{1}{3} (\sigma_{11}^{(k)} + \sigma_{22}^{(k)} + \sigma_{33}^{(k)}),$$

$$g_1^{(k)}(\varepsilon_*^{(k)}, \varepsilon_0^{(k)}) = \frac{2\sigma_*^{(k)}(\varepsilon_*^{(k)}, \varepsilon_0^{(k)})}{3\varepsilon_*^{(k)}}, \quad s_{ij}^{(k)} = \sigma_{ij}^{(k)} - \delta_{ij} \sigma_0^{(k)} \quad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$\varepsilon_*^{(k)} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(\varepsilon_{11}^{(k)} - \varepsilon_{22}^{(k)})^2 + (\varepsilon_{22}^{(k)} - \varepsilon_{33}^{(k)})^2 + (\varepsilon_{33}^{(k)} - \varepsilon_{11}^{(k)})^2 + \right.$$

$$\left. + 6(\varepsilon_{12}^{(k)2} + \varepsilon_{23}^{(k)2} + \varepsilon_{31}^{(k)2}) \right]^{1/2}, \quad \sigma_*^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_{11}^{(k)} - \sigma_{22}^{(k)})^2 + (\sigma_{22}^{(k)} - \sigma_{33}^{(k)})^2 + \right.$$

$$+ \left(\sigma_{33}^{(k)} - \sigma_{11}^{(k)} \right)^2 + 6 \left(\sigma_{12}^{(k)2} + \sigma_{23}^{(k)2} + \sigma_{31}^{(k)2} \right) \Big]^{1/2} \quad (3)$$

$$K_l^{(k)}(t) = t^{-\alpha_l^{(k)}} B_l^{(k)}(t), \quad 0 \leq \alpha_l^{(k)} < 1, \quad l = 0, 1, \quad 1 \leq k \leq N, \quad (4)$$

$g_0^{(k)}(\varepsilon_*^{(k)}, \varepsilon_0^{(k)})$ – известный из эксперимента мгновенный объемный модуль материала k -го компонента композиции; остальные функции и величины имеют тот же смысл, что и в [2] (см. там соотношения (1), (2), (4)).

Зависимости функций $g_0^{(k)}, g_1^{(k)}$ от двух аргументов $\varepsilon_*^{(k)}, \varepsilon_0^{(k)}$ позволяют учитывать свойство разносопротивляемости материалов фаз композиции.

Предполагается, что до начального момента времени $t = t_0 = 0$ все материалы фаз и композиция в целом находятся в естественном состоянии, т.е. функции $\sigma_{ij}^{(k)}$ принадлежат классу Хевисайда [1,4,7,8] (см. (3) в [2]).

Как и в [2], для описания механического поведения рассматриваемой композитной среды используем идею метода шагов по времени, т.е. будем определять механическое состояние слоистой среды в дискретные моменты времени t_m ($m = 0, 1, 2 \dots$), причем предполагается, что в моменты времени t_m ($m = 0, 1, 2, \dots, n$) решение задачи уже известно, т.е. известны значения величин (см. (2), (3))

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(k)} \equiv \sigma_{ij}^{(k)}(t_m), \quad \varepsilon_{ij}^{(k)} \equiv \varepsilon_{ij}^{(k)}(t_m), \quad s_{ij}^{(k)} \equiv s_{ij}^{(k)}(t_m), \quad \sigma_0^{(k)} \equiv \sigma_0^{(k)}(t_m), \\ \varepsilon_0^{(k)} \equiv \varepsilon_0^{(k)}(t_m), \quad \varepsilon_*^{(k)} \equiv \varepsilon_*^{(k)}(t_m), \quad \sigma_*^{(k)} \equiv \sigma_*^{(k)}(t_m), \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad m = \overline{0, n}, \quad 1 \leq k \leq N. \end{aligned} \quad (5)$$

Повторяя рассуждения из [2], на основании соотношений (2)-(5) для рассматриваемого момента времени t_{n+1} определяющие уравнения для материала k -го компонента композиции можно записать в матричной форме

$$\sigma_k^{n+1} = \mathbf{p}_k^n + A_k^{n+1} \varepsilon_k^n, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_k^{n+1} &= \left\{ \sigma_1^{(k)}, \sigma_2^{(k)}, \sigma_3^{(k)}, \sigma_4^{(k)}, \sigma_5^{(k)}, \sigma_6^{(k)} \right\}^* \equiv \left\{ \sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{31}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)} \right\}^*, \\ \mathbf{p}_k^n &= \left\{ p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, p_3^{(k)}, p_4^{(k)}, p_5^{(k)}, p_6^{(k)} \right\}^* \equiv \left\{ p_{11}^{(k)}, p_{22}^{(k)}, p_{33}^{(k)}, p_{23}^{(k)}, p_{31}^{(k)}, p_{12}^{(k)} \right\}^*, \\ \varepsilon_k^{n+1} &= \left\{ \varepsilon_1^{(k)}, \varepsilon_2^{(k)}, \varepsilon_3^{(k)}, \varepsilon_4^{(k)}, \varepsilon_5^{(k)}, \varepsilon_6^{(k)} \right\}^* \equiv \left\{ \varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, \varepsilon_{23}^{(k)}, \varepsilon_{31}^{(k)}, \varepsilon_{12}^{(k)} \right\}^*; \end{aligned} \quad (7)$$

A_k^{n+1} – симметричные 6×6 -матрицы, ненулевые компоненты которых A_{ij}^{n+1} ($i, j = \overline{1, 6}$) определяются равенствами (10) в [2]; $\sigma_k^{n+1}, \varepsilon_k^{n+1}$ – шестикомпонентные вектор-столбцы напряжений и деформаций в материале k -го составляющего композиции; \mathbf{p}_k^n – известный в момент времени t_{n+1} шестикомпонентный вектор-столбец в том же материале, который можно трактовать как вектор «начальных напряжений» и компоненты которого $p_{ij}^{(k)}$ определены равенствами (9) в [2]; звездочка в верхнем индексе означает операцию транспонирования.

Соотношения (6) с учетом равенств (9), (10) из [2] в момент времени t_{n+1} можно трактовать как определяющие соотношения для k -го компонента композиции, механическое поведение которого характеризуется зависимостями нелинейно-упругого изотропного тела с начальным напряженным состоянием.

Предполагая, что левые части соотношений (2) с учетом (3) удовлетворяют достаточным условиям сходимости метода последовательных приближений (см. стр. 199 в [7]), линеаризуем соотношения (6). При этом считаем, что в момент времени t_{n+1} на некоторой m -й итерации известны приближения деформаций $\varepsilon_{ij,m}^{(k)}$ во всех компонентах композиции, тогда в силу формул (3) известны и m -ые приближения функций $\varepsilon_{*,m}^{n+1}$, $\varepsilon_{0,m}^{n+1}$. Для следующего же s -го приближения деформаций $\varepsilon_{ij,s}^{n+1}$ и напряжений $\sigma_{ij,s}^{n+1}$ будет справедливо линейное матричное соотношение (см. (6))

$$\sigma_{k,s}^{n+1} = \mathbf{p}_k + A_{k,m} \boldsymbol{\varepsilon}_{k,s}^{n+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad s = m + 1, \quad (8)$$

где $\sigma_{k,s}^{n+1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,s}^{n+1}$ – шестикомпонентные вектор-столбцы, имеющую структуру, аналогичную (7), и подлежащие определению; $A_{k,m}^{n+1}$ – симметричные 6×6 -матрицы, компоненты которых $A_{ij,m}^{(k)}$ известны на s -й итерации и вычисляются по формулам (10) из [2] при замене $\varepsilon_*^{(k)}$, $\varepsilon_0^{(k)}$ их m -ми приближениями $\varepsilon_{*,m}^{(k)}$, $\varepsilon_{0,m}^{(k)}$; вектор \mathbf{p}_k^n от номера итерации не зависит.

На основе соотношений (8) и гипотез, использованных в [9], в момент времени t_{n+1} на s -й итерации получим линейные определяющие уравнения для слоистой композитной среды регулярной структуры, которые в матричной форме имеют следующий вид

$$\sigma_{,s}^{n+1} = \mathbf{p}_{,m} + A_{,m} \boldsymbol{\varepsilon}_{,s}^{n+1}, \quad s = m + 1, \quad (9)$$

где $A_{,m}^{n+1}$ – известная 6×6 -матрица, $\mathbf{p}_{,m}^{n+1}$ – известный шестикомпонентный вектор-столбец, с учетом (1), (7) определяемые так

$$A_{,m}^{n+1} = \left(\sum_{k=1}^N \omega_k A_{k,m}^{n+1} E_{k,m}^{n+1} \right) H_{,m}^{n+1}, \quad \mathbf{p}_{,m}^{n+1} = \sum_{k=1}^N \omega_k \left[\mathbf{p}_k + A_{k,m}^{n+1} \left(\mathbf{S}_{k,m}^{n+1} + E_{k,m}^{n+1} \mathbf{S}_{,m}^{n+1} \right) \right] \quad (10)$$

$$H_{,m}^{n+1} = \left(\sum_{k=1}^N \omega_k E_{k,m}^{n+1} \right)^{-1}, \quad E_{k,m}^{n+1} = B_{k,m}^{-1} C_{,m}^{n+1}, \quad (11)$$

$$\mathbf{S}_{,m}^{n+1} = H_{,m}^{n+1} \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{S}_{k,m}^{n+1}, \quad \mathbf{S}_{k,m}^{n+1} = B_{k,m}^{-1} \mathbf{R}_k^n;$$

$B_{k,m}^{-1}$ – матрица, обратная $B_{k,m}^{n+1}$; $\sigma_{,s}^{n+1}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{,s}^{n+1}$ – шестикомпонентные вектор-столбцы, характеризующие s -ые приближения осредненных напряжений и деформаций в композиции (имеют структуру, аналогичную (7)). Ненулевые элементы 6×6 -

матриц $B_{k,m} = \begin{pmatrix} b_{ij,m}^{(k)} \end{pmatrix}$, $C_{,m} = \begin{pmatrix} c_{ij,m} \end{pmatrix}$ и шестикомпонентного вектор-столбца

$\mathbf{R}_k = \left\{ r_i^{(k)} \right\}$ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} b_{ll,m}^{(k)} = c_{ll,m} = 1 \quad (l = 1, 2, 6), \quad b_{ii,m}^{(k)} = A_{ii,m}^{(k)}, \quad c_{ii,m} = A_{ii,m}^{(1)} \quad (i = 4, 5), \\ b_{3j,m}^{(k)} = A_{3j,m}^{(k)}, \quad c_{3j,m} = A_{3j,m}^{(1)} \quad (j = 1, 2, 3), \quad r_i^{(k)} = p_i^{(1)} - p_i^{(k)} \\ (i = 3, 4, 5, \quad 1 \leq k \leq N). \end{aligned} \quad (12)$$

В процессе вывода соотношений (9)–(12) с учетом (1) получаются дополнительные равенства

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{1,s} = H_{,m} \boldsymbol{\varepsilon}_{,s} + \mathbf{S}_{,m}, \quad s = m + 1 \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{k,s} = E_{k,m} \boldsymbol{\varepsilon}_{1,s} + \mathbf{S}_{k,m}, \quad 1 \leq k \leq N, \quad s = m + 1 \quad (14)$$

Соотношение (13) определяет в матричной форме (см. (11)) s -ые приближения деформаций слоя с материалом первой фазы композиции $\boldsymbol{\varepsilon}_{1,s}^{n+1}$ через s -ые приближения осредненных деформаций представительного элемента композиции $\boldsymbol{\varepsilon}_{,s}^{n+1}$. Равенство же (14) определяет s -ые приближения деформаций слоя с материалом k -й фазы композиции $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,s}^{n+1}$ ($1 \leq k \leq N$) через s -ые приближения деформаций слоя с материалом первой фазы композиции $\boldsymbol{\varepsilon}_{1,s}^{n+1}$.

Таким образом, в момент времени t_{n+1} на s -й итерации равенство (9) задает в матричной форме определяющие соотношения для слоистой среды регулярной структуры, которые формально совпадают с законом Гука для анизотропного материала при наличии начального напряженного состояния, характеризуемого вектором $\mathbf{p}_{,m}^{n+1}$ (см. (10)). При этом матрицу $A_{,m}^{n+1}$ можно трактовать как матрицу эффективных жесткостей слоистого материала.

Если в моменты времени t_l ($0 \leq l \leq n$), как и предполагалось, известны значения функций (5), то согласно соотношениям (9) из [2] в равенствах (8) в момент времени t_{n+1} известны векторы «начальных» напряжений \mathbf{p}_k^n . Если, кроме того, в момент времени t_{n+1} известны и m -ые приближения деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,m}^{n+1}$ ($1 \leq k \leq N$) в каждом компоненте композиции внутри выделенного представительного элемента, то по формулам (10) из [2] с учетом (3), (7) можно определить все компоненты матриц $A_{k,m}^{n+1}$ в соотношениях (8), а значит, в силу формул (10)–(12) в определяющем уравнении (9) для представительного элемента композиции в целом известны 6×6 -матрица $A_{,m}^{n+1}$ и шестикомпонентный вектор-столбец $\mathbf{p}_{,m}^{n+1}$.

Решая на $(m+1)$ -й итерации в момент времени t_{n+1} соответствующую краевую задачу о линейно-упругом поведении эквивалентного материала с использованием соотношения (9), получим s -ые приближения полей осредненных напряжений $\overset{n+1}{\sigma}_{,s}$ и деформаций $\overset{n+1}{\epsilon}_{,s}$ ($s = m+1$) в слоистой композиции. Зная $\overset{n+1}{\epsilon}_{,s}$, по формулам (13), (14) (где матрицы $\overset{n+1}{H}_{,m}$, $\overset{n+1}{E}_{k,m}$ и векторы-столбцы $\overset{n+1}{S}_{,m}$, $\overset{n+1}{S}_{k,m}$ согласно (11), (12) уже вычислены для всех представительных элементов композиции в теле) можно последовательно определить s -ые приближения полей деформаций $\overset{n+1}{\epsilon}_{1,s}$, $\overset{n+1}{\epsilon}_{k,s}$ ($2 \leq k \leq N$) во всех компонентах слоистой среды регулярной структуры. Зная же $(m+1)$ -ые приближения деформаций фаз композиции $\overset{n+1}{\epsilon}_{k,s}$ ($1 \leq k \leq N$), по формулам (10) из [2] с учетом (3), (7) можно определить следующие приближения компонентов $\overset{n+1}{A}_{ij,s}^{(k)}$ матриц $\overset{n+1}{A}_{k,s}$ ($i, j = \overline{1, 6}$, $s = m+1$, $1 \leq k \leq N$), входящих в соотношения (8), где нужно заменить индекс « m » на « $m+1$ ». Затем можем повторить весь алгоритм решения для следующей итерации и т.д., пока итерационный процесс не сойдется с требуемой точностью. Для начала итерационного процесса в момент времени t_{n+1} можно использовать решение, уже полученное в предыдущий момент времени t_n (см. (5) при $m = n$).

Если в момент времени t_{n+1} итерационный процесс сошелся с требуемой точностью, т.е. известны деформации $\overset{n+1}{\epsilon}_k$ всех слоев композиции, то на основании (6) (или (8)) можно определить и напряженное состояние $\overset{n+1}{\sigma}_k$ ($1 \leq k \leq N$) во всех слоях композиции. Следовательно, с учетом (3) все величины, указанные в (5), становятся известными в момент времени t_{n+1} . Повторяя приведенные выше рассуждения, можем получить решение рассматриваемой задачи в следующий момент времени t_{n+2} и т.д. Учитывая, что в начальный момент времени $t = t_0 = 0$ значения величин (5) при $n = 0$ предполагались известными, а именно, равными нулю, можем последовательно по описанной выше схеме получить решение задачи о ползучести слоистой среды регулярной структуры из нелинейно-наследственных материалов в дискретные моменты времени t_n ($n = 0, 1, 2, \dots$).

В настоящем исследовании по умолчанию предполагалось, что функции $g_*^{(k)}$, $g_0^{(k)}$, $K_*^{(k)}$, $K_0^{(k)}$ в (2), (4) помимо указанных аргументов зависят и от температуры (материалы фаз являются термочувствительными [1,4,7,8]). Если, кроме того, учитываются и температурные деформации материалов компонентов композиции, то в левых частях равенств (2) появятся дополнительные слагаемые, которые можно трактовать как температурные напряжения. Относя эти напряжения к разряду «начальных напряжений» в материалах фаз композиции, т.е. объединяя их с $p_{ij}^{(k)}$ (см. (6), (7)), получим реализацию алгоритма шагов по времени, позволяющую моделировать ползучесть слоистых сред регулярной структуры из нелинейно-наследственных материалов при наличии теплового воздействия. Применяя к температурным полям допущения, аналогичные принятым в [9], с учетом (1) получим, что температура в каждом слое равна средней температуре представительного элемента композиции. Для расчета

температурного поля в эквивалентном материале нужно использовать общеизвестные соотношения теории теплопроводности для анизотропной среды и численные методы их интегрирования [10,11 и др.]. Для определения же эффективных коэффициентов теплопроводности рассматриваемой слоистой композиции можно использовать общеизвестную структурную модель [12].

2. ИЗГИБ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИН РЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ НЕЛИНЕЙНО-НАСЛЕДСТВЕННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В прямоугольной декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 рассмотрим тонкостенный плоский элемент толщиной $2h$, состоящий из регулярно чередующихся слоев, параллельных отсчетной плоскости (x_1, x_2) , которую совместим со срединной плоскостью элемента, а ось x_3 направим по толщине элемента (рис.1).

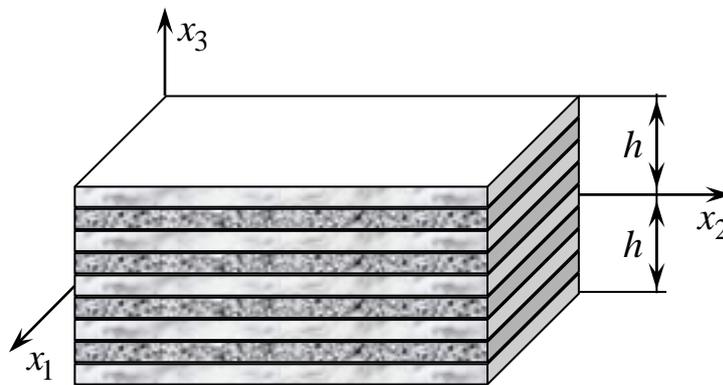


Рис.1. Элемент слоистой пластины регулярной структуры.

Как показано в работах [2,5] на примерах простейших тонкостенных элементов – композитных балок-стенок, выполненных из нелинейно-наследственных материалов, при изгибе тонкостенных слоистых элементов композитных конструкций регулярной структуры необходимо учитывать их ослабленное сопротивление поперечным сдвигам. В связи с этим, сдвиговые деформации в поперечном направлении x_3 в момент времени t_{n+1} (см. (5)) зададим распределенными по толщине пластины в следующем виде

$$\varepsilon_{i3}^{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{h^2 - \beta x_3^2}{h^2} \varepsilon_{i3}^{0(n+1)}(x_1, x_2) + \beta \frac{x_3 + h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(+n+1)}(x_1, x_2) - \beta \frac{x_3 - h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(-n+1)}(x_1, x_2), \quad (15)$$

$$|x_3| \leq h, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad i = 1, 2, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\},$$

где $\varepsilon_{i3}^{0(n+1)}$, $\varepsilon_{i3}^{(\pm n+1)}$ – функции только двух пространственных переменных x_1, x_2 , подлежащие определению и имеющие следующий смысл: $\varepsilon_{i3}^{(+n+1)}$, $\varepsilon_{i3}^{(-n+1)}$ – деформации поперечного сдвига на верхней ($x_3 = h$) и нижней ($x_3 = -h$) лицевых поверхностях пластины, при $\varepsilon_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$ функции $\varepsilon_{i3}^{0(n+1)}$ определяют деформации поперечного сдвига в срединной плоскости $x_3 = 0$ в момент времени t_{n+1} ; G –

область, занимаемая пластиной в плане; β – параметр переключения, позволяющий выбирать тот или иной вариант теории деформирования пластины.

Если в (15) принять $\beta = 0$, $\varepsilon_{i3}^0 \equiv 0$, то в дальнейшем получим соотношения, основанные на классической теории Кирхгофа [13,14]. Если же $\beta = 0$ при $\varepsilon_{i3}^{n+1} \neq 0$, то из (15) следуют соотношения первого варианта теории Тимошенко, основанного на кинематической гипотезе прямой линии [15,16]. В случае же $\beta = 1$ и $\varepsilon_{i3}^0 \neq 0$ из (15) вытекают соотношения второго варианта теории Тимошенко [16-18].

Согласно классической теории и теорий типа Тимошенко, обжатием тонкостенного элемента пренебрегаем, т.е. считаем, что прогиб u_3^{n+1} в момент времени t_{n+1} не зависит от координаты x_3

$$u_3^{n+1} = u_3^{n+1}(x_1, x_2). \quad (16)$$

Используя дифференциальные соотношения Коши [1,7] (в настоящем исследовании ограничимся геометрически линейной постановкой задачи изгиба относительно толстых пластин)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (17)$$

с учетом (15), (16) получим [17,19]

$$u_i^{n+1}(\mathbf{x}) = u_i^{n+1}(x_1, x_2) - x_3 \partial_i u_3^{n+1} + 2 \left[\frac{x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{\beta x_3^2}{3} \right) \varepsilon_{i3}^{n+1} + \frac{\beta x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} + h \right) \varepsilon_{i3}^{(+)} - \frac{\beta x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} - h \right) \varepsilon_{i3}^{(-)} \right], \quad |x_3| \leq h, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad i = 1, 2; \quad (18)$$

$$\varepsilon_{ii}^{n+1}(\mathbf{x}) = \partial_i u_i^0 - x_3 \partial_i^2 u_3^{n+1} + 2 \left[\frac{x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{\beta x_3^2}{3} \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{n+1} + \frac{\beta x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} + h \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(+)} - \frac{\beta x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} - h \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(-)} \right] \quad (i = 1, 2),$$

$$\varepsilon_{12}^{n+1}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left(\partial_2 u_1^0 + \partial_1 u_2^0 \right) - x_3 \partial_1 \partial_2 u_3^{n+1} + \frac{x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{\beta x_3^2}{3} \right) \left(\partial_2 \varepsilon_{13}^{n+1} + \partial_1 \varepsilon_{23}^{n+1} \right) + \quad (19)$$

$$+ \frac{\beta x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} + h \right) \left(\partial_2 \varepsilon_{13}^{(+)} + \partial_1 \varepsilon_{23}^{(+)} \right) - \frac{\beta x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} - h \right) \left(\partial_2 \varepsilon_{13}^{(-)} + \partial_1 \varepsilon_{23}^{(-)} \right),$$

$$|x_3| \leq h, \quad (x_1, x_2) \in G,$$

где u_i – перемещения в направлении x_i ; $u_i^0(x_1, x_2)$ – перемещения точек срединной плоскости ($x_3 = 0$) в момент времени t_{n+1} ; ∂_i – оператор частного дифференцирования по переменной x_i .

Таким образом, в момент времени t_{n+1} в соотношениях (15), (18), (19) неизвестными являются функции u_i^{n+1} , u_3^{n+1} , ε_{i3}^0 , $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ ($i=1, 2$), зависящие только от двух пространственных переменных x_1, x_2 .

В качестве статической гипотезы теории Тимошенко используем традиционное приближенное равенство (верное как в рамках теории Кирхгофа, так и в рамках теорий типа Тимошенко [13-18])

$$\sigma_{33}^{n+1}(\mathbf{x}) \equiv 0. \quad (20)$$

Так как материалы слоев пластины предполагаются изотропными и выполняются соотношения (26) из [9], то матрица A_m^{n+1} (см. (9), (10)) имеет блочно-диагональную структуру, причем она имеет те же ненулевые компоненты, что и матрицы $A_{k,m}^{n+1}$ в соотношениях (8) (см. (10) в [2]). Следовательно, линейные определяющие соотношения (9) с учетом (20) и (7) можно записать в следующем виде (исключив предварительно из рассмотрения $\varepsilon_{33,s}^{n+1}$)

$$\sigma_{ii,s}^{n+1} = \sum_{j=1}^2 A_{ijj,m}^{n+1} \varepsilon_{jj,s}^{n+1} + \sigma_{ii,m}^0 \quad (i=1, 2), \quad \sigma_{kl,s}^{n+1} = 2 A_{klkl,m}^{n+1} \varepsilon_{kl,s}^{n+1} + \sigma_{kl,m}^0 \quad (21)$$

$$(k \neq l, \quad k, l = 1, 2, 3, \quad s = m+1),$$

где

$$2 A_{1212,m}^{n+1} \equiv A_{66,m}^{n+1}, \quad 2 A_{1313,m}^{n+1} \equiv A_{55,m}^{n+1}, \quad 2 A_{2323,m}^{n+1} \equiv A_{44,m}^{n+1},$$

$$A_{ijj,m}^{n+1} \equiv A_{ij,m}^{n+1} - A_{i3,m}^{n+1} A_{3j,m}^{n+1} / A_{33,m}^{n+1}, \quad \sigma_{12,m}^0 \equiv p_{6,m}^{n+1}, \quad \sigma_{13,m}^0 \equiv p_{5,m}^{n+1}, \quad (22)$$

$$\sigma_{23,m}^0 \equiv p_{4,m}^{n+1}, \quad \sigma_{ii,m}^0 \equiv p_{i,m}^{n+1} - A_{i3,m}^{n+1} p_{3,m}^{n+1} / A_{33,m}^{n+1} \quad (i, j = 1, 2),$$

$$A_{ijj,m}^{n+1} = A_{jii,m}^{n+1}, \quad A_{klk,m}^{n+1} = A_{lkl,m}^{n+1} = A_{lkl,m}^{n+1} = A_{klk,m}^{n+1};$$

$A_{ij,m}^{n+1}$, $p_{i,m}^{n+1}$ – компоненты матрицы A_m^{n+1} и вектора-столбца \mathbf{p}_m^{n+1} (см. (9), (10)), которые предполагаются известными из решения на предыдущей m -й итерации.

На основании выражений (21) с учетом (15), (19) в момент времени t_{n+1} на s -й итерации можем определить все внутренние силовые факторы в пластине

$$F_{ij,s}^{n+1} = \int_{-h}^h \sigma_{ij,s}^{n+1} dx_3 = \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left(\bar{A}_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l u_{k,s}^0 - B_{ijkl,m}^{n+1} \partial_k \partial_l u_{3,s}^{n+1} + 2 C_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^0 + \right.$$

$$\left. + 2 C_{ijkl,m}^{(+)} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{(+)} - 2 C_{ijkl,m}^{(-)} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{(-)} \right) + F_{ij,m}^0, \quad M_{ij,s}^{n+1} = \int_{-h}^h \sigma_{ij,s}^{n+1} x_3 dx_3 =$$

$$= \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left(B_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l u_{k,s}^0 - E_{ijkl,m}^{n+1} \partial_k \partial_l u_{3,s}^{n+1} + 2 H_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^0 + 2 H_{ijkl,m}^{(+)} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{(+)} - \right. \quad (23)$$

$$\left. - 2 H_{ijkl,m}^{(-)} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{(-)} \right) + M_{ij,m}^0, \quad F_{i3,s}^{n+1} = \int_{-h}^h \sigma_{i3,s}^{n+1} dx_3 = 2 D_{i3i3,m}^{n+1} \varepsilon_{i3,s}^0 +$$

$$+ 2 D_{i3i3,m}^{(+)} \varepsilon_{i3,s}^{(+)} - 2 D_{i3i3,m}^{(-)} \varepsilon_{i3,s}^{(-)} + F_{i3,m}^0, \quad i, j = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad s = m+1,$$

где (см. (22))

$$\begin{aligned}
\bar{A}_{ijkl,m}^{n+1} &\equiv \int_{-h}^h A_{ijkl,m}^{n+1} dx_3, \quad B_{ijkl,m}^{n+1} \equiv \int_{-h}^h A_{ijkl,m}^{n+1} x_3 dx_3, \quad D_{i3i3,m}^{n+1} \equiv \int_{-h}^h A_{i3i3,m}^{n+1} \frac{h^2 - \beta x_3^2}{h^2} dx_3, \\
C_{ijkl,m}^{n+1} &\equiv \int_{-h}^h A_{ijkl,m}^{n+1} \frac{x_3}{h^2} \left(h^2 - \frac{\beta x_3^2}{3} \right) dx_3, \quad C_{ijkl,m}^{(\pm)} \equiv \beta \int_{-h}^h A_{ijkl,m}^{n+1} \frac{x_3}{2h} \left(\frac{x_3}{2} \pm h \right) dx_3, \\
D_{i3i3,m}^{(\pm)} &\equiv \beta \int_{-h}^h A_{i3i3,m}^{n+1} \frac{x_3 \pm h}{2h} dx_3, \quad E_{ijkl,m}^{n+1} \equiv \int_{-h}^h A_{ijkl,m}^{n+1} x_3^2 dx_3, \quad H_{ijkl,m}^{n+1} \equiv \\
&\equiv \int_{-h}^h A_{ijkl,m}^{n+1} \frac{x_3^2}{h^2} \left(h^2 - \frac{\beta x_3^2}{3} \right) dx_3, \quad H_{ijkl,m}^{(\pm)} \equiv \beta \int_{-h}^h A_{ijkl,m}^{n+1} \frac{x_3^2}{2h} \left(\frac{x_3}{2} \pm h \right) dx_3, \\
F_{ij,m}^{0} &\equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij,m}^0 dx_3, \quad M_{ij,m}^0 \equiv \int_{-h}^h \sigma_{ij,m}^0 x_3 dx_3, \quad F_{i3,m}^0 \equiv \int_{-h}^h \sigma_{i3,m}^0 dx_3, \quad i, j, k, l = 1, 2.
\end{aligned} \tag{24}$$

Согласно (22), (24) величины $F_{ij,m}^0$, $M_{ij,m}^0$, $F_{i3,m}^0$ известны на s -й итерации в момент времени t_{n+1} , поэтому их можно трактовать как «начальные» силовые факторы, действующие в пластине.

Внутренние силовые факторы (23) в момент времени t_{n+1} должны удовлетворять общеизвестным квазистатическим уравнениям равновесия [15,17]

$$\begin{aligned}
\partial_1 F_{i1}^{n+1} + \partial_2 F_{i2}^{n+1} + X_i^{n+1}(x_1, x_2) + \sigma_{i3}^{(+)} - \sigma_{i3}^{(-)} &= 0 \quad (i = 1, 2, 3), \\
\partial_1 M_{i1}^{n+1} + \partial_2 M_{i2}^{n+1} + m_i^{n+1}(x_1, x_2) + h \left(\sigma_{i3}^{(+)} + \sigma_{i3}^{(-)} \right) &= F_{i3}^{n+1} \quad (i = 1, 2),
\end{aligned} \tag{25}$$

где $\sigma_{i3}^{(\pm)} = \sigma_{i3}^{n+1}(x_1, x_2, \pm h)$ – заданные напряжения на верхней (+) и нижней (–) лицевых поверхностях пластины; X_i^{n+1} – приведенные распределенные внешние квазистатические нагрузки, действующие в направлении x_i и порожденные объемными силами; m_i^{n+1} – приведенные распределенные внешние моменты от объемных сил в момент времени t_{n+1} .

К уравнениям (25) необходимо добавить четыре статических граничных условия на лицевых поверхностях пластины (см. (21) с учетом (15), (22) при $\beta = 1$)

$$\begin{aligned}
\sigma_{i3}^{(\pm)}(x_1, x_2) &= 2 A_{i3i3,m}^{n+1}(x_1, x_2, \pm h) \varepsilon_{i3,s}^{(\pm)}(x_1, x_2) + \sigma_{i3,m}^0(x_1, x_2, \pm h) \\
i &= 1, 2, \quad s = m + 1,
\end{aligned} \tag{26}$$

где левые части – известные функции в момент времени t_{n+1} .

В рамках классической теории (см. (15) при $\beta = 0$ и $\varepsilon_{i3}^0 \equiv 0$), а также в рамках первого варианта теории Тимошенко (см. (15) при $\beta = 0$ и $\varepsilon_{i3}^0 \neq 0$), который наиболее часто используется для описания ослабленного сопротивления поперечным сдвигам элементов тонкостенных конструкций [15,16,20 и др.], граничные условия (26) не могут быть удовлетворены.

Из равенств (26) следует

$$\varepsilon_{i3,s}^{(\pm)}(x_1, x_2) = \left(\sigma_{i3}^{(\pm)}(x_1, x_2) - \sigma_{i3,m}^0(x_1, x_2, \pm h) \right) / \left(2A_{i3i3,m}^{n+1}(x_1, x_2, \pm h) \right), \quad (27)$$

$$i = 1, 2, \quad s = m + 1,$$

т.е. текущие s -ые приближения деформаций поперечных сдвигов на лицевых поверхностях тонкостенного элемента в момент времени t_{n+1} в рамках второго варианта теории Тимошенко можно считать известными, так как m -ые приближения «эффективных жесткостей» $A_{i3i3,m}^{n+1}$ и «начальных напряжений» $\sigma_{i3,m}^0$ согласно (22) предполагаются известными из решения на предыдущей m -й итерации.

После подстановки внутренних силовых факторов (23) в уравнения равновесия (25) окончательно получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \partial_j \left(\bar{A}_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l u_{k,s}^0 - B_{ijkl,m}^{n+1} \partial_k \partial_l u_{3,s}^{n+1} + 2C_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^0 \right) = -X_i^{n+1} - \sigma_{i3}^{(+)} + \sigma_{i3}^{(-)} - \\ & - 2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \partial_j \left(C_{ijkl,m}^{(+)} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{(+)} - C_{ijkl,m}^{(-)} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{(-)} \right) - \sum_{j=1}^2 \partial_j F_{ij,m}^0, \\ & \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \partial_j \left(B_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l u_{k,s}^0 - E_{ijkl,m}^{n+1} \partial_k \partial_l u_{3,s}^{n+1} + 2H_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^0 \right) - 2D_{i3i3,m}^{n+1} \varepsilon_{i3,s}^0 = \\ & = -m_i^{n+1} - h \left(\sigma_{i3}^{(+)} + \sigma_{i3}^{(-)} \right) - 2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \partial_j \left(H_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{(+)} - H_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{(-)} \right) + \\ & + 2D_{i3i3,m}^{n+1} \varepsilon_{i3,s}^0 - 2D_{i3i3,m}^{n+1} \varepsilon_{i3,s}^0 - \sum_{j=1}^2 \partial_j M_{ij,m}^0 + F_{i3,m}^0 \quad (i = 1, 2), \\ & 2 \sum_{i=1}^2 \partial_i \left(D_{i3i3,m}^{n+1} \varepsilon_{i3,s}^0 \right) = -X_3^{n+1} - \sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)} - 2 \sum_{i=1}^2 \partial_i \left(D_{i3i3,m}^{n+1} \varepsilon_{i3,s}^{(+)} - D_{i3i3,m}^{n+1} \varepsilon_{i3,s}^{(-)} \right) - \\ & - \sum_{i=1}^2 \partial_i F_{i3,m}^0, \quad s = m + 1 \end{aligned} \quad (28)$$

где в силу (24), (27) правые части – известные функции.

Для однозначного интегрирования системы (28) на s -й итерации в момент времени t_{n+1} необходимо использовать общеизвестные статические [15,17]

$$\begin{aligned} & F_{11,s}^{n+1} n_1^2 + F_{22,s}^{n+1} n_2^2 + 2F_{12,s}^{n+1} n_1 n_2 = F_m^{n+1}, \quad \left(F_{22,s}^{n+1} - F_{11,s}^{n+1} \right) n_1 n_2 + F_{12,s}^{n+1} (n_1^2 - n_2^2) = F_{n\tau}^{n+1}, \\ & F_{13,s}^{n+1} n_1 + F_{23,s}^{n+1} n_2 = F_{n3}^{n+1}, \quad M_{11,s}^{n+1} n_1^2 + M_{22,s}^{n+1} n_2^2 + 2M_{12,s}^{n+1} n_1 n_2 = M_m^{n+1}, \\ & \left(M_{22,s}^{n+1} - M_{11,s}^{n+1} \right) n_1 n_2 + M_{12,s}^{n+1} (n_1^2 - n_2^2) = M_{n\tau}^{n+1}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma \end{aligned} \quad (29)$$

и кинематические

$$u_{3,s}^{n+1}(x_1, x_2) = u_{30}^{n+1}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma; \quad (30)$$

$$u_{i,s}^{n+1}(\mathbf{x}) = u_{i0}^{n+1}(\mathbf{x}), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad |x_3| \leq h, \quad i = 1, 2 \quad (31)$$

граничные условия. Здесь: $n_1 = \cos \gamma$, $n_2 = \sin \gamma$; F_m^{n+1} , $F_{n\tau}^{n+1}$ – заданные на контуре Γ нормальная и касательная мембранные силы; F_{n3}^{n+1} – заданная на контуре Γ поперечная сила; M_m^{n+1} , $M_{n\tau}^{n+1}$ – заданные на контуре Γ изгибающий и крутящий моменты; u_{30}^{n+1} – заданный на Γ прогиб; u_{i0}^{n+1} – заданные на торцевой поверхности перемещения в тангенциальных направлениях x_i ($i=1, 2$); Γ – контур, ограничивающий область G , занимаемую пластиной в плане; γ – угол, задающий направление внешней нормали к контуру Γ .

Согласно (18) граничные условия (31) нельзя удовлетворить в каждой точке (x_1, x_2, x_3) торцевой поверхности пластины при произвольной зависимости функций u_{i0}^{n+1} от поперечной координаты x_3 , поэтому подобно статическим граничным условиям (см. (29)) кинематические условия (31) на кромке пластины будем удовлетворять в интегральном смысле, т.е. проинтегрируем граничные условия (31) по толщине пластины с весами 1 и x_3 , тогда с учетом (18) получим

$$\begin{aligned} 2hu_{i,s}^0(x_1, x_2) + \beta \frac{h^2}{3} \varepsilon_{i3,s}^{(+)}(x_1, x_2) - \beta \frac{h^2}{3} \varepsilon_{i3,s}^{(-)}(x_1, x_2) &= \bar{u}_{i0}^{n+1}(x_1, x_2), \\ -\frac{2}{3} h^3 \partial_i u_{3,s}^{n+1} + \frac{4}{3} \left(1 - \frac{\beta}{5}\right) h^3 \varepsilon_{i3,s}^{n+1}(x_1, x_2) + \frac{2}{3} \beta h^3 \varepsilon_{i3,s}^{n+1(+)}(x_1, x_2) &+ \\ + \frac{2}{3} \beta h^3 \varepsilon_{i3,s}^{n+1(-)}(x_1, x_2) &= \bar{u}_{i0}^{n+1}(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad i=1, 2, \end{aligned} \quad (32)$$

где

$$\bar{u}_{i0}^{n+1}(x_1, x_2) \equiv \int_{-h}^h u_{i0}^{n+1}(\mathbf{x}) dx_3, \quad \bar{u}_{i0}^{n+1}(x_1, x_2) \equiv \int_{-h}^h u_{i0}^{n+1}(\mathbf{x}) x_3 dx_3, \quad i=1, 2. \quad (33)$$

После подстановки соотношений (23) в равенства (29) на s -й итерации в момент времени t_{n+1} получим статические граничные условия в разрешающем виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 n_i n_j \left(\bar{A}_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l u_{k,s}^0 - \bar{B}_{ijkl,m}^{n+1} \partial_k \partial_l u_{3,s}^{n+1} + 2 \bar{C}_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^0 \right) &= F_m^{n+1} - \\ - 2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 n_i n_j \left(\bar{C}_{ijkl,m}^{n+1(+)} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{n+1(+)} - \bar{C}_{ijkl,m}^{n+1(-)} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{n+1(-)} \right) - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 n_i n_j F_{ij,m}^0, \\ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^i n_{3-i} n_j \left(\bar{A}_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l u_{k,s}^0 - \bar{B}_{ijkl,m}^{n+1} \partial_k \partial_l u_{3,s}^{n+1} + 2 \bar{C}_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^0 \right) &= \\ = F_{n\tau}^{n+1} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^j n_{3-i} n_j \left[F_{ij,m}^0 + 2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left(\bar{C}_{ijkl,m}^{n+1(+)} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{n+1(+)} - \bar{C}_{ijkl,m}^{n+1(-)} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{n+1(-)} \right) \right], \\ \sum_{i=1}^2 n_i D_{i3i3,m}^{n+1} \varepsilon_{i3,s}^0 &= \frac{1}{2} F_{n3}^{n+1} - \sum_{i=1}^2 n_i \left(D_{i3i3,m}^{n+1(+)} \varepsilon_{i3,s}^{n+1(+)} - D_{i3i3,m}^{n+1(-)} \varepsilon_{i3,s}^{n+1(-)} + \frac{1}{2} F_{i3,m}^0 \right), \\ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 n_i n_j \left(\bar{B}_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l u_{k,s}^0 - \bar{E}_{ijkl,m}^{n+1} \partial_k \partial_l u_{3,s}^{n+1} + 2 \bar{H}_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^0 \right) &= M_{nn}^{n+1} - \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
& -2 \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 n_i n_j \left(H_{ijkl,m}^{(+)} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{(+)} - H_{ijkl,m}^{(-)} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{(-)} \right) - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 n_i n_j M_{ij,m}^0, \\
& \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 (-1)^i n_{3-i} n_j \left(B_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l u_{k,s}^0 - E_{ijkl,m}^{n+1} \partial_k \partial_l u_{3,s}^{n+1} + 2 H_{ijkl,m}^{n+1} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^0 \right) = \\
& = M_{nc}^{n+1} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^i n_{3-i} n_j \left[M_{ij,m}^0 + 2 \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left(H_{ijkl,m}^{(+)} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{(+)} - H_{ijkl,m}^{(-)} \partial_l \varepsilon_{k3,s}^{(-)} \right) \right], \\
& (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad s = m + 1
\end{aligned}$$

где согласно (24), (27) правые части – известные функции на контуре Γ .

Так как система разрешающих уравнений (28) является системой дифференциальных уравнений с частными производными десятого порядка [13,15,17], то для ее однозначного интегрирования в каждой точке контура Γ должны быть заданы пять статических граничных условий (34) или пять кинематических граничных условий (30), (32). Возможно задание и пяти смешанных из (30), (32), (34) граничных условий.

Используя известные формулы перехода от декартовых прямоугольных координат к цилиндрической системе координат [21], уравнения и соотношения (28), (30), (32), (34) можно записать в полярной системе, удобной при решении задач изгиба круглых и кольцевых пластин. В случае осесимметричного изгиба слоистых кольцевых пластин регулярной структуры соответствующие разрешающие уравнения и граничные условия для начального момента времени $t = t_0 = 0$ приведены в [19] (см. там соотношения (26)-(45)). Для получения же решения в последующие моменты времени $t = t_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) в равенствах (42) из [19] необходимо учесть наличие «начальных» силовых факторов (см. (24)), как это сделано выше в соотношениях (28), (34). (Не будем останавливаться на обсуждении этого вопроса более подробно.)

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

В качестве конкретного примера исследуем особенности деформирования в условиях ползучести кольцевой слоистой пластины толщиной $2h = 10$ см, ограниченной кромками радиусов $r_0 = 1$ м, $r_1 = 2$ м и изготовленной из регулярно чередующихся алюминиевых ($k = 1$) и стальных ($k = 2$) слоев, относительное объемное содержание которых $\omega_1 = \omega_2 = 0,5$ (см. (1)). Поведение стальных слоев (марки 11Н8М18К14Т) предполагается линейно-упругим [22] (см. (2))

$$\begin{aligned}
K_0^{(2)}(t) &= K_*^{(2)}(t) \equiv 0, \quad g_0^{(2)}(\varepsilon_*^{(2)}, \varepsilon_0^{(2)}) = E^{(2)} / (1 - 2\mu^{(2)}) = \text{const}, \\
g_*^{(2)}(\varepsilon_*^{(2)}, \varepsilon_0^{(2)}) &= E^{(2)} / (1 + \mu^{(2)}) = \text{const}, \quad E^{(2)} = 200 \text{ ГПа}, \quad \mu^{(2)} = 0,3, \\
\sigma_{0,2}^{(2)} &= 3,4 \text{ ГПа}
\end{aligned}$$

а алюминиевых слоев (сплав Д16Т) описывается соотношениями (2)-(4) при следующих механических характеристиках [8]

$$\begin{aligned}
g_1^{(1)}(\varepsilon_*^{(1)}, \varepsilon_0^{(1)}) &= \frac{2}{3} A_1^{(1)} (\varepsilon_*^{(1)})^{m_1-1}, \quad B_1^{(1)}(t) = b_1^{(1)} (1 - \alpha_1^{(1)}) = \text{const}, \\
K_0^{(1)}(t) &\equiv 0, \quad g_0^{(1)}(\varepsilon_*^{(1)}, \varepsilon_0^{(1)}) = E^{(1)} / (1 - 2\mu^{(1)}) = \text{const}, \quad E^{(1)} = 64 \text{ ГПа},
\end{aligned}$$

$\mu^{(1)} = 0,31$, $A_1^{(1)} = 30,55$ ГПа, $b_1^{(1)} = 0,119$ ч $^{1-\alpha_1^{(1)}}$, $\alpha_1^{(1)} = 0,635$, $m_1 = 0,87$ где $E^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала k -ой фазы композиции; $\sigma_{0,2}^{(2)}$ – условный предел текучести стали 11Н8М18К14Т.

На внутренней кромке r_0 пластина жестко закреплена ($u_{30} = 0$, $u_{i0} = 0$, $i = 1, 2$; см. (33)), а на внешней кромке r_1 свободна от нагружения ($F_{m3} = F_{n3} = F_{n3} = 0$, $M_{m3} = M_{n3} = 0$). Пластина равномерно нагружена только поперечной распределенной нагрузкой $\sigma_{33}^{(+)}$ ($\sigma_{33}^{(-)} \equiv 0$, $\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$, $m_i \equiv 0$, $X_j \equiv 0$, $i = 1, 2$, $j = \overline{1, 3}$), которая прикладывается к верхней лицевой поверхности в виде функции класса Хевисайда

$$\sigma_{33}^{(+)}(t) = -q \times \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0, \\ 1 & \text{при } t > 0, \end{cases} \quad q = 30 \text{ кПа.}$$

При таких условиях закрепления и нагружения кольцевой пластины в ней реализуется случай осесимметричного изгиба.

На рис.2 изображены зависимости прогиба точек внешней кромки пластины $u_3^m(t) = u_3(r_1, t)$ от времени t , рассчитанные с шагом по времени $\Delta t = 10$ ч. (Дополнительные расчеты показали, что, как и в [5], поведение функции $u_3^m(t)$ практически не зависит от выбора шага Δt , по крайней мере в интервале $\Delta t \in [0, 1, 100]$. Более подробно этот вопрос обсуждается в [2,5].) Кривая 1 на рис. 2 определена по классической теории Кирхгофа, а линии 2, 3 – по первому и второму вариантам теории Тимошенко соответственно.

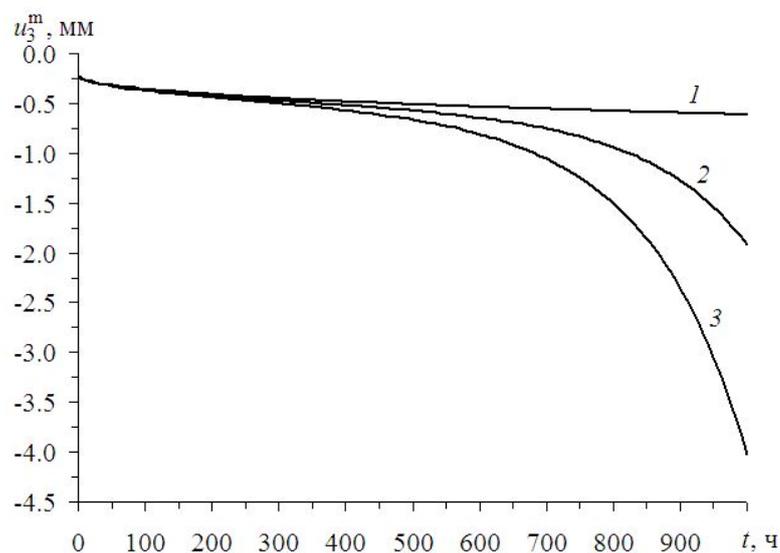


Рис.2. Зависимости прогибов точек внешней кромки кольцевой пластины от времени, рассчитанные по разным теориям.

Из рис.2 видно, что после $t = 300$ ч прогибы, рассчитанные по разным теориям существенно различаются, причем это различие возрастает со временем. В окрестности начального момента времени $t \approx 0$ на всех кривых рис.2 наблюдается стадия упрочнения, переходящая в стадию установившейся ползучести, которая для кривой 1 наблюдается вплоть до $t = 1000$ ч. Однако

согласно поведению кривых 2, 3 после $t = 300$ ч наблюдается ускорение ползучести пластин, рассчитанных по теориям типа Тимошенко.

Здесь следует подчеркнуть, что нелинейно-наследственная теория ползучести Ю.Н. Работнова описывает только первую и вторую стадию ползучести, но не описывает третью стадию ускоренной ползучести, предшествующую разрушению материала [1,4]. В силу этого, ускорение ползучести, наблюдаемое на кривых 2, 3 рис.2 после $t = 300$ ч, объясняется не началом и развитием предразрушения материалов фаз композиции, а активным и ускоренным развитием деформаций поперечного сдвига, так как линии 2, 3 рассчитаны с учетом ослабленного сопротивления слоистой пластины именно этим сдвигам (подробнее см. ниже).

Напомним, что в случае изгибного деформирования балок-стенок слоистой структуры, выполненных из нелинейно-наследственных материалов, зависимости $u_3^m(t)$, рассчитанные ранее как по классической теории, так и по теории Тимошенко, качественно подобны кривой 1 на рис.2 (см. рис.3 в [5]), т.е. для балок-стенок ускорение ползучести не имеет места даже при учете их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам. Следовательно, наблюдаемое, согласно поведению кривых 2, 3 на рис.2, ускорение ползучести слоистой пластины регулярной структуры объясняется более сложным видом напряженно-деформированного состояния (НДС) в слоях пластины (см. (21)) по сравнению с НДС в слоях балки-стенки и нелинейным поведением материалов фаз композиции.

Таким образом, исследование простейших тонкостенных композитных элементов (слоистых балок-стенок) не позволяет выявить все особенности деформирования более сложных тонкостенных композитных элементов (слоистых пластин) в условиях неустановившейся ползучести.

На рис.3 изображены эпюры прогибов, определенные в начальный момент времени $t = +0$ (рис.3,а) и при $t = 1000$ ч (рис.3,б). Обозначения кривых на рис.3 приняты такими же, как и на рис.2, а направление x_1 является радиальным. Согласно рис.3,а, в начальный момент времени все три рассматриваемых теории предсказывают примерно одну и ту же податливость пластины. Действительно, отношение модулей упругости стальных и алюминиевых слоев равно примерно трем, т.е. анизотропия такой композиции является слабой, а значит, классическая теория при кратковременном нагружении (в частности, в рамках линейно-упругого поведения фаз композиции) должна хорошо описывать механическое поведение рассматриваемой пластины [15], что и нашло свое отражение на рис.3,а. Однако в соответствии с поведением кривых на рис.2 к моменту времени $t = 1000$ ч прогибы, предсказываемые разными теориями, существенно различаются, причем согласно рис.3,б эпюры прогибов в этот момент времени различаются не только количественно, но и качественно. А именно: кривые 2, 3 на рис.3,б имеют кривизну, знак которой противоположен знаку кривизны кривой 1; кроме того, классическая теория (кривая 1) и второй вариант теории Тимошенко (линия 3) предсказывают, что максимальный по модулю прогиб имеют точки внешней кромки пластины ($x_1 = r_1$), а первый вариант теории Тимошенко (кривая 2) предсказывает, что наибольший прогиб имеют точки внутри пластины. Как было показано в [19,23], необычное поведение кривых 2, 3 на рис.3,б объясняется именно тем, что в окрестности внутренней, жестко закрепленной кромки ($x_1 = r_0$)

получают значительное развитие деформации поперечных сдвигов и их скорости ползучести.

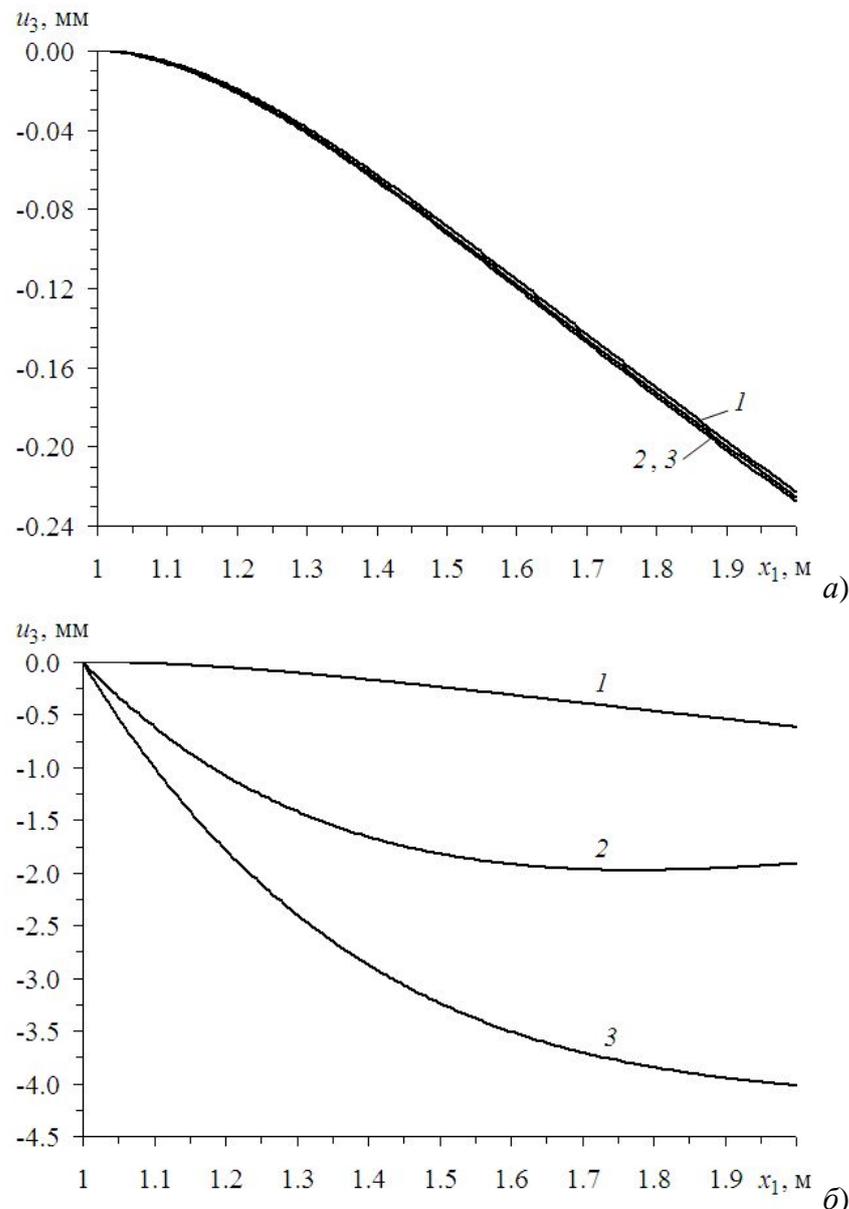
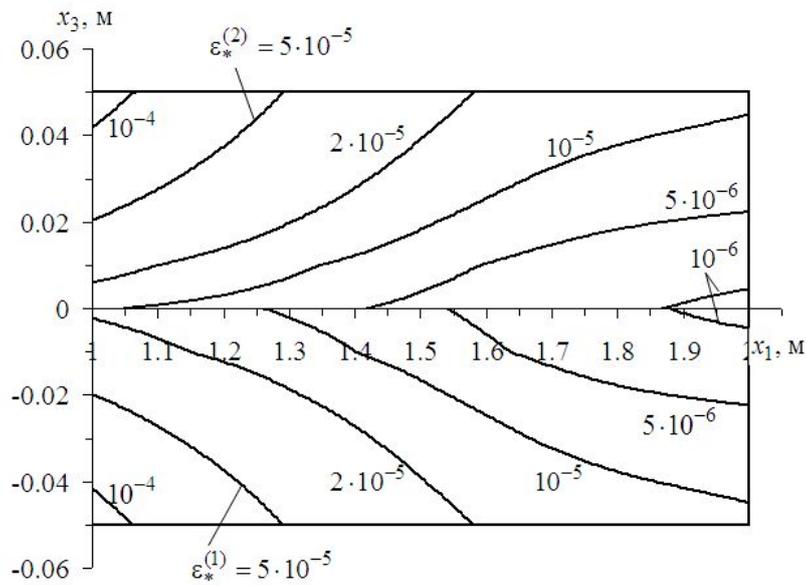


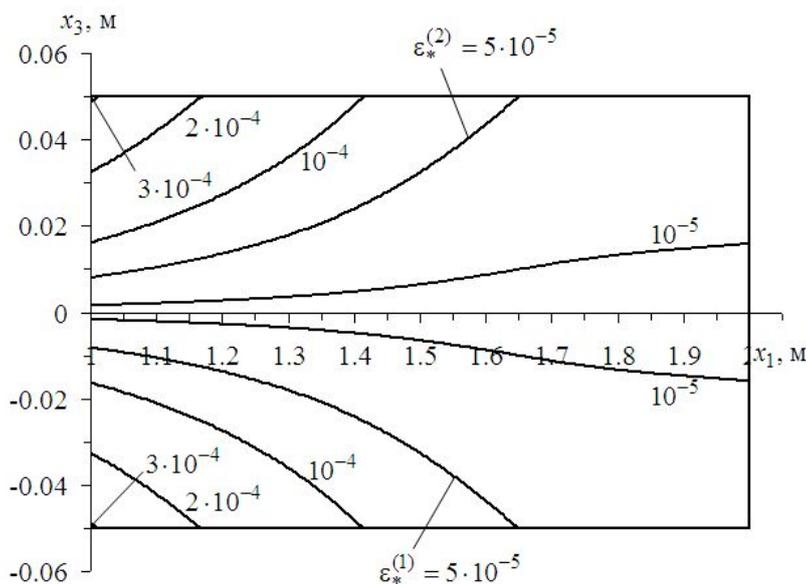
Рис.3. Эпюры прогибов кольцевой пластины, рассчитанные по разным теориям, в начальный момент времени (а) и при $t = 1000$ ч (б).

В силу того, что кривые 1-3 на рис.3,б существенно различны, при расчетах ползучести слоистых пластин регулярной структуры целесообразно использовать второй вариант теории Тимошенко (см. кривые 3 на рис.2, 3) как наиболее точный (с математической точки зрения [13,17,18]) из всех обсуждаемых теорий. Однако открытым пока остается вопрос о том, гарантирует ли второй вариант теории Тимошенко приемлемую точность при исследовании ползучести тонкостенных элементов композитных конструкций или требуется его уточнение. (Как показано в [13,18], при кратковременном нагружении пластин и оболочек в рамках линейно-упругого поведения их материалов фаз композиции такое уточнение не требуется.) Изучение этого вопроса выходит за рамки настоящего исследования.

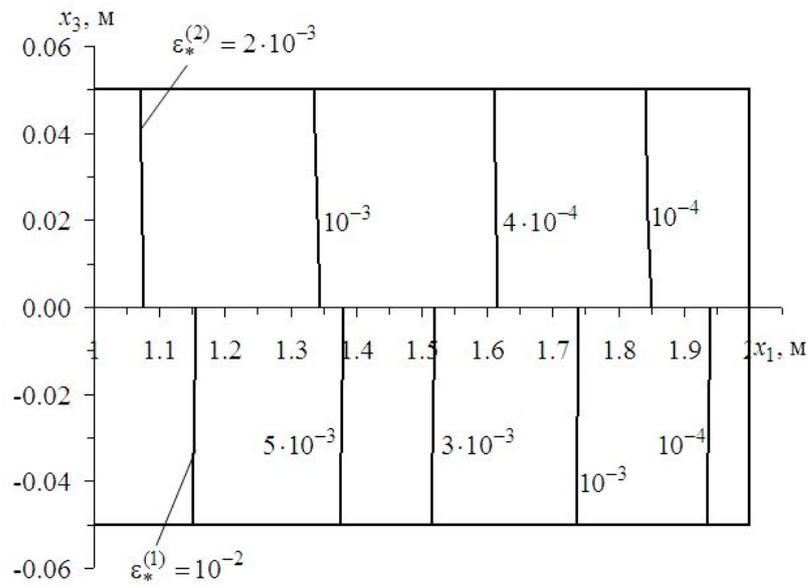
Для получения некоторого наглядного представления о характере распределения деформаций в слоях рассматриваемой металлокомпозитной пластины на рис.4 изображены её радиальные сечения и изолинии, на которых интенсивность деформаций $\varepsilon_*^{(k)}$, $k = 1, 2$ (см. (3)) имеет постоянные значения. В силу отсутствия нагружения пластины в радиальном и окружном направлениях, а также в силу предположения о равносопротивляемости материалов фаз композиции растяжению и сжатию «картины» деформирования материалов слоев симметричны относительно срединной плоскости $x_3 = 0$, поэтому для экономии места на нижних половинах рис.4 изображены изолинии в алюминиевых слоях ($\varepsilon_*^{(1)} = \text{const}$), а на верхних половинах – в стальных слоях ($\varepsilon_*^{(2)} = \text{const}$).



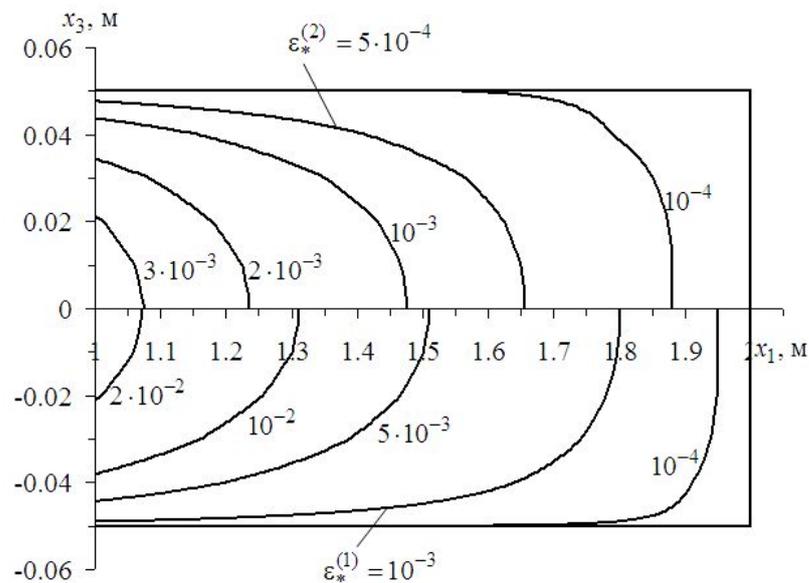
a)



b)



а)



б)

Рис.4. Характерные зоны деформирования алюминиевых (нижние части рисунков) и стальных (верхние части рисунков) слоев кольцевой пластины в начальный момент времени (а) и при $t = 1000$ ч (б-г), рассчитанные по второму варианту теории Тимошенко (а, г), по классической теории (б) и по первому варианту теории Тимошенко (в).

На рис.4,а приведены картины деформирования материалов слоев в начальный момент времени $t = +0$, рассчитанные по второму варианту теории Тимошенко. Классическая теория и первый вариант теории Тимошенко для этого момента времени приводят примерно к таким же изолиниям $\varepsilon_*^{(k)} = \text{const}$, что и изображенные на рис.4,а (поэтому они не приведены на рис.4). Это обстоятельство и объясняет близость эпюр прогибов на рис.3,а.

На рис.4,б-г приведены картины деформирования, рассчитанные при $t = 1000$ ч по классической теории (рис.4,б), первому (рис.4,в) и второму (рис.4,г) вариантам теории Тимошенко. Сравнение изолиний на этих рисунках показывает,

что на момент времени $t = 1000$ ч классическая теория и первый вариант теории Тимошенко предсказывают совершенно разные картины деформирования слоев пластины, которые как качественно, так и количественно существенно отличаются от картин деформирования, рассчитанных по второму варианту теории Тимошенко. Этот факт и объясняет значительное отличие кривых 1 и 2 от кривой 3 на рис.3,б.

Кроме того, сравнение изолиний, изображенных на рис.4,а и 4,з и рассчитанных по одной и той же теории, но в разные моменты времени, указывает на то, что с течением времени картины деформирования материалов слоев существенно изменяются как качественно, так и количественно. При этом согласно рис.4,з в окрестности внутренней, жестко закрепленной кромки ($x_1 = r_0$) в процессе ползучести активно развиваются именно деформации поперечного сдвига (об этом свидетельствует поведение кривых $\varepsilon_*^{(k)} = \text{const}$, $k = 1, 2$ в окрестности заделки, где они по форме близки к параболам, что полностью согласуется с (15) при $\beta = 1$), в начальный же момент времени (см. рис.4,а) деформации поперечных сдвигов пренебрежимо малы.

В приведенных выше расчетах прогибы по модулю не превосходят $1/20$ толщины пластины, а интенсивность деформаций материалов слоев не превосходит 2,5% (см. нижнюю часть рис.4,з). Кроме того, согласно кривым, изображенным на верхней части рис.4,з, стальные слои действительно остаются линейно-упругими, как и предполагалось. Следовательно, все результаты, полученные в настоящем исследовании в рамках геометрически линейной постановки, являются вполне корректными.

ВЫВОДЫ

Предложенная структурная модель, основанная на алгоритме шагов по времени, позволяет в каждый дискретный момент времени строить в итерационной форме определяющие уравнения для слоистой среды регулярной структуры, состоящей из изотропных материалов, обладающих нелинейно-наследственными свойствами.

Проведенный анализ неупругого изгиба кольцевой металлокомпозитной пластины, выполненной из регулярно чередующихся алюминиевых и стальных слоев, подчиняющихся нелинейно-наследственной теории ползучести Ю.Н. Работнова, показал, что при кратковременном нагружении такой конструкции для её расчета вполне можно использовать классическую теорию Кирхгофа. Однако при длительном нагружении в рассматриваемой тонкостенной конструкции активно развиваются деформации поперечного сдвига, поэтому расчет ползучести слоистых пластин регулярной структуры необходимо проводить с учетом их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам на базе теорий типа Тимошенко. Расчеты показали, что в рамках этих теорий наблюдается ускорение ползучести пластины при достаточно длительном её нагружении, что не имеет места, например, при изгибе тонкостенных конструкций типа слоистых балок-стенок. Расчеты, выполненные по классической теории и по первому варианту теории Тимошенко (основанному на гипотезе прямой линии), показывают, что при длительном нагружении эти теории предсказывают неоправданно заниженную (на десятки процентов и даже в разы) податливость слоистых пластин по сравнению с математически более точным вторым вариантом теории

Тимошенко, который и следует применять для расчетов механического поведения таких конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
2. *Янковский А.П.* Анализ ползучести армированных балок-стенок из нелинейно-наследственных материалов в рамках второго варианта теории Тимошенко // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №3. – С.469-489.
3. *Янковский А.П.* Моделирование механического поведения композитов с пространственной структурой армирования из нелинейно-наследственных материалов // Конструкции из композиционных материалов. – 2012. – №2. – С.12-25.
4. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука. Физматгиз, 1977. – 384 с.
5. *Янковский А.П.* Расчет ползучести слоистых балок-стенок регулярной структуры из нелинейно-наследственных материалов // Проблемы прочности и пластичности. – 2014. – Т.76. – №2. – С.153-162.
6. *Мищенко А.В., Немировский Ю.В.* Ползучесть однородных и слоистых рам на основе трехкомпонентной модели // Изв. вузов. Строительство. – 2009. – №5. – С.16-24.
7. *Ильюшин А.А.* Труды. Т.3. Теория термовязкоупругости. – М.: Физматлит, 2007. – 288 с.
8. *Никитенко А.Ф.* Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. – Новосибирск: НГАСУ, 1997. – 278 с.
9. *Янковский А.П.* Моделирование упругопластического изгиба металлокомпозитных слоистых пластин регулярной структуры. 1. Структурная модель // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им.И.Я.Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – №2 (12). – С.102-109.
10. *Кудинов А.А.* Тепломассообмен: Учеб. пособие. – М.: ИНФРА-М, 2012. – 375 с.
11. *Беляев Н.М., Рядно А.А.* Методы теории теплопроводности. – Учеб. пособие для вузов. В 2-х частях. Ч.2. – М.: Высш. школа, 1982. – 304 с.
12. *Фудзии Т., Дзако М.* Механика разрушения композиционных материалов. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
13. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
14. *Григоренко Я.М.* Изотропные и анизотропные слоистые оболочки вращения переменной жесткости. – Киев: Наукова думка, 1973. – 228 с.
15. *Васильев В.В.* Механика конструкций из композиционных материалов. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
16. *Каледин В.О., Аульченко С.М., Миткевич А.Б., Решетникова Е.В., Седова Е.А., Шпакова Ю.В.* Моделирование статики и динамики оболочечных конструкций из композиционных материалов. – М.: Физматлит, 2014. – 196 с.
17. *Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А.* Сопротивление полимерных и композитных материалов. – Рига: Зинатне, 1980. – 572 с.

18. *Андреев А.Н., Немировский Ю.В.* Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания. – Новосибирск: Наука, 2001. – 287 с.
19. *Янковский А.П.* Моделирование упругопластического изгиба металлокомпозитных слоистых пластин регулярной структуры. 2. Уточненная модель деформирования // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им.И.Я.Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2012. – №3 (13). – С.38-56.
20. *Абросимов Н.А., Баженов В.Г.* Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. – Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. – 400 с.
21. *Бидерман В.Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
22. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д. М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
23. *Янковский А.П.* Исследование установившейся анизотропной ползучести слоистых металлокомпозитных пластин с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. 2. Модель деформирования // Механика композитных материалов. – 2012. – Т.48. – №2. – С.279-302.

Поступила в редакцию 22 июля 2015 года.

Сведения об авторе:

Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., проф., в.н.с., лаборатория «Физики быстропротекающих процессов», ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А.Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: lab4nemir@rambler.ru, nemirov@itam.nsc.ru