

УДК 539.3

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Рыбаков Л.С.

ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

Аналитическая теория метода конечных элементов, обсуждавшаяся в [1,2], реализуется здесь для плоского напряженного состояния прямоугольной пластины. Ее конечно-элементная модель, составленная из одинаковых прямоугольных конечных элементов с одинаковой аппроксимацией в них смещений, рассматривается как регулярная упругая система. С помощью дискретно-континуального анализа, развитого в [3-5], для нее строится дискретно двумерная замкнутая линейная теория в терминах узловых смещений и обобщенных деформаций, внутренних и внешних сил элементов – функций двух целочисленных аргументов, используемых для нумерации элементов системы. В рамках построенной теории даны альтернативные постановки задач и некоторые их точные аналитические решения.

Ключевые слова: аналитическая теория; метод конечных элементов

ABOUT ANALYTICAL REALIZATION OF THE FINITE ELEMENT METHOD

Rybakov L.S.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

SUMMARY

An analytical theory of the finite element method discussed in [1,2], is implemented here for the plane stress state of the rectangular plate. Its finite element model composed of identical rectangular finite elements with the same approximation in the displacements, is interpreted as a regular elastic system. Using the discrete-continuous analysis developed in [3-5], a discrete two-dimensional closed linear theory is built in terms of the nodal displacements and generalized strains, internal and external forces of the elements — functions of two integer arguments used for numbering the elements of the system. Within the constructed theory alternative formulations of problems and exact analytical solutions of some of them are given.

Key words: analytical theory; finite element method

ВВЕДЕНИЕ

Среди методов приближенного упругого анализа деформируемых тел широкую известность обрели метод конечных разностей и метод конечных элементов.

Метод конечных разностей [6-8] появился задолго до метода конечных элементов и нацелен на замену разрешающих, чаще всего дифференциальных, уравнений алгебраическими. С этой целью, в области, занятой телом, создается сетка, как правило ортогональная. Непрерывные искомые зависимые переменные аппроксимируются дискретными функциями, определяемыми в узлах сетки, а исходные разрешающие уравнения заменой дифференциальных операций разностными превращают в алгебраические уравнения, предназначенные для отыскания узловых значений введенных дискретных функций. Эти уравнения допускают аналитическую запись, а в отдельных случаях и аналитические решения, добываемые методами исчисления конечных разностей [9-12].

В методе конечных элементов [13-17] упругое континуальное тело заменяется упругой системой из взаимодействующих между собой конечных элементов. Свойства этой системы существенным образом зависят от исходной модели упругого тела, от геометрии элементов и аппроксимации их напряженно-деформированного состояния. Если конечные элементы разные, то на передний план выступает алгоритмический подход. Он направлен на формирование системы алгебраических уравнений относительно искомых узловых величин и унифицирован в известных программных комплексах. Примечательно, что здесь поэлементная аппроксимация не затрагивает математические операции исходной теории упругого тела, на что указывает, например, интерпретация метода конечных элементов как метода Ритца-Тимошенко.

На аналитический конечно-элементный упругий анализ можно рассчитывать в тех случаях, когда конечно-элементная модель упругого тела имеет регулярную структуру. Общая методология подобного анализа обсуждалась в [1], а точная реализация его для сжато-растянутого стержня представлена в [2].

Ниже на примере плоского напряженного состояния показывается, что в случае регулярной конечно-элементной модели аналитические методы дискретно-континуального линейного анализа упругих систем [3-5] позволяют строить для этой модели строгую дискретную теорию упругости. Основное содержание ее составляет полная замкнутая система определяющих соотношений в терминах узловых перемещений и обобщенных деформаций, внешних и внутренних сил конечных элементов. Как и в классической теории упругости, эти соотношения подразделяются на геометрические, статические и физические. Геометрические зависимости выражают обобщенные деформации через узловые перемещения. К ним же относятся и уравнения совместности обобщенных деформаций. Статические соотношения представляют уравнения равновесия свободных узлов в обобщенных внешних и внутренних силах. Наконец, физические зависимости связывают обобщенные деформации и внутренние силы. Совокупность всех этих уравнений допускает альтернативные постановки задач, приводящие к системе разрешающих уравнений в частных разностях относительно выбранных основных, определяемых в первую очередь, неизвестных.

Вид определяющих соотношений построенной теории, количество и смысл входящих в нее обобщенных сил, деформаций и перемещений напрямую зависят от геометрии конечных элементов и принятой для них аппроксимации напряженно-деформированного состояния. Другими словами, разные элементы порождают различные теории.

1. КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ АНАЛИТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

Рассмотрим задачу о плоском напряженном состоянии тонкой пластины прямоугольной формы с постоянной толщиной h . Отнесем ее к глобальной декартовой системе отсчета x_σ (здесь и далее греческие индексы принимают значения 1,2) и обозначим символом a_σ ее размер в направлении оси x_σ (рис.1). В общем случае внешние силы на пластину слагаются из декартовых компонент $X_\alpha(x_1, x_2)$ поверхностных сил, декартовых компонент $X_{1\alpha}^{(0)}(x_2)$ и $X_{1\alpha}^{(1)}(x_2)$ погонных сил на левой и правой вертикальных границах и декартовых компонент $X_{2\alpha}^{(0)}(x_1)$ и $X_{2\alpha}^{(1)}(x_1)$ погонных сил на нижней и верхней горизонтальных границах (на рис.1 все эти силы не показаны).

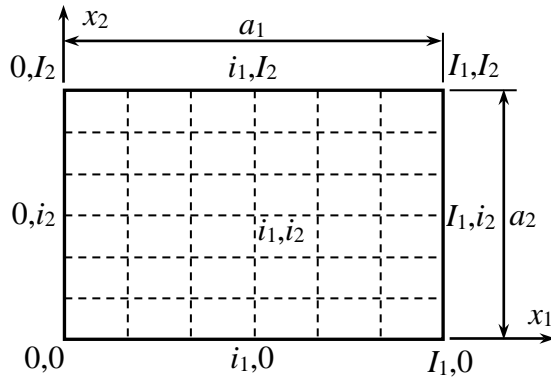


Рис.1.

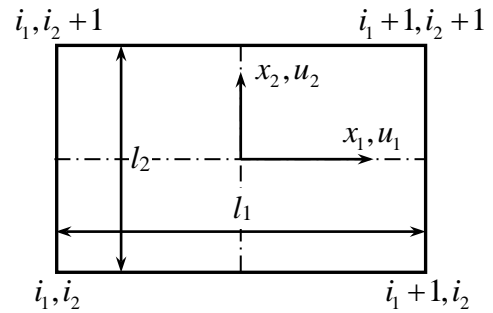


Рис.2.

Разобьем пластину на одинаковые прямоугольные конечные элементы и пронумеруем их и узлы, совпадающие с вершинами элементов, с помощью двух целочисленных параметров i_σ , растущих в направлении осей x_σ . Принимая для узлов нумерацию, показанную на рис. 1, условимся за номер конечного элемента принимать младший номер среди ближайших к нему узлов (рис.2). Тогда для узлов $i_\sigma = 0, 1, 2, \dots, I_\sigma$, а для элементов $i_\sigma = 0, 1, 2, \dots, I_\sigma - 1$, где I_σ – число конечных элементов в направлении оси x_σ . По предположению все конечные элементы имеют одинаковые размеры $l_\sigma = a_\sigma / I_\sigma$.

Для зависимых переменных величин, связанных с конечными элементами и узлами, параметры i_σ будут выступать в роли дискретных аргументов, которые могут принимать как смещенные, так и несмещенные значения. При явной записи значений аргументов уравнения и формулы становятся трудно обозримыми. Поэтому будем полагать, что в уравнениях и формулах при всех зависимых переменных стоят текущие (несмещенные) значения аргументов i_σ , которые, как и континуальные аргументы, ради краткости записи опускаются. Это становится возможным благодаря введению линейных операторов сдвига ∇_α^\pm и частных разностных операторов Δ_α^\pm , смысл которых на примере отвлеченной функции $\psi[i_1, i_2] = \psi[i_\sigma]$ дискретных аргументов i_σ поясняют равенства ($\delta_{\alpha\beta}$ – символ Кронекера)

$$\nabla_{\alpha}^{\pm}\psi[i_{\sigma}] = \psi[i_{\sigma} \pm \delta_{\alpha\sigma}], \quad \Delta_{\alpha}^{\pm}\psi[i_{\sigma}] = \pm\psi[i_{\sigma} \pm \delta_{\alpha\sigma}] \mp \psi[i_{\sigma}].$$

Эти операторы перестановочны и связаны между собой зависимостями (здесь и далее суммирование по повторяющимся индексам не предполагается)

$$\nabla_{\alpha}^{\pm} = 1 \pm \Delta_{\alpha}^{\pm}, \quad \nabla_{\alpha}^{\pm}\nabla_{\alpha}^{\mp} = 1, \quad \Delta_{\alpha}^{\pm} = \nabla_{\alpha}^{\pm}\Delta_{\alpha}^{\mp}.$$

Кроме того, они позволяют образовывать операторы частных разностей более высокого порядка. Так, например, для операторов частных разностей второго порядка имеем

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha}^2\psi &= \Delta_{\alpha}^2\psi[i_{\sigma}] = \psi[i_{\sigma} + \delta_{\alpha\sigma}] - 2\psi[i_{\sigma}] + \psi[i_{\sigma} - \delta_{\alpha\sigma}], \\ \Delta_{\alpha}^2 &= \Delta_{\alpha}^+\Delta_{\alpha}^- = \Delta_{\alpha}^+ - \Delta_{\alpha}^- = \nabla_{\alpha}^+ - 2 + \nabla_{\alpha}^-. \end{aligned}$$

Условимся, что зависимая переменная при значениях дискретных аргументов, указывающих явно или неявно (обнаруживается после раскрытия предшествующего разностного оператора) на несуществующий элемент системы, равна нулю.

При упругом анализе текущего изолированного элемента воспользуемся локальными декартовыми осями, отсчитываемыми от центра элемента и параллельными соответствующим глобальным осям. Локальные оси обозначим так же, как и глобальные оси, а именно, $x_{\sigma} \in [-l_{\sigma}/2, l_{\sigma}/2]$ (рис.2), используя обозначения $\xi_{\sigma} = x_{\sigma}/l_{\sigma}$ для их безразмерных аналогов ($\xi_{\sigma} \in [-1/2, 1/2]$). Примем для конечных элементов модель плоского напряженного состояния. Тогда напряженно-деформированное состояние конечного элемента описывается декартовыми компонентами u_{α} , $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $n_{\alpha\beta}$ соответственно вектора смещений, тензора деформаций и тензора погонных внутренних усилий. Все эти величины являются функциями локальных координат x_{σ} и дискретных параметров i_{σ} , так что следовало бы, например, писать $u_{\alpha}(x_1, x_2; i_1, i_2)$ или более кратко $u_{\alpha}(x_{\sigma}; i_{\sigma})$. Однако, как было условлено выше, в дальнейшем все аргументы функций, имеющие текущие значения, опускаются.

Пусть $U_{\alpha} = U_{\alpha}[i_1, i_2]$ – смещение текущего узла вдоль оси x_{α} . Геометрические условия сопряжения элементов с узлами

$$\begin{aligned} u_{\alpha}(-l_1/2, -l_2/2; i_1, i_2) &= U_{\alpha}, \quad u_{\alpha}(l_1/2, -l_2/2; i_1, i_2) = \nabla_1^+ U_{\alpha}, \\ u_{\alpha}(-l_1/2, l_2/2; i_1, i_2) &= \nabla_2^+ U_{\alpha}, \quad u_{\alpha}(l_1/2, l_2/2; i_1, i_2) = \nabla_1^+ \nabla_2^+ U_{\alpha} \end{aligned}$$

будут выполнены, если поле смещений конечных элементов задать в виде

$$u_{\alpha}(x_{\sigma}; i_{\sigma}) = \sum_{r=0}^1 \sum_{s=0}^1 \varphi_r(\xi_1) \varphi_s(\xi_2) \nabla_1^{+r} \nabla_2^{+s} U_{\alpha}[i_{\sigma}], \quad (1)$$

где предполагается, что $\nabla_{\alpha}^{\pm 0} = 1$, а $\nabla_{\alpha}^{\pm 1} = \nabla_{\alpha}^{\pm}$, и введены функции

$$\varphi_0(\xi) = \frac{1}{2} - \xi, \quad \varphi_1(\xi) = \frac{1}{2} + \xi.$$

Согласно соотношениям Коши (в нижнем индексе перемещений символ после запятой указывает на дифференцирование по соответствующей локальной координате)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\alpha} &= u_{\alpha,\alpha} = E_{\alpha\alpha} + K_{\alpha} \xi_{3-\alpha}, \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2}(u_{1,2} + u_{2,1}) = E_{12} + \frac{1}{2}(\lambda K_1 \xi_1 + \lambda^{-1} K_2 \xi_2), \quad \lambda = l_1 l_2^{-1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь введены осредненные по площади элемента величины

$$E_{\alpha\beta} = \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} \varepsilon_{\alpha\beta} d\xi_1 d\xi_2, \quad (3)$$

$$K_\alpha = 12 \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} \varepsilon_{\alpha\alpha} \xi_{3-\alpha} d\xi_1 d\xi_2 = 24\lambda^{2\alpha-3} \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} \varepsilon_{12} \xi_\alpha d\xi_1 d\xi_2,$$

связанные с узловыми перемещениями зависимостями

$$E_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(l_\alpha^{-1}L_\alpha^+U_\beta + l_\beta^{-1}L_\beta^+U_\alpha), \quad K_\alpha = l_\alpha^{-1}L^+U_\alpha, \quad (4)$$

содержащими операторы

$$L_\alpha^\pm = \frac{1}{2}(1 + \nabla_{3-\alpha}^\pm)\Delta_\alpha^\pm, \quad L^\pm = \Delta_\alpha^\pm \Delta_{3-\alpha}^\pm = \Delta_1^\pm \Delta_2^\pm. \quad (5)$$

Обобщенные деформации (3) имеют вполне определенный геометрический смысл: $E_{\alpha\beta}$ – осредненные по площади элемента компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$, а K_1 и K_2 – также осредненные по площади элемента взаимные повороты соответственно вертикальных и горизонтальных сторон элемента.

Обобщенный закон Гука (здесь и далее запятая в области сложного нижнего индекса играет роль разделителя)

$$n_{\alpha\alpha} = B(\varepsilon_{\alpha\alpha} + \mu\varepsilon_{3-\alpha,3-\alpha}), \quad n_{12} = (1 - \mu)B\varepsilon_{12}, \quad B = Eh(1 - \mu^2)^{-1}$$

после подстановки в него формул (2) принимает вид

$$n_{\alpha\alpha} = B(E_{\alpha\alpha} + \mu E_{3-\alpha,3-\alpha} + K_\alpha \xi_{3-\alpha} + \mu K_{3-\alpha} \xi_\alpha), \quad (6)$$

$$n_{12} = \frac{1}{2}(1 - \mu)B(2E_{12} + \lambda K_1 \xi_1 + \lambda^{-1} K_2 \xi_2).$$

Пусть $\delta\Pi$ и δA – первые вариации потенциальной энергии и работы внешних сил всей пластины. Согласно вариационному принципу Лагранжа

$$\delta\Pi - \delta A = 0. \quad (7)$$

Здесь

$$\delta\Pi = \sum_{i_1=0}^{I_1-1} \sum_{i_2=0}^{I_2-1} \delta\Pi_e, \quad \delta A = \sum_{i_1=0}^{I_1-1} \sum_{i_2=0}^{I_2-1} \delta A_e, \quad (8)$$

где $\delta\Pi_e$ и δA_e – первые вариации потенциальной энергии и работы внешних сил текущего конечного элемента. Замечая, что

$$\delta\Pi_e = l_1 l_2 \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} (n_{11} \delta\varepsilon_{11} + 2n_{12} \delta\varepsilon_{12} + n_{22} \delta\varepsilon_{22}) d\xi_1 d\xi_2,$$

с помощью зависимостей (2) устанавливаем выражение

$$\delta\Pi_e = l_1 l_2 (N_{11} \delta E_{11} + 2N_{12} \delta E_{12} + N_{22} \delta E_{22} + M_1 \delta K_1 + M_2 \delta K_2), \quad (9)$$

в котором введены осредненные по площади элемента обобщенные погонные внутренние силы

$$N_{\alpha\beta} = \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} n_{\alpha\beta} d\xi_1 d\xi_2, \quad M_\alpha = \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} (\xi_{3-\alpha} n_{\alpha\alpha} + \lambda^{3-2\alpha} \xi_\alpha n_{12}) d\xi_1 d\xi_2.$$

Подставляя сюда формулы (6), приходим к зависимостям

$$N_{\alpha\alpha} = B(E_{\alpha\alpha} + \mu E_{3-\alpha,3-\alpha}), \quad N_{12} = (1 - \mu)B E_{12}, \quad M_\alpha = B\beta_\alpha K_\alpha \quad (10)$$

и обратным им соотношениям

$$E_{\alpha\alpha} = \frac{N_{\alpha\alpha} - \mu N_{3-\alpha,3-\alpha}}{(1 - \mu^2)B}, \quad E_{12} = \frac{N_{12}}{(1 - \mu)B}, \quad K_\alpha = \frac{M_\alpha}{B\beta_\alpha}. \quad (11)$$

В них использованы обозначения

$$\beta_\alpha = \frac{1}{12} \left[1 + \frac{1}{2} (1 - \mu) \lambda^{6-4\alpha} \right]. \quad (12)$$

Сопоставляя формулы (6), (10), находим

$$\begin{aligned} n_{\alpha\alpha} &= N_{\alpha\alpha} + \beta_\alpha^{-1} M_\alpha \xi_{3-\alpha} + \mu \beta_{3-\alpha}^{-1} M_{3-\alpha} \xi_\alpha, \\ n_{12} &= N_{12} + \frac{1}{2} (1 - \mu) [\lambda \beta_1^{-1} M_1 \xi_1 + (\lambda \beta_2)^{-1} M_2 \xi_2]. \end{aligned} \quad (13)$$

Подставим в формулу (9) выражения (4), а полученный результат в первую формулу (8). Тогда после суммирования по частям получим

$$\delta \Pi = -l_1 l_2 \sum_{i_1=0}^{I_1} \sum_{i_2=0}^{I_2} \sum_{\alpha=1}^2 l_\alpha^{-1} (\mathbf{L}_\alpha^- N_{\alpha\alpha} + \lambda^{3-2\alpha} \mathbf{L}_{3-\alpha}^- N_{12} - \mathbf{L}^- M_\alpha) \delta U_\alpha. \quad (14)$$

Напомним, что здесь, согласно принятому соглашению, должны быть опущены величины, появляющиеся после раскрытия разностных операторов и указывающие на несуществующие элементы системы.

Первая вариация работы внешних сил текущего конечного элемента равна

$$\begin{aligned} \delta A_e &= \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ l_1 l_2 \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} X_\alpha \delta u_\alpha(x_1, x_2) d\xi_1 d\xi_2 + \right. \\ &\quad + l_2 \int_{-0,5}^{0,5} \left[X_{1\alpha}^{(0)}(x_2) \delta u_\alpha(-l_1/2, x_2) + X_{1\alpha}^{(1)}(x_2) \delta u_\alpha(l_1/2, x_2) \right] d\xi_2 + \\ &\quad \left. + l_1 \int_{-0,5}^{0,5} \left[X_{2\alpha}^{(0)}(x_1) \delta u_\alpha(x_1, -l_2/2) + X_{2\alpha}^{(1)}(x_1) \delta u_\alpha(x_1, l_2/2) \right] d\xi_1 \right\}. \end{aligned}$$

Здесь двойной интеграл присущ всем конечным элементам, а одинарные интегралы свойственны только тем граничным элементам, к кромкам которых приложены означенные внешние силы. Кроме того, предполагается, что внешние силы X_α , $X_{\alpha\beta}^{(0)}$ и $X_{\alpha\beta}^{(1)}$ записаны в соответствующих локальных координатах элемента.

Раскрывая последнюю формулу с помощью выражений (1), находим

$$\delta A_e = l_1 l_2 \sum_{\alpha=1}^2 \left(P_\alpha^{(00)} + P_\alpha^{(10)} \nabla_1^+ + P_\alpha^{(01)} \nabla_2^+ + P_\alpha^{(11)} \nabla_1^+ \nabla_2^+ \right) \delta U_\alpha, \quad (15)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} P_\alpha^{(rs)} &= X_\alpha^{(rs)} + X_{1\alpha}^{(rs)} + X_{2\alpha}^{(rs)}, \quad X_\alpha^{(rs)} = \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} X_\alpha \varphi_r(\xi_1) \varphi_s(\xi_2) d\xi_1 d\xi_2, \\ X_{1\alpha}^{(rs)} &= l_1^{-1} \int_{-0,5}^{0,5} X_{1\alpha}^{(r)} \varphi_s(\xi_2) d\xi_2, \quad X_{2\alpha}^{(rs)} = l_2^{-1} \int_{-0,5}^{0,5} X_{2\alpha}^{(s)} \varphi_r(\xi_1) d\xi_1 \quad (r, s = 0, 1). \end{aligned} \quad (16)$$

Подстановка выражения (15) во вторую формулу (8) дает

$$\delta A = l_1 l_2 \sum_{i_1=0}^{I_1} \sum_{i_2=0}^{I_2} \sum_{\alpha=1}^2 P_\alpha \delta U_\alpha. \quad (17)$$

Здесь введены обобщенные узловые внешние силы

$$P_\alpha = P_\alpha^{(00)} + \nabla_1^- P_\alpha^{(10)} + \nabla_2^- P_\alpha^{(01)} + \nabla_1^- \nabla_2^- P_\alpha^{(11)}. \quad (18)$$

Выражения (14), (17) позволяю записать равенство (7) в виде

$$\sum_{i_1=0}^{I_1} \sum_{i_2=0}^{I_2} \sum_{\alpha=1}^2 l_\alpha^{-1} (\mathbf{L}_\alpha^- N_{\alpha\alpha} + \lambda^{3-2\alpha} \mathbf{L}_{3-\alpha}^- N_{12} - \mathbf{L}^- M_\alpha + l_\alpha P_\alpha) \delta U_\alpha = 0.$$

Отсюда вытекают уравнения равновесия внутренних узлов (см. (5))

$$L^- N_{\alpha\alpha} + \lambda^{3-2\alpha} L_{3-\alpha}^- N_{12} - L^- M_\alpha + l_\alpha P_\alpha = 0. \quad (19)$$

Уравнения равновесия граничных узлов, играющие роль статических граничных условий, получаются из них при соответствующих значениях i_σ путем обнуления величин, указывающих на несуществующие элементы.

Общее решение уравнений (19) можно представить как сумму

$$N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}^0 + N_{\alpha\beta}^p, \quad M_\alpha = M_\alpha^0 + M_\alpha^p \quad (20)$$

какого-либо частного решения $N_{\alpha\beta}^p, M_\alpha^p$ неоднородных уравнений (19), т.е.

$$L^- N_{\alpha\alpha}^p + \lambda^{3-2\alpha} L_{3-\alpha}^- N_{12}^p - L^- M_\alpha^p + l_\alpha P_\alpha = 0,$$

и общего решения $N_{\alpha\beta}^0, M_\alpha^0$ однородных уравнений

$$L^- N_{\alpha\alpha}^0 + \lambda^{3-2\alpha} L_{3-\alpha}^- N_{12}^0 - L^- M_\alpha^0 = 0. \quad (21)$$

Полагая здесь

$$N_{\alpha\alpha}^0 = \Delta_{3-\alpha}^+ \Psi_\alpha, \quad N_{12}^0 = L^+ \Psi_3, \quad (22)$$

где $\Psi_i = \Psi_i[i_\sigma]$ ($i=1,2,3$) – произвольные функции дискретных аргументов i_σ , приходим к равенствам (см. (5))

$$L^- \left[\frac{1}{2}(1 + \nabla_{3-\alpha}^+) \Psi_\alpha + \lambda^{3-2\alpha} L_{3-\alpha}^+ \Psi_3 - M_\alpha^0 \right] = 0,$$

которые очевидно будут выполнены, если положить

$$M_\alpha^0 = \frac{1}{2}(1 + \nabla_{3-\alpha}^+) \Psi_\alpha + \lambda^{3-2\alpha} L_{3-\alpha}^+ \Psi_3. \quad (23)$$

Итак, общее решение уравнений (19) имеет вид

$$\begin{aligned} N_{\alpha\alpha} &= \Delta_{3-\alpha}^+ \Psi_\alpha + N_{\alpha\alpha}^p, & N_{12} &= L^+ \Psi_3 + N_{12}^p, \\ M_\alpha &= \frac{1}{2}(1 + \nabla_{3-\alpha}^+) \Psi_\alpha + \lambda^{3-2\alpha} L_{3-\alpha}^+ \Psi_3 + M_\alpha^p. \end{aligned} \quad (24)$$

Оно найдено с точностью до трех функций Ψ_i , которые назовем силовыми функциями. Области их определения диктуются областями определения $i_\sigma \in [0, I_\sigma - 1]$ обобщенных внутренних сил $N_{\alpha\alpha}, N_{12}, M_\alpha$ и даются значениями $i_\sigma \in [0, I_\sigma - \delta_{\alpha\sigma}]$ для функций Ψ_α и $i_\sigma \in [0, I_\sigma]$ для функции Ψ_3 .

Раскрывая однородные уравнения равновесия граничных узлов с помощью формул (22), (23), устанавливаем, что в случае свободной пластины силовые функции удовлетворяют граничным условиям

$$\text{при } i_\sigma = 0, I_\sigma \quad \Psi_{3-\sigma} = \Psi_3 = 0. \quad (25)$$

Следовательно, Ψ_α имеет нетривиальные значения при $i_\sigma \in [1 - \delta_{\alpha\sigma}, I_\sigma - 1]$, а Ψ_3 при $i_\sigma \in [1, I_\sigma - 1]$. Общее число таких значений силовых функций составляет $3I_1 I_2 - 2(I_1 + I_2) + 1$ и совпадает со степенью статической неопределенности конечно-элементной упругой системы, которая равна разности числа $5I_1 I_2$ искомым обобщенным внутренним сил $N_{\alpha\alpha}, N_{12}, M_\alpha$ и числа $2(I_1 + 1)(I_2 + 1) - 3$ независимых уравнений равновесия узлов (19).

С целью выявления уравнений совместности деформаций обратимся к началу наименьшей работы, согласно которому

$$\delta \Pi = \sum_{i_1=0}^{I_1-1} \sum_{i_2=0}^{I_2-1} \delta \Pi_e = 0. \quad (26)$$

Первая вариация потенциальной энергии конечного элемента, равная теперь

$$\delta\Pi_e = l_1 l_2 \int_{-0,5}^{0,5} \int_{-0,5}^{0,5} (\varepsilon_{11} \delta n_{11} + 2\varepsilon_{12} \delta n_{12} + \varepsilon_{22} \delta n_{22}) d\xi_1 d\xi_2,$$

с помощью формул (3), (13) приводится к виду (согласно (20), $\delta N_{\alpha\alpha} = \delta N_{\alpha\alpha}^0$, $\delta N_{12} = \delta N_{12}^0$, $\delta M_\alpha = \delta M_\alpha^0$)

$$\delta\Pi_e = l_1 l_2 (E_{11} \delta N_{11}^0 + 2E_{12} \delta N_{12}^0 + E_{22} \delta N_{22}^0 + K_1 \delta M_1^0 + K_2 \delta M_2^0).$$

Подставляя это выражение в условие (26) и заменяя $N_{\alpha\beta}^0$, M_α^0 соответствующими выражениями (22), (23), после суммирования по частям приходим к равенству

$$\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{i_1=0}^{I_1-\delta_{1\alpha}} \sum_{i_2=0}^{I_2-\delta_{2\alpha}} \left[\frac{1}{2} (1 + \nabla_{3-\alpha}^-) K_\alpha - \Delta_{3-\alpha}^- E_{\alpha\alpha} \right] \delta\Psi_\alpha + \sum_{i_1=0}^{I_1} \sum_{i_2=0}^{I_2} \left[2L^- E_{12} - \lambda L_2^- K_1 - \lambda^{-1} L_1^- K_2 \right] \delta\Psi_3 = 0.$$

Отсюда устанавливаем, что в области нетривиальных значений силовых функций имеют место уравнения совместности деформаций

$$\begin{aligned} 2\Delta_{3-\alpha}^- E_{\alpha\alpha} &= (1 + \nabla_{3-\alpha}^-) K_\alpha \quad (i_\sigma \in [\delta_{\sigma,3-\alpha}, I_\sigma]), \\ 2L^- E_{12} &= \lambda L_2^- K_1 + \lambda^{-1} L_1^- K_2 \quad (i_\sigma \in [1, I_\sigma - 1]), \end{aligned} \quad (27)$$

число которых совпадает со степенью статической неопределимости системы. Нетрудно видеть, что формулы (4) обращают эти уравнения в тривиальные тождества $0 \equiv 0$. В области граничных значений силовых функций (см. (25)) равенства (27), усеченные для соответствующих значений i_σ на несуществующие величины, дают геометрические граничные условия вида

$$\begin{aligned} 2E_{\alpha\alpha} &= K_\alpha, \quad \Delta_\alpha^- (4E_{12} - \lambda^{2\alpha-3} K_{3-\alpha}) = \lambda^{3-2\alpha} (1 + \nabla_\alpha^-) K_\alpha \quad (i_{3-\alpha} = 0), \\ 2E_{\alpha\alpha} &= -K_\alpha, \quad \Delta_\alpha^- (4E_{12} + \lambda^{2\alpha-3} K_{3-\alpha}) = \lambda^{3-2\alpha} (1 + \nabla_\alpha^-) K_\alpha \quad (i_{3-\alpha} = I_{3-\alpha} - 1), \end{aligned} \quad (28)$$

которые при необходимости могут быть выражены через обобщенные внутренние силы (см. (11)), а затем и через силовые функции (см. (24)).

Не касаясь деталей, заметим, что в пределе при $l_\sigma \rightarrow 0$ текущий узел переходит в текущую точку исходной пластины, в эту же точку стягиваются конечные элементы из окрестности фиксированного узла, а определяющие соотношения построенной теории переходят в соответствующие соотношения плоского напряженного состояния.

2. АЛЬТЕРНАТИВНЫЕ ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧ

Напряженно-деформированное состояние конечно-элементной упругой системы найдено (см. (1), (2), (13)) с точностью до функций дискретных аргументов U_α , $E_{\alpha\beta}$, K_α , $N_{\alpha\beta}$ и M_α , связанных между собой геометрическими соотношениями (4), физическими зависимостями (10), (11), уравнениями равновесия (19) и уравнениями совместности деформаций (27). Эти уравнения, образуя замкнутую систему определяющих соотношений построенной теории, допускают альтернативные постановки дискретных краевых задач.

Примем сначала за основные неизвестные узловые смещения U_α . Внутренние силы выражаются через них формулами (см. (4), (10))

$$\begin{aligned} N_{\alpha\alpha} &= Bl_\alpha^{-1}(L_\alpha^+ U_\alpha + \mu\lambda^{3-2\alpha} L_{3-\alpha}^+ U_{3-\alpha}), \\ N_{12} &= \frac{1}{2}(1-\mu)Bl_\alpha^{-1}(L_\alpha^+ U_{3-\alpha} + \lambda^{3-2\alpha} L_{3-\alpha}^+ U_\alpha), \quad M_\alpha = B\beta_\alpha l_\alpha^{-1} L^+ U_\alpha. \end{aligned} \quad (29)$$

Подставляя их в уравнения равновесия (19), приходим к системе уравнений в частных разностях

$$R_\alpha U_\alpha + \lambda^{3-2\alpha} R U_{3-\alpha} + P_\alpha^* = 0, \quad (30)$$

в которой введены обозначения

$$\begin{aligned} R_\alpha &= 8\beta_\alpha \Delta_1^2 \Delta_2^2 + 4\Delta_\alpha^2 + 2(1-\mu)\lambda^{6-4\alpha} \Delta_{3-\alpha}^2, \\ R &= \frac{1}{2}(1+\mu)(\Delta_1^+ + \Delta_1^-)(\Delta_2^+ + \Delta_2^-), \quad P_\alpha^* = 4l_\alpha^2 B^{-1} P_\alpha. \end{aligned} \quad (31)$$

Уравнения (30) выглядят так, как они записаны, для внутренних узлов и должны быть дополнены граничными условиями. Постановка геометрических граничных условий очевидна. Чтобы получить уравнения равновесия граничных узлов в узловых перемещениях, нужно в уравнениях равновесия (19), записанных для значений i_σ , отвечающих граничным узлам, опустить несуществующие величины и подставить в них зависимости (29).

Более предпочтительным выглядит следующий путь. Предположим, что жесткости конечных элементов различны, т.е. $B = B[i_1, i_2]$. Тогда формулы (31) примут вид

$$\begin{aligned} R_\alpha &= 4L_\alpha^- BL_\alpha^+ + 2(1-\mu)\lambda^{6-4\alpha} L_{3-\alpha}^- BL_{3-\alpha}^+ - 4\beta_\alpha L^- BL^+, \\ R &= 4\mu L_\alpha^- BL_{3-\alpha}^+ + 2(1-\mu)L_{3-\alpha}^- BL_\alpha^+, \quad P_\alpha^* = 4l_\alpha^2 P_\alpha. \end{aligned} \quad (32)$$

И теперь, чтобы расписать уравнения равновесия в перемещениях любого узла достаточно в уравнениях (30) для соответствующих значений i_σ раскрыть операторы (32), положить равными нулю жесткости B несуществующих конечных элементов, если таковые имеются, и вернуть остальным жесткостям их фактические значения.

Несомненным достоинством описанной процедуры является и то, что она позволяет распространить рассматриваемую постановку задач на области тела, отличные от прямоугольной формы. Для этого достаточно нанести на конечно-элементную сетку форму тела и применить описанную процедуру ко всем узлам, оказавшимся внутри его границы.

Примем теперь за основные неизвестные обобщенные внутренние силы $N_{\alpha\alpha}$, N_{12} , M_α . Подставляя зависимости (11) в уравнения (27), приходим к уравнениям совместности деформаций в обобщенных внутренних силах

$$\begin{aligned} 2\beta_\alpha \Delta_{3-\alpha}^- (N_{\alpha\alpha} - \mu N_{3-\alpha, 3-\alpha}) &= (1-\mu^2)(1 + \nabla_{3-\alpha}^-) M_\alpha \quad (i_\sigma \in [\delta_{\sigma, 3-\alpha}, I_\sigma]), \\ 2\beta_1 \beta_2 L^- N_{12} &= (1-\mu)(\lambda\beta_2 L_2^- M_1 + \lambda^{-1}\beta_1 L_1^- M_2) \quad (i_\sigma \in [1, I_\sigma - 1]). \end{aligned}$$

Замена этих сил выражениями (24) приводит к системе уравнений в частных разностях

$$\begin{aligned} L_{\alpha\alpha} \Psi_\alpha - L_{\alpha, 3-\alpha} \Psi_{3-\alpha} - (1-\mu^2) L_{\alpha 3}^+ \Psi_3 + F_\alpha &= 0 \quad (i_\sigma \in [\delta_{\sigma, 3-\alpha}, I_\sigma - 1]), \\ -\beta_2 L_{13}^- \Psi_1 - \beta_1 L_{23}^- \Psi_2 + L_{33} \Psi_3 + F_3 &= 0 \quad (i_\sigma \in [1, I_\sigma - 1]) \end{aligned} \quad (33)$$

с операторами

$$\begin{aligned}
L_{\alpha\alpha} &= (4\beta_\alpha - 1 + \mu^2)\Delta_{3-\alpha}^2 - 4(1 - \mu^2), \\
L_{\alpha,3-\alpha} &= 4\mu\beta_\alpha\Delta_\alpha^+\Delta_{3-\alpha}^-, \quad L_{\alpha 3}^\pm = \lambda^{3-2\alpha}(1 + \nabla_\alpha^\pm)(\Delta_{3-\alpha}^+ + \Delta_{3-\alpha}^-), \\
L_{33} &= 8\beta_1\beta_2(1 - \mu)^{-1}\Delta_1^2\Delta_2^2 - \lambda^2\beta_2(\Delta_1^2 + 4)\Delta_2^2 - \lambda^{-2}\beta_1\Delta_1^2(\Delta_2^2 + 4)
\end{aligned}$$

и свободными членами

$$\begin{aligned}
F_\alpha &= 4\beta_\alpha\Delta_{3-\alpha}^-(N_{\alpha\alpha}^p - \mu N_{3-\alpha,3-\alpha}^p) - 2(1 - \mu^2)(1 + \nabla_{3-\alpha}^-)M_\alpha^p, \\
F_3 &= 8\beta_1\beta_2(1 - \mu)^{-1}L^-N_{12}^p - 4\lambda\beta_2L_2^-M_1^p - 4\lambda^{-1}\beta_1L_1^-M_2^p.
\end{aligned}$$

Система (33) предназначена для отыскания силовых функций. В случае свободного тела они должны быть подчинены условиям (25), а в случае геометрических граничных условий необходимо позаботиться о выполнении условий вида (28).

3. НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Проиллюстрируем применение построенной аналитической теории метода конечных элементов примерами, допускающими точные аналитические решения.

Остановимся сначала на постановке задач в силах.

Простейший пример имеем при $l_\alpha = a_\alpha$. Тогда $I_\alpha = 1$, и пластина представляет собой единственный конечный элемент с номером 0,0. Напряженное состояние его описывается пятью внутренними силовыми факторами $N_{\alpha\alpha}[0,0]$, $N_{12}[0,0]$, $M_\alpha[0,0]$. При отсутствии внешних геометрических связей задача о равновесии единственного конечного элемента статически определимая. Действительно, из восьми уравнений равновесия (см. (19))

$$\begin{aligned}
N_{\alpha\alpha} + \lambda^{3-2\alpha}N_{12} - 2M_\alpha + 2l_\alpha P_\alpha[0,0] &= 0, \\
-N_{\alpha\alpha} + \lambda^{3-2\alpha}N_{12} + 2M_\alpha + 2l_\alpha P_\alpha[\delta_{\alpha 1}, \delta_{\alpha 2}] &= 0, \\
N_{\alpha\alpha} - \lambda^{3-2\alpha}N_{12} + 2M_\alpha + 2l_\alpha P_\alpha[\delta_{\alpha 2}, \delta_{\alpha 1}] &= 0, \\
-N_{\alpha\alpha} - \lambda^{3-2\alpha}N_{12} - 2M_\alpha + 2l_\alpha P_\alpha[1,1] &= 0.
\end{aligned} \tag{34}$$

3 каких-то уравнения отражают глобальное равновесие пластины, а остальных пяти уравнений достаточно для нахождения такого же количества внутренних силовых факторов. Выбирая за независимые уравнения равновесия первые 5 уравнений (34), находим ($P_\alpha[r,s] = P_\alpha^{(rs)}$; $r,s = 0,1$; см. (18), (16))

$$\begin{aligned}
N_{11} &= -l_1(P_1^{(00)} + P_1^{(01)}), \quad N_{12} = -l_2(P_1^{(00)} + P_1^{(10)}), \\
N_{22} &= -l_2(P_2^{(00)} + P_2^{(10)}), \quad M_1 = -\frac{1}{2}l_1(P_1^{(10)} + P_1^{(01)}), \\
M_2 &= -\frac{1}{2}l_2(P_2^{(10)} + P_2^{(01)}).
\end{aligned} \tag{35}$$

Этот точный результат справедлив для произвольной самоуравновешенной внешней нагрузки на конечный элемент.

В частности, при $X_\alpha = X_{2\alpha}^{(s)} = X_{12}^{(s)} = 0$, $X_{11}^{(s)} = -(-1)^s p$ ($s = 0,1$) имеет место равномерное растяжение элемента погонными силами p в горизонтальном направлении. Согласно формулам (16) $P_1^{(rs)} = X_{11}^{(rs)} = -0,5(-1)^r p l_1^{-1}$, $P_2^{(rs)} = 0$ ($r,s = 0,1$), так что (см. (35), (13)) $N_{\alpha 2} = M_\alpha = n_{\alpha 2} = 0$, $N_{11} = n_{11} = p$.

Пусть теперь $X_\alpha = X_{\alpha\alpha}^{(s)} = 0$, $X_{\alpha,3-\alpha}^{(s)} = -(-1)^s \tau$ ($s = 0,1$), что отвечает чистому сдвигу элемента постоянными погонными силами τ , приложенными по его

краям. По формулам (16) находим $P_\alpha^{(rs)} = X_{3-\alpha,\alpha}^{(rs)} = -0,5(-1)^r \tau l_\alpha^{-1}$ ($r, s = 0, 1$), так что (см. (35), (13)) $N_{\alpha\alpha} = n_{\alpha\alpha} = M_\alpha = 0$, $N_{12} = n_{12} = \tau$.

Заметим, что эти частные решения, точные для единственного конечного элемента, являются точными решениями и аналогичных задач о плоском напряженном состоянии пластины.

Более сложный пример имеем при $l_1 = a_1 / I_1$ и $l_2 = a_2$. Тогда $I_2 = 1$ и конечно-элементная модель пластины представляет собой дискретно одномерный регулярный ряд конечных элементов с номерами $i_1, 0$ ($i_1 = 0, 1, 2, \dots, I_1 - 1$; ради краткости полагаем $i_1 = i$ и $I_1 = I$; рис.3). Напряженное состояние модели описывается внутренними силовыми факторами $N_{\alpha\alpha}[i, 0]$, $N_{12}[i, 0]$, $M_\alpha[i, 0]$ – функциями одного дискретного аргумента i . Уравнения равновесия узлов свободной системы представимы в виде

$$\begin{aligned} \Delta^- N_{1\alpha} &= -l_\alpha P_\alpha^+[i], \\ \lambda^{2-\alpha}(1 + \nabla^-)N_{\alpha 2} - 2\Delta^- M_\alpha &= -l_\alpha P_\alpha^-[i] \quad (i \in [1, I - 1]), \\ N_{1\alpha}[0, 0] &= -l_\alpha P_\alpha^+[0], \quad \lambda^{2-\alpha}N_{\alpha 2}[0, 0] - 2M_\alpha[0, 0] = -l_\alpha P_\alpha^-[0], \\ N_{1\alpha}[I - 1, 0] &= -l_\alpha P_\alpha^+[I], \quad \lambda^{2-\alpha}N_{\alpha 2}[I - 1, 0] + 2M_\alpha[I - 1, 0] = -l_\alpha P_\alpha^-[I], \end{aligned} \quad (36)$$

где опять же ради краткости принято, что $\Delta_1^\pm = \Delta^\pm$, $\nabla_1^\pm = \nabla^\pm$, а

$$P_\alpha^\pm[i] = P_\alpha[i, 0] \pm P_\alpha[i, 1].$$

Общее решение этих уравнений с точностью до какого-то частного их решения $N_{\alpha\alpha}^p$, N_{12}^p , M_α^p дается формулами (см. (24); из-за исчезновения области определения нетривиальных значений $\Psi_1 = \Psi_3 \equiv 0$, а $\Psi_2 = \Psi_2[i, 0] = \Psi_2[i]$)

$$\begin{aligned} N_{1\alpha} &= N_{1\alpha}^p, \quad N_{22} = \Delta^+ \Psi_2 + N_{22}^p, \\ M_1 &= M_1^p, \quad M_2 = \frac{1}{2}(1 + \nabla^+) \Psi_2 + M_2^p, \end{aligned}$$

в чем легко убедиться непосредственной подстановкой этого решения в уравнения (36). Дискретная краевая задача, служащая для отыскания силовой функции $\Psi_2[i]$, имеет вид

$$(\nabla^+ - 2\eta + \nabla^-)\Psi_2[i] = F[i] \quad (i = [1, I]), \quad \Psi_2[0] = \Psi_2[I] = 0, \quad (37)$$

где

$$\eta = \frac{4\beta_2 + 1 - \mu^2}{4\beta_2 - 1 + \mu^2}, \quad F = \frac{2(1 - \mu^2)(1 + \nabla^-)M_2^p - 4\beta_2\Delta^-(N_{22}^p - \mu N_{11}^p)}{4\beta_2 - 1 + \mu^2}.$$

Она сформирована из первого уравнения (33) при $\alpha = 2$ и краевых условий (25), отвечающих Ψ_2 . Общее решение задачи (37) дается формулами [11]

$$\Psi_2[i] = \Psi_2^*[i] - \Psi_2^*[I] \frac{u_{i-1}}{u_{I-1}}, \quad \Psi_2^*[i] = \sum_{k=1}^{i-1} u_{i-k-1} F[k],$$

в которых $u_i = u_i(\eta)$ – полином Чебышева 2-го рода относительно η степени i .

Постановку задач в смещениях проиллюстрируем на примере пластины, закрепленной по горизонтальным краям, конечно-элементная модель которой имеет два горизонтальных ряда одинаковых конечных элементов с номерами i_1, i_2 ($i_1 \in [0, I_1]$; $I_2 = 2$; $i_2 = 0, 1$). Вновь ради краткости записи полагаем $i_1 = i$, $I_1 = I$, $i_2 = j$ и опускаем индекс 1 для операторов, действующих на аргумент i_1 (рис.4). В

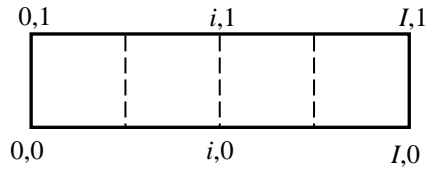


Рис.3.

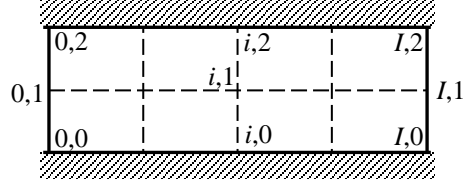


Рис.4.

таким случае $l_1 = a_1 / I$, $l_2 = a_2 / 2$, а узловые смещения представляют собой функции одного дискретного аргумента: $U_\alpha[i] = U_\alpha[i, 1]$.

При любых допустимых внешних силах на пластину напряженно-деформированное состояние ее конечно-элементной модели описывается деформациями $E_{\alpha\alpha}[i, j]$, $E_{12}[i, j]$, $K_\alpha[i, j]$ и внутренними силами $N_{\alpha\alpha}[i, j]$, $N_{12}[i, j]$, $M_\alpha[i, j]$ ($j = 0, 1$), которые согласно формулам (4), (10) выражаются через узловые смещения $U_\alpha[i]$ зависимостями

$$\begin{aligned} E_{11}[i, j] &= \frac{1}{2} l_1^{-1} \Delta^+ U_1, & E_{12}[i, j] &= \frac{1}{4} l_1^{-1} [\Delta^+ U_2 + (-1)^j \lambda (1 + \nabla^+) U_1], \\ E_{22}[i, j] &= \frac{1}{2} (-1)^j l_2^{-1} (1 + \nabla^+) U_2, & K_\alpha[i, j] &= (-1)^j l_2^{-1} \Delta^+ U_\alpha, \\ N_{11}[i, j] &= \frac{1}{2} B l_1^{-1} [\Delta^+ U_1 + (-1)^j \mu \lambda (1 + \nabla^+) U_2], \\ N_{22}[i, j] &= \frac{1}{2} B l_2^{-1} [(-1)^j (1 + \nabla^+) U_2 + \mu \lambda^{-1} \Delta^+ U_1], \\ N_{12}[i, j] &= \frac{1}{4} (1 - \mu) B l_1^{-1} [\Delta^+ U_2 + (-1)^j \lambda (1 + \nabla^+) U_1], \\ M_\alpha[i, j] &= B \beta_\alpha l_\alpha^{-1} \Delta^+ U_\alpha. \end{aligned}$$

Уравнения равновесия (19) для внутренних свободных узлов принимают вид $\lambda^{1-\alpha} \Delta^- N_{1\alpha}^+ + \lambda^{2-\alpha} (1 + \nabla^-) N_{\alpha 2}^- - 2 \Delta^- M_\alpha^- + 2 l_\alpha P_\alpha[i, 1] = 0$ ($i \in [1, I - 1]$), (38)

где

$$\begin{aligned} N_{1\alpha}^+[i] &= N_{1\alpha}[i, 1] + N_{1\alpha}[i, 0] = \left[\frac{1}{2} (1 - \mu) \right]^{\alpha-1} B l_1^{-1} \Delta^+ U_\alpha, \\ N_{\alpha 2}^-[i] &= N_{\alpha 2}[i, 1] - N_{\alpha 2}[i, 0] = - \left[\frac{1}{2} (1 - \mu) \right]^{2-\alpha} B l_2^{-1} (1 + \nabla^+) U_\alpha, \\ M_\alpha^-[i] &= -2 B \beta_\alpha l_\alpha^{-1} \Delta^+ U_\alpha. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставляя эти выражения в равенства (38), приходим к уравнениям

$$(\nabla^+ - 2\eta_\alpha + \nabla^-) U_\alpha[i] = P_\alpha^*[i] \quad (i \in [1, I - 1]), \quad (40)$$

служащим для отыскания узловых смещений. В этих уравнениях

$$\eta_1 = \frac{8\beta_1}{1 - 4\beta_1}, \quad \eta_2 = \frac{8\beta_2}{8\beta_2 - 1}, \quad P_1^*[i] = \frac{l_1^2 P_1[i, 1]}{B(4\beta_1 - 1)}, \quad P_2^*[i] = \frac{l_2^2 P_2[i, 1]}{B(1 - 8\beta_2)}.$$

Общее решение уравнений (40), вытекающих и из системы (30), имеет вид

$$U_\alpha[i] = C_{\alpha 1} u_{i-1}^{(\alpha)} + C_{\alpha 2} u_i^{(\alpha)} + U_\alpha^*[i], \quad (41)$$

где $C_{\alpha\beta}$ – постоянные величины, $u_i^{(\alpha)} = u_i(\eta_\alpha)$, а

$$U_\alpha^*[i] = \sum_{k=1}^{i-1} u_{i-k-1}^{(\alpha)} P_\alpha^*[k].$$

Для отыскания постоянных $C_{\alpha\beta}$ надлежит воспользоваться краевыми условиями. Статические граничные условия имеют место, если крайние узлы с номерами 0,1 и I,1 свободны. Уравнения равновесия их (см. (19))

$$\lambda^{1-\alpha} N_{1\alpha}^+[0] + \lambda^{2-\alpha} N_{\alpha 2}^-[0] - 2M_{\alpha}^-[0] + 2l_{\alpha} P_{\alpha}[0,1] = 0,$$

$$-\lambda^{1-\alpha} N_{1\alpha}^+[I-1] + \lambda^{2-\alpha} N_{\alpha 2}^-[I-1] + 2M_{\alpha}^-[I-1] + 2l_{\alpha} P_{\alpha}[I,1] = 0$$

с помощью выражений (39) принимают вид

$$U_{\alpha}[1] - \eta_{\alpha} U_{\alpha}[0] = P_{\alpha}^*[0], \quad U_{\alpha}[I-1] - \eta_{\alpha} U_{\alpha}[I] = P_{\alpha}^*[I]. \quad (42)$$

Подставляя в них решение (41), находим

$$C_{\alpha 1} = \frac{\eta_{\alpha} u_I^{(\alpha)} - u_{I-1}^{(\alpha)}}{(\eta_{\alpha}^2 - 1) u_{I-1}^{(\alpha)}} P_{\alpha}^*[0] + \eta_{\alpha} \frac{P_{\alpha}^*[I] - U_{\alpha}^*[I-1] + \eta_{\alpha} U_{\alpha}^*[I]}{(\eta_{\alpha}^2 - 1) u_{I-1}^{(\alpha)}},$$

$$C_{\alpha 2} = \frac{\eta_{\alpha} u_{I-1}^{(\alpha)} - u_I^{(\alpha)}}{(\eta_{\alpha}^2 - 1) u_{I-1}^{(\alpha)}} P_{\alpha}^*[0] - \frac{P_{\alpha}^*[I] - U_{\alpha}^*[I-1] + \eta_{\alpha} U_{\alpha}^*[I]}{(\eta_{\alpha}^2 - 1) u_{I-1}^{(\alpha)}}.$$

Если на граничные узлы 0,1 и I,1 наложены геометрические связи, то вместо условий (42) следует воспользоваться геометрическими граничными условиями. Пусть эти узлы закреплены. Тогда

$$U_{\alpha}[0] = 0, \quad U_{\alpha}[I] = 0.$$

Отсюда находим

$$C_{\alpha 1} = -U_{\alpha}^*[I] / u_{I-1}^{(\alpha)}, \quad C_{\alpha 2} = 0$$

и решение (41) принимает вид

$$U_{\alpha}[i] = U_{\alpha}^*[i] - U_{\alpha}^*[I] \frac{u_{i-1}^{(\alpha)}}{u_{I-1}^{(\alpha)}}.$$

Наконец, если узел 0,1 свободен, а узел I,1 закреплен, то имеют место смешанные граничные условия

$$U_{\alpha}[1] - \eta_{\alpha} U_{\alpha}[0] = P_{\alpha}^*[0], \quad U_{\alpha}[I] = 0.$$

Решение (41), подчиненное этим условиям, дается формулами

$$U_{\alpha}[i] = U_{\alpha}^*[i] - U_{\alpha}^*[I] \frac{u_i^{(\alpha)} - \eta_{\alpha} u_{i-1}^{(\alpha)}}{u_i^{(\alpha)} - \eta_{\alpha} u_{I-1}^{(\alpha)}} + P_{\alpha}^*[0] \frac{u_I^{(\alpha)} u_{i-1}^{(\alpha)} - u_i^{(\alpha)} u_{I-1}^{(\alpha)}}{u_I^{(\alpha)} - \eta_{\alpha} u_{I-1}^{(\alpha)}}.$$

В заключение отметим, что результаты численного решения системы (30) для ряда тестовых задач о прямоугольной пластине совпали с соответствующими результатами, полученными для тех же конечно-элементных представлений с помощью программного комплекса ANSYS.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыбаков Л.С. Об аналитической теории метода конечных элементов в механике упругих тел / X-я юбилейная международная конф. «Вычислительная механика и современные прикладные программные системы». Тезисы докладов. – Переславль-Залесский, 1999. – С.171-172.
2. Рыбаков Л.С. Метод конечных элементов с точки зрения механики регулярных упругих систем // Конструкции из композиционных материалов. – 2000. – Вып.2. – С.41-49.
3. Рыбаков Л.С. Упругий анализ одной плоской регулярной стержневой структуры // Изв. РАН. МТТ. – 1996. – №1. – С.198-207.
4. Рыбаков Л.С. Линейная теория плоской ортогональной решетки // Изв. РАН. МТТ. – 1999. – №4. – С.174-189.
5. Рыбаков Л.С. Линейная теория упругого призматического каркаса // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – №4. – С.106-118.

6. Годунов С.К., Рябенкий В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. – М.: Наука, 1977. – 439 с.
7. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 588 с.
8. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
9. Блейх Ф., Мелан Е. Уравнения в конечных разностях статики сооружений. – Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1936. – 383 с.
10. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей. – М.: Физматгиз, 1959. – 400 с.
11. Математические основы теории автоматического регулирования. Т.2 / Под ред. Б.К.Чемоданова. – М.: Высш. шк., 1977. – 453 с.
12. Jordan C. Calculus of finite differences. – New York: Chelsea Publishing Company, 1950. – 652 p.
13. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
14. Зенкевич О., Морган К. Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
15. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. – М.: Высш. шк., 1985. – 392 с.
16. Постнов В.А., Хархурим И.Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.
17. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.

Поступила в редакцию 17 июня 2015 года.

Сведения об авторе:

Рыбаков Леонид Сергеевич – д.ф.-м.н., профессор, Кафедра «Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: rybakov.38@mail.ru