УДК 539.3

ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА РАСШИРЕННОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ТЕОРИИ N-ГО ПОРЯДКА АНИЗОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК[1]

Жаворонок С.И.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

РЕЗЮМЕ

Рассматривается проблема приведения трехмерной начально-краевой задачи механики сплошной среды к двумерной начально-краевой задаче теории оболочек N-го порядка. На базе вариационных принципов аналитической механики континуальных систем строится модель оболочки как материальной поверхности – двумерной системы с множеством обобщенных координат (переменных поля). Краевые условия на лицевых поверхностях оболочки, перенесенные на базовую поверхность, рассматриваются как дополнительные связи, накладываемые на переменные поля первого рода, и удовлетворяются методом множителей Лагранжа. Уравнения движения оболочки, являющиеся уравнениями Лагранжа второго рода континуальной системы со связями, инвариантны относительно выбора системы базисных функций нормальной координаты, и по форме записи совпадают с ранее полученными уравнениями «упрощенной» теории N-го порядка. Вновь введенные обобщенные усилия, следующие из вариационной постановки задачи, содержат аддитивные добавки с множителями Лагранжа.

Ключевые слова: оболочки нетонкие; механика аналитическая; системы двумерные континуальные; системы со связями; Лагранжа уравнения второго рода обобщенные; постоянные физические обобщенные

THE GENERALIZED LAGRANGE EQUATIONS OF THE SECOND KIND FOR THE EXTENDED THREE-DIMENSIONAL N'TH ORDER THEORY OF ANISOTROPIC SHELLS

Zhavoronok S.I.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

SUMMARY

A reduction of a three-dimensional initial-boundary value problem of mechanics of solids to a two-dimensional initial-boundary value problem of *N*-th order shell theory is performed on the groundwork of variational principles of the analytical continuum mechanics. The shell model is formulated as a two-dimensional continuum (a material base surface) with a set of generalized coordinates (field variables), and the boundary conditions on the shell faces are translated to the base surface, therefore they become supplementary constraints for the field variables of the first kind. The dynamic equations are constructed as Lagrange equations of the second kind of the continuum mechanical system using the Lagrange multipliers method. The obtained equations are invariant with respect to the base functions of the thickness coordinate

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты №13-01-00446_а, №14-01-00488_а, №14-01-00890_а).*

and similar to the ones of the simplified N-th order shell theory. The new generalized forces defined on the basis of the variational formulation of the initial-boundary value problem contain the additive components with Lagrange multipliers. The constructed problem's statement for the N-th order shell theory secures the accurate definition of the physical constants for lowest order shell models.

Key words: thick shells; analytical mechanics; two-dimensional continuum systems; mechanical systems with constraints; generalized Lagrange equations of the second kind; generalized physical constants

ВВЕДЕНИЕ

Проблема приведения трехмерной задачи механики к двумерной задаче для тела с одной выделенной размерностью пока не имеет исчерпывающего решения. На основании анализа современного состояния проблемы многие авторы отмечают, что «… в деле улучшенного моделирования состояния оболочек в краевой зоне шириной порядка нескольких толщин, где все поля являются существенно трехмерными, прогресс… весьма незначителен. Без качественного усовершенствования… двумерного моделирования краевой зоны оболочки… любое улучшение существующих моделей явно недостаточно» [1]. В современных условиях «… требуются более надежные двумерные модели для оболочек со сложной микростуктурой, … высокочастотных колебаний, распространения волн…» [1], описания напряженно-деформированного состояния вблизи волнового фронта и в других «областях неприводимости» [2].

Многими авторами [3-6] методы построения теорий оболочек можно условно подразделяются на две основные группы. К первому семейству теорий обычно относят работы, восходящие к результатам Кирхгофа [7] и Лява [8] и основанные на системе гипотез о напряженно-деформированном состоянии оболочки. Ко второму семейству относятся модели оболочек, основанные на результатах Коши [9] и Пуассона [10] и использующие формализованный подход. Формальные методы делятся на прямые, ориентированные на построение модели «оснащенной материальной поверхности» [11], и редукционные, осуществляющие переход от трехмерной задачи механики деформируемого твердого тела к двумерной задаче теории оболочек [2]. Редукция трехмерной задачи строится на базе асимптотического интегрирования уравнений теории упругости при наличии малого параметра – толщины оболочки [12], либо применением формального разложения неизвестных по некоторой системе функций координаты, нормальной к базовой поверхности оболочки: в обобщенные тензорные степенные ряды [2] либо в обобщенные ряды Фурье по некоторой ортогональной системе, чаще всего по полиномам Лежандра [13-22]. Последний подход не требует введения малого параметра и позволяет строить иерархии моделей нетонких оболочек как «… приближений решений трехмерных задач… в различных нормах» [22] в виде систем сингулярно возмущенных двумерных краевых задач. Приведение к двумерным задачам осуществляется на базе проекционного подхода [14,15,20,21,24] либо вариационным путем с использованием функционалов Лагранжа [16] или Райсснера [17], классической [13-24] или моментной [25] теорий упругости.

Дальнейшее развитие вариационного формализма в теории толстостенных оболочек возможно на основе методов аналитической механики континуальных систем [26]. В работах [27,28] проблема редукции была рассмотрена как задача построения континуальной системы, определенной множеством обобщенных координат - переменных поля [26], заданных на двумерном многообразии, и поверхностной плотностью функции Лагранжа. В качестве переменных поля рассмотрены коэффициенты разложения компонентов вектора перемещения в сопутствующем базисе криволинейной системы координат [14] по биортогональной системе [29,30]. Таким образом, подход [26] совместно с методами [14] и [17,20] фактически приводит к формулировке модели оболочки как материальной поверхности (по аналогии с [11]), оснащенной некоторым множеством степеней свободы. Полученные в [27-31] уравнения движения оболочки имеют вид обобщенных уравнений Лагранжа двумерной континуальной системы [27-31]. Их применение к решению задач стационарной динамики и исследование описания распространения нормальных волн в слое на базе различных вариантов приближенных теорий описано в работах [31-33].

Одной из ключевых проблем построения общей теории оболочек является удовлетворение краевым условиям на лицевых поверхностях. При переносе краевых условий на базовую поверхность задача относительно N переменных поля оказывается переопределенной. В работах [14,34,35] в качестве дополнительных переменных использованы остаточные члены рядов [14]. Описание оболочки на языке аналитической механики [26] позволяет рассмотреть краевые условия, перенесенные на базовую поверхность, как уравнения связей, и применить к решению задачи приведения метод множителей Лагранжа.

Ниже получены обобщенные уравнения Лагранжа второго рода континуальной механической системы со связями. Представлена вариационная формулировка расширенной теории оболочек N-го порядка, и построены уравнения движения, учитывающие краевые условия на лицевых поверхностях.

1. ОБОБЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА КОНТИНУАЛЬНОЙ СИЕТЕМЫ С ЛИНЕЙНЫМИ СВЯЗЯМИ

1.1. Основные определения.

Консервативная континуальная механическая система на многообразии V с краем ∂V и на отрезке времени $t \in D_t \subset \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ задана [26,27-29,36] так:

а) конфигурационным пространством Ω с переменными поля 1 рода q_I [26,36];

б) пространственной L_V и граничной L_S плотностями лагранжиана [26,36];

в) уравнениями связей $f_Q = 0$, $Q = 1 \ldots M_F$ [37].

Определение 1. Переменная поля $q_I \in \Omega_I$, $I = 1 \ldots N \in \mathbb{N}$

$$q_I : \left(V \times D_t\right) \to T_{m_I}^{n_I} = \left[\bigotimes_{i=0}^{n_I} T_M V\right] \otimes \left[\bigotimes_{j=0}^{m_I} T_M^* V\right]; \tag{1.1}$$

$T_M V$, $T_M^* V$ – касательное и кокасательное расслоения V в точке $M \in V$.

Определение 2. Скалярные произведения элементов Ω_I

$$q_I' \bullet q_I'' : T_{m_I}^{n_I} \times T_{m_I}^{n_I} \to T_0^0; \quad \left(q_I', q_I''\right)_\star : T_{m_I}^{n_I} \otimes T_{m_I}^{n_I} \to \mathbb{R};$$

$$\left(q_I', q_I''\right)_V = \int_V q_I' \bullet q_I'' \, dV; \tag{1.2}$$

$$\left(q_I, q_I\right)_S = \int_{\partial V} q_I' \bullet q_I'' \, dS. \tag{1.3}$$

Определение 3. Норма в пространстве Ω_I

$$\|q_I\| = \sqrt{(q_I, q_I)_V}. \tag{1.4}$$

Следствие 1. Пространство Ω_I – евклидово пространство с метрикой, порожденной (1.4).

Следствие 2. Пространство Ω_I, пополненное по норме (1.4) – гильбертово пространство [36].

Определение 4. Пространство Ω образовано прямой суммой [36]

$$\Omega = \bigoplus_{I=1}^{N} \Omega_I. \tag{1.5}$$

Определение 5. Пространственная плотность функционала Лагранжа [27]

$$\mathrm{L}_V = \mathrm{L}_V\left(q_I, \dot{q}_I, L_J\left[q_I\right]\right), \quad I = 1\ldots N, \quad J = 1\ldots M_L, \quad N, M_L \in \mathbb{N}; \tag{1.6}$$

Определение 6. Граничная плотность функционала Лагранжа [27]

$$\mathrm{L}_S = \mathrm{L}_S\left(q_I, \dot{q}_I\right), \quad I = 1\ldots N. \tag{1.7}$$

Определение 7. Уравнения связей общего вида [36,37]

$$\begin{gathered} f_Q : \Omega_I \times V \times D_t \to 0\left(T_{r_I}^{s_I}\right); \quad f_Q = f_Q\left(q_I, C_P\left[q_I\right], M, t\right), \\ Q = 1\ldots M_F \in \mathbb{N}, \quad M_F < N; \quad P = 1\ldots M_C \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{1.8}$$

Здесь $0(T_{r_I}^{s_I})$ – нулевой элемент пространства $T_{r_I}^{s_I}$. В (1.6), (1.8) аналогично [27-30] введены линейные операторы

$$\begin{gathered} L_J : D_J^L \to R_J^L; \quad C_P : D_P^C \to R_P^C; \\ \forall \alpha', \alpha'' \in \mathbb{R}, \quad \forall q_I', q_I'' \in D_J^L \quad L_J\left[\alpha' q_I' + \alpha'' q_I''\right] = \alpha' L_J\left[q_I'\right] + \alpha'' L_J\left[q_I''\right]; \\ \forall \beta', \beta'' \in \mathbb{R}, \quad \forall q_I', q_I'' \in D_P^C \quad C_P\left[\beta' q_I' + \beta'' q_I''\right] = \beta' C_P\left[q_I'\right] + \beta'' C_P\left[q_I''\right]; \\ \left(\bigcap_{J=1}^{M_L} D_J^L\right) \cap \left(\bigcap_{P=1}^{M_C} D_P^C\right) \subseteq \Omega_I \subseteq \left(\bigcup_{J=1}^{M_L} D_J^L\right) \cup \left(\bigcup_{P=1}^{M_C} D_P^C\right). \end{gathered} \tag{1.9}$$

Здесь и далее $\dot{q}_I \equiv dq_I/dt$; подразумевается правило суммирования по повторяющимся верхним и нижним индексам, где не оговорено противоположное. Функционал Лагранжа и действие по Гамильтону определяются в соответствии с [26-28]

$$\Lambda = \int_V \mathrm{L}_V\left(q_I, \dot{q}_I, L_J\left[q_I\right]\right) dV + \int_{\partial V} \mathrm{L}_S\left(q_I, \dot{q}_I\right) dS; \tag{1.10}$$

$$\mathrm{H} = \int_{t_0}^{t_1} \Lambda\left(q_I, \dot{q}_I, L_J\left[q_I\right]\right) dt. \tag{1.11}$$

1.2. Вариационные уравнения задачи динамики континуальной системы.

В общем случае условия (1.8) не разрешимы относительно переменных поля q_I, и решение задачи об условном экстремуме действия по Гамильтону строится методом множителей Лагранжа [26,37,38].

Утверждение 1.

$$\begin{gathered} \delta f_Q\left(M, t, q_I, \dot{q}_i, C_P\left[q_I\right]\right) = \frac{\partial f_Q\left(M, t, q_I, \dot{q}_I, C_{\mathrm{P}}\left[q_I\right]\right)}{\partial q_I} \delta q_I + \\ + \frac{\partial f_Q\left(M, t, q_I, \dot{q}_I, C_{\mathrm{P}}\left[q_I\right]\right)}{\partial \dot{q}_I} \delta \dot{q}_I + \frac{\partial f_Q\left(M, t, q_I, \dot{q}_I, C_{\mathrm{P}}\left[q_I\right]\right)}{\partial\left(C_{\mathrm{P}}\left[q_I\right]\right)} C_P\left[\delta q_I\right]. \end{gathered} \tag{1.12}$$

Доказательство.

$$\delta f_Q\left(M,t,q_I,\dot q_I,C_P\left[q_I\right]\right)=$$
$$=f_Q\left(M,t,q_I\left(M,t,\varepsilon\right),\dot q_I\left(M,t,\varepsilon\right),C_P\left[q_I\left(M,t,\varepsilon\right)\right]\right)-$$
$$-f_Q\left(M,t,q_I,\dot q_I,C_P\left[q_I\right]\right)=$$
$$=\left.\frac{df_Q\left(M,t,q_I\left(M,t,\varepsilon\right),\dot q_I\left(M,t,\varepsilon\right),C_P\left[q_I\left(M,t,\varepsilon\right)\right]\right)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}d\varepsilon=$$
$$=\frac{\partial f_Q}{\partial q_I}\left(\left.\frac{\partial q_I}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}d\varepsilon\right)+\frac{\partial f_Q}{\partial\dot q_I}\frac{\partial}{\partial t}\left(\left.\frac{\partial q_I}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}d\varepsilon\right)+\frac{\partial f_Q}{\partial\left(\bar C_P\left[q_I\right]\right)}\left(\left.\frac{\partial\left\{C_P\left[q_I\right]\right\}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}d\varepsilon\right)=$$
$$=\frac{\partial f_Q}{\partial q_I}\delta q_I+\frac{\partial f_Q}{\partial\dot q_I}\delta\dot q_I+\frac{\partial f_Q}{\partial\left(C_P\left[q_I\right]\right)}C_P\left[\delta q_I\right],$$

так как с учетом (1.9) справедливо равенство

$$\left.\frac{\partial\left\{C_P\left[q_I\right]\right\}}{\partial\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=\lim_{\varepsilon=+0}\frac{C_P\left[q_I\left(M,t,\varepsilon\right)\right]-C_P\left[q_I\left(M,t,0\right)\right]}{\varepsilon}=$$
$$=\lim_{\varepsilon=+0}\varepsilon^{-1}C_P\left[\bar q_I\left(M,t\right)\varepsilon+o\left(\varepsilon^2\right)\right]\approx C_P\left[\bar q_I\left(M,t\right)\right],$$

$\bar q_I$ – первая производная в смысле Пеано, или «конечная вариация» переменной поля q_I [38], и бесконечно малая вариация определяется соотношением $\delta q_I=\bar q_I d\varepsilon$ [38]. ■

Определение 8. Множители Лагранжа λ^Q, $Q=1\ldots M_F$

$$\lambda^Q\in T^{r_I}_{S_I},\quad \left(\lambda^Q,\delta f_Q\right)_*:T^{r_I}_{s_I}\otimes T^{s_I}_{r_I}\to\mathbb{R}. \tag{1.13}$$

С учетом определений вариаций δq_I, δL_V, δL_S, $\delta\Lambda$, сформулированных в [27,29] на основе [38], а также (1.12) и (1.13), в соответствии с принципом Гамильтона-Остроградского [26] и методом множителей Лагранжа [26,37,38] закон движения системы со связями (1.8) определяется следующим условием

$$\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta\Lambda\left(q_I,\dot q_I,L_J\left[q_I\right]\right)+\left(\lambda^Q,\delta f_Q\left(q_I,\dot q_I,C_P\left[q_I\right]\right)\right)_V\right\}dt=0, \tag{1.14}$$

и справедлива следующая

Лемма 1. Условие стационарности (1.14) действия по Гамильтону (1.11) для континуальной механической системы (1.1)-(1.10) со связями (1.8) имеет вид следующей системы уравнений Эйлера-Лагранжа (1.15) и их естественных краевых условий (1.16)

$$\begin{aligned}&\partial_t\left(\frac{\partial \mathrm{L}_V}{\partial\dot q_I}+\lambda^Q\frac{\partial f_Q}{\partial\dot q_I}\right)=\\&=L_J^*\left[\frac{\partial\mathrm{L}_V}{\partial\left(L_J\left[q_I\right]\right)}\right]+C_P^*\left[\lambda^Q\frac{\partial f_Q}{\partial\left(C_P\left[q_I\right]\right)}\right]+\frac{\partial\mathrm{L}_V}{\partial q_I}+\lambda_Q\frac{\partial f^Q}{\partial q_I}\end{aligned} \tag{1.15}$$

$$\left\{-\partial_t \frac{\partial \mathrm{L}_S}{\partial \dot{q}_I} + \frac{\partial \mathrm{L}_S}{\partial q_I} + B_J^L\left[\frac{\partial \mathrm{L}_V}{\partial\left(L_J[q_I]\right)}\right] + B_P^C\left[\lambda_Q \frac{\partial f^Q}{\partial\left(C_P[q_I]\right)}\right]\right\}\delta q_I\Bigg|_{\partial V} = 0. \qquad (1.16)$$

Доказательство. Вариация $\delta\Lambda(q_I, \dot{q}_I, L_J[q_I])$ имеет вид [27,28]

$$\begin{aligned}\delta\Lambda = &\left(\frac{\partial \mathrm{L}_V}{\partial q_I}, \delta q_I\right)_V + \left(\frac{\partial \mathrm{L}_V}{\partial \dot{q}_I}, \delta \dot{q}_I\right)_V + \left(\frac{\partial \mathrm{L}_V}{\partial\left(L_J[q_I]\right)}, L_J[\delta q_I]\right)_V + \\ &+\left(\frac{\partial \mathrm{L}_S}{\partial q_I}, \delta q_I\right)_{\partial V} + \left(\frac{\partial \mathrm{L}_S}{\partial \dot{q}_I}, \delta \dot{q}_I\right)_{\partial V}.\end{aligned} \qquad (1.17)$$

С учетом (1.12) и (1.17) левая часть (1.14), в свою очередь, примет вид

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}\left\{\delta\Lambda\left(q_I, \dot{q}_I, L_J[q_I]\right) + \left(\lambda^Q, \delta f_Q\left(q_I, \dot{q}_I, C_P[q_I]\right)\right)_V\right\}dt = \\ &= \int_{t_0}^{t_1}\left\{\left(\frac{\partial \mathrm{L}_V}{\partial q_I} + \lambda^Q \frac{\partial f_Q}{\partial q_I} + L_J^*\left[\frac{\partial \mathrm{L}_V}{\partial\left(L_J[q_I]\right)}\right] + C_P^*\left[\lambda^Q \frac{\partial f_Q}{\partial\left(C_P[q_I]\right)}\right], \delta q_I\right)_V - \right. \\ &\quad -\left(\partial_t\left[\frac{\partial \mathrm{L}_V}{\partial \dot{q}_I} + \lambda^Q \frac{\partial f_Q}{\partial \dot{q}_I}\right], \delta q_I\right)_V + \\ &\left. + \left(\frac{\partial \mathrm{L}_S}{\partial q_I} - \partial_t \frac{\partial \mathrm{L}_S}{\partial \dot{q}_I} + B_J^L\left[\frac{\partial \mathrm{L}_V}{\partial\left(L_J[q_I]\right)}\right] + B_P^C\left[\lambda^Q \frac{\partial f_Q}{\partial\left(C_P[q_I]\right)}\right], \delta q_I\right)_{\partial V}\right\}dt;\end{aligned} \qquad (1.18)$$

где список аргументов для краткости опущен; L_J^*, C_P^* – операторы, сопряженные L_J, C_P относительно произведения (1.2), B_J^L, B_P^C – соответствующие краевые операторы

$$\begin{aligned}&L_J^* : R_J^{L*} \to D_J^{L*}; \quad C_P^* : D_P^{C*} \to R_P^{C*}; \\ &L_J^* : \quad \left(T^{IJ}, L_J[\delta q_I]\right)_V = \left(L_J^* T^{IJ}, \delta q_I\right)_V + \left(B_J T^{IJ}, \delta q_I\right)_{\partial V}.\end{aligned} \qquad (1.19)$$

В соответствии с основной леммой вариационного исчисления из (1.18) следуют уравнения (1.15), имеющие смысл *обобщенных уравнений Лагранжа второго рода* континуальной механической системы (1.1)-(1.11), и естественные краевые условия (1.16), необходимые и достаточные для выполнения (1.14). ■

Следствие 3. Краткая формулировка (1.15) и (1.16): с учетом (1.19)

$$\partial_t P^I = L_J^* T^{IJ} + C_P^* R^{IP} + Q^I; \qquad (1.20)$$

$$\left\{-\partial_t \bar{P}^I + \bar{Q}^I + B_J^L T^{IJ} + B_P^C R^{IP}\right\}\delta q_I\Big|_{\partial V} = 0. \qquad (1.21)$$

Определение 9. Обобщенные импульсы P^I, $\bar{P}^I$ и силы T^{IJ}, R^{IP}, Q^I, $\bar{Q}^I$

$$P^I = \frac{\partial \mathrm{L}_V}{\partial \dot{q}_I} + \lambda^Q \frac{\partial f_Q}{\partial \dot{q}_I}; \quad \bar{P}^I = \frac{\partial \mathrm{L}_S}{\partial \dot{q}_I}; \qquad (1.22)$$

$$\begin{aligned}&T^{IJ} = \frac{\partial \mathrm{L}_V}{\partial\left(L_J[q_I]\right)}; \quad R^{IP} = \lambda^Q \frac{\partial f_Q}{\partial\left(C_P[q_I]\right)}; \\ &Q^I = \frac{\partial \mathrm{L}_V}{\partial q_I} + \lambda_Q \frac{\partial f^Q}{\partial q_I}; \quad \bar{Q}^I = \frac{\partial \mathrm{L}_S}{\partial q_I}.\end{aligned} \qquad (1.23)$$

Следствие 4. При $C_J \equiv L_J$ (1.20), (1.21) и (1.23) приводятся к виду

$$\partial_t P^I = L_J^* \tilde{T}^{IJ} + Q^I; \tag{1.24}$$

$$\left\{ -\partial_t \bar{P}^I + \bar{Q}^I + B_J \tilde{T}^{IJ} \right\} \delta q_I \Big|_{\partial V} = 0; \tag{1.25}$$

$$\tilde{T}^{IJ} = T^{IJ} + R^{IJ} = \frac{\partial \mathrm{L}_V}{\partial \left(L_J [q_I] \right)} + \lambda^Q \frac{\partial f_Q}{\partial \left(L_J [q_I] \right)} = \left(C^{IJ} + C_\lambda^{IJ} \right) [q_I]. \tag{1.26}$$

Соотношения (1.22), (1.23) или (1.26) могут трактоваться как *определяющие* уравнения механической системы с пространственной (1.6) и гиперповерхностной (1.7) плотностями функционала Лагранжа и связями (1.8). В (1.26) *обобщенные жесткости* C^{IJ} – линейные операторы, определяемые лагранжианом (1.6), *дополнительные жесткости* C_λ^{IJ} – операторы, задаваемые связями (1.8).

Формулировку начально-краевой задачи (1.20)-(1.23) замыкают уравнения связей (1.8) и начальные условия.

2. УРАВНЕНИЯ РАСШИРЕННОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК *N*-ГО ПОРЯДКА

2.1. Основные геометрические соотношения.

Пусть оболочка занимает область $V \subset \mathbb{R}^3$, $\partial V = S_\pm \oplus S_B$, $S_\pm$ – гладкие лицевые поверхности, S_B – кусочно-гладкая боковая поверхность.

Определение 10. Базисная поверхность S_0 – двумерное многообразие в $\mathbb{R}^3$

$$S_0: \quad \forall M_0 \in S_0 \quad \mathbf{r}(M_0) = \mathbf{r}(\xi^\alpha) = x^i(\xi^\alpha)\mathbf{e}_i, \quad i = 1\ldots3, \quad \alpha = 1\ldots2; \tag{2.1}$$

$$\xi^\alpha \in D_\xi \subseteq \mathbb{R}^2; \quad x^i(\xi^\alpha) \in C^{(2)}(D_\xi); \quad J_\alpha^i = \partial x^i / \partial \xi^\alpha, \quad \mathrm{Rk}\left(J_\alpha^i\right)_{2\times3} = 2;$$

введены лагранжевы координаты: x^i – декартовы, ξ^α – гауссовы параметры S_0.

Следствие 5. Касательное расслоение $T_M S_0$ – плоскость с базисными векторами $\mathbf{r}_\alpha$ и дважды ковариантным метрическим тензором $\mathbf{a} = a_{\alpha\beta}\mathbf{r}^\alpha\mathbf{r}^\beta$

$$\mathbf{r}_\alpha(\xi^\beta) = \partial\mathbf{r}(\xi^\beta) / \partial\xi^\alpha = J_\alpha^i(\xi^\beta)\mathbf{e}_i, \quad a_{\alpha\beta} = \mathbf{r}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\beta = \delta_{ij} J_\alpha^i J_\beta^j, \tag{2.2}$$

δ_{ij} – символ Кронекера, символ «$\cdot$» обозначает скалярное произведение в $T_M S_0$.

Определение 11. Вектор единичной нормали плоскости $T_M S_0$

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 / \sqrt{a}, \quad a = \left| a_{\alpha\beta} \right| \equiv \det\left(a_{\alpha\beta} \right). \tag{2.3}$$

Определение 12. Основная пространственная система координат, нормально связанная с S_0 [14], вводится так, что

$$\forall M \in V \setminus S_0 \quad \mathbf{R}(M) = \mathbf{r}(M_0) + \xi^3 \mathbf{n}(M_0). \tag{2.4}$$

Условия однозначности координации точки $M \in V \setminus S_0$ приведены в [29].

Определение 13. Лицевые поверхности $S_\pm$ с учетом (2.4) задаются так

$$\forall M_\pm \in S_\pm: \quad \mathbf{R}(M_\pm) = \mathbf{r}(M_0) + h_\pm \mathbf{n}(M_0), \quad h_\pm \equiv \xi^3(M_\pm). \tag{2.5}$$

Определение 14. Безразмерная нормальная координата [27-30]

$$\zeta = (\xi^3 - \bar{h}) / h(M_0) \in [-1,1], \tag{2.6}$$

$2h(M_0)$ – толщина оболочки, измеренная вдоль нормали $\mathbf{n}(M_0)$ [28]; срединная поверхность оболочки $\bar{S}$ определяется соотношением $\xi^3 = \bar{h} \equiv (h_+ + h_-)/2$ [28].

Определение 15. $\mathbf{r}_\alpha(M_0),\mathbf{n}(M_0)$ – *сопутствующий* базис системы координат ξ^1,ξ^2,ξ^3, нормально связанной с S_0 [14]; $\forall\mathbf{u}(M)=u^\alpha(M_0,\zeta)\mathbf{r}_\alpha+u_3(M_0,\zeta)\mathbf{n}$.

Определение 16. $\mathbf{R}_\alpha(M_0,\zeta),\mathbf{n}(M_0)$ – *основной* базис системы ξ^1,ξ^2,ξ^3 [14]

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}_\alpha=\partial_\alpha\mathbf{R}=A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}\mathbf{r}_\beta,\quad \mathbf{R}^\alpha=A_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}\mathbf{r}^\beta;\quad A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}=\delta_\alpha^\beta-\xi^3b_\alpha^\beta,\quad A_{\gamma\cdot}^{\cdot\alpha}A_{\cdot\beta}^{\gamma\cdot}=\delta_\beta^\alpha;\\ &A_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}=\mu^{-1}\left[\delta_\beta^\alpha-\xi^3\left(b_\lambda^\lambda\delta_\beta^\alpha-b_\beta^\alpha\right)\right];\quad \mu=1-\xi^3b_\lambda^\lambda+(\xi^3)^2\left|b_\beta^\alpha\right|.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Следствие 6. С учетом (2.4), (2.6) $V=S_0\times[-1,1]$, $S_B=\Gamma\times[-1,1]$, $\Gamma=S_0\cap S_B$.

Следствие 7. На базе (1.2), (1.3) и Следствия 6 вводятся произведения

$$\left(\mathbf{u}',\mathbf{v}''\right)_S=\int_{S_0}\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}''dS_0;\quad \left(\mathbf{u}',\mathbf{u}''\right)_\Gamma=\int_\Gamma\mathbf{u}'\cdot\mathbf{u}''d\Gamma;\tag{2.8}$$

$$\left(\mathbf{u}(M_0,\zeta,t),\mathrm{p}(\zeta)\right)_1=\int_{-1}^{1}\mathbf{u}(M_0,\zeta,t)\mathrm{p}(\zeta)d\zeta.\tag{2.9}$$

Прочие геометрические соотношения, необходимые для построения теории оболочек N-го порядка, приведены в [29].

2.2. Учет силовых краевых условий на лицевых поверхностях.

Утверждение 2. Силовые краевые условия рода на $S_\pm\subseteq S_\sigma$ имеют вид

$$\mp h_\beta^\pm s^{i\beta}\Big|_{S\pm}\pm s^{i3}\Big|_{S\pm}=\overline{q}_\pm^i,\quad i=\overline{1,3},\quad \beta=\overline{1,2};\tag{2.10}$$

$\mathbf{q}^\pm=(\mu_\pm\nu_\pm)^{-1}(q_\pm^\alpha\mathbf{r}_\alpha+q_\pm^3\mathbf{n})$ – главный вектор внешних сил на $S_\pm$, $h_\beta^\pm=\partial_\beta h_\pm$,

$$\boldsymbol{\sigma}=\mu^{-1}\left(s^{\alpha\beta}\mathbf{r}_\alpha\mathbf{R}_\beta+s^{3\beta}\mathbf{n}\mathbf{R}_\beta+s^{\alpha3}\mathbf{r}_\alpha\mathbf{n}+s^{33}\mathbf{n}\mathbf{n}\right)\tag{2.11}$$

– симметричный тензор напряжения; $\mu_\pm=\mu|_{\zeta=\pm1}$, $\nu_\pm^2=1-g^{\alpha\beta}h_\alpha^\pm h_\beta^\pm$, $g^{\alpha\beta}=\mathbf{R}^\alpha\cdot\mathbf{R}^\beta$.

Доказательство. В общем виде краевые условия второго рода имеют вид

$$\forall M\in S_\pm\ \ \boldsymbol{\sigma}\big|_{S\pm}\cdot\mathbf{n}^\pm=\mathbf{q}^\pm;\quad \boldsymbol{\sigma}=\sigma^{\alpha\beta}\mathbf{R}_\alpha\mathbf{R}_\beta+\sigma^{3\beta}\mathbf{n}\mathbf{R}_\beta+\sigma^{\alpha3}\mathbf{R}_\alpha\mathbf{n}+\sigma^{33}\mathbf{n}\mathbf{n}.\tag{2.12}$$

На базе (2.5), (2.7); $\mathbf{R}_i\times\mathbf{R}_j=\sqrt{g}\mathbf{R}_k$, $i\neq j\neq k$ [39], $\sqrt{g}=\mu\sqrt{a}$ [29] получим

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}_\beta^\pm=\partial_\beta\mathbf{R}\big|_{\zeta=\pm1}=\mathbf{R}_\beta+h_\beta^\pm\mathbf{n};\quad \mathbf{N}^\pm=\pm\mathbf{R}_1^\pm\times\mathbf{R}_2^\pm=\pm\mu_\pm\sqrt{a}\left(\mathbf{n}-h_\beta^\pm\mathbf{R}^\beta\right),\\ &\left|\mathbf{N}^\pm\right|=\mu_\pm\nu_\pm\sqrt{a},\quad\Rightarrow\quad \mathbf{n}^\pm=\pm\nu_\pm^{-1}\left(-h_\beta^\pm\mathbf{R}^\beta+\mathbf{n}\right).\end{aligned}\tag{2.13}$$

С учетом (2.7), (2.11), (2.13) при $\mu_\pm\neq0$, $\nu_\pm\neq0$ [29] (2.12) $\Rightarrow$ (2.10). ■

Определение 17. При редукции трехмерной задачи механики [13-25,27-31] вектор перемещения $\mathbf{u}(M_0,\zeta,t)$ в гильбертовом пространстве $\aleph[-1,1]$ задается своими координатами $\mathbf{u}^{(k)}(M_0,t)$ в биортогональном базисе $\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)$, $\mathrm{p}^{(m)}(\zeta)$

$$\mathbf{u}(M_0,\zeta,t)=u_\alpha^{(k)}\mathrm{p}_{(k)}\mathbf{r}^\alpha+u_3^{(k)}\mathrm{p}_{(k)}\mathbf{n}=u_{(m)}^\alpha\mathrm{p}^{(m)}\mathbf{r}_\alpha+u_{(m)}^3\mathrm{p}^{(m)}\mathbf{n},\ \ k,m=1\ldots N;\tag{2.14}$$

$$\mathbf{u}^{(k)}(M_0,t)=\left(\mathbf{u}(M_0,\zeta,t),\mathrm{p}_{(k)}(\zeta)\right)_1=u_\alpha^{(k)}(M_0,t)\mathbf{r}^\alpha+u_3^{(k)}(M_0,t)\mathbf{n}.\tag{2.15}$$

Лемма 2. При записи (2.14) вектора $\mathbf{u}$ краевые условия II рода на $S_\pm$ (2.10) переходят в уравнения для переменных поля $u_j^{(k)}$ (2.15), определенные на S_0

$$C_{(k)\pm}^{ij\delta}\left(\overline{\nabla}_\delta u_j^{(k)}+H_{\delta(m\cdot)}^{(\cdot k)}u_j^{(m)}\right)+C_{(k)\pm}^{ij3}D_{(m\cdot)}^{(\cdot k)}u_j^{(m)}-C_{(k)\pm}^{i\gamma\delta}b_{\gamma\delta}u_3^{(k)}+C_{(k)\pm}^{i3\delta}b_\delta^\gamma u_\gamma^{(k)}\pm\overline{q}_\pm^i=0,\tag{2.16}$$

$$C_{(k)\pm}^{ij\delta}=\left(\overline{C}_{(km)}^{i3j\delta}-h_\beta^\pm\overline{\overline{C}}_{(km)}^{i\beta j\delta}\right)\mathrm{p}_\pm^{(m)};\ C_{(k)\pm}^{ij3}=\left(C_{(km)}^{i3j3}-h_\beta^\pm\overline{C}_{(km)}^{i\beta j3}\right)\mathrm{p}_\pm^{(m)};\ \mathrm{p}_\pm^{(m)}=\mathrm{p}^{(m)}(\pm1);\tag{2.17}$$

$$H^{(\cdot k)}_{\alpha(m\cdot)} = -\left[\overline{h}_\alpha \delta^{(n)}_{(m)} - h_\alpha Z^{(\cdot n)}_{(m\cdot)}\right] D^{(\cdot k)}_{(n\cdot)};\quad h_\alpha \equiv \partial_\alpha h,\quad \overline{h}_\alpha \equiv \partial_\alpha \overline{h};$$
$$Z^{(\cdot n)}_{(m\cdot)} = \left(\zeta \mathrm{p}_{(m)}, \mathrm{p}^{(n)}\right)_1;\; D^{(\cdot k)}_{(n\cdot)} = h^{-1}\left(\tfrac{d}{d\zeta}\mathrm{p}_{(n)}, \mathrm{p}^{(k)}\right)_1;\; C^{ijpq}_{(km)} = \left(C^{ijpq}\mathrm{p}_{(k)}, \mathrm{p}_{(m)}\right)_1. \tag{2.18}$$

Доказательство. С учетом записи определяющих уравнений в виде [29,30]

$$s^{i\beta} = \overline{\overline{C}}{}^{i\beta j\delta}\overline{d}_{j\delta} + \overline{C}{}^{i\beta j3}\overline{d}_{j3};\; s^{i3} = \overline{C}{}^{i3j\delta}\overline{d}_{j\delta} + C^{i3j3}\overline{d}_{j3};\quad i,j = \overline{1,3};\quad \beta,\gamma,\delta,\varepsilon = \overline{1,2};$$
$$\overline{\overline{C}}{}^{i\beta j\delta} = \overline{\mu}A^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma}A^{\delta\cdot}_{\cdot\varepsilon}C^{i\gamma j\varepsilon};\quad \overline{C}{}^{i\beta j3} = \overline{\mu}A^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma}C^{i\gamma j3};\quad \overline{C}{}^{i3j\delta} = \overline{C}{}^{i3j\varepsilon} = \overline{\mu}A^{\delta\cdot}_{\cdot\varepsilon}C^{i\gamma j3},$$

выражений компонентов тензора дисторсии [29, 30], где $h'_\delta = \partial_\delta(\zeta h + \overline{h})$

$$\overline{d}_{\beta\delta} = \overline{\nabla}_\delta u_\beta - h'_\delta h^{-1}\partial_\zeta u_\beta - b_{\beta\delta}u_3;\quad \overline{d}_{3\delta} = \overline{\nabla}_\delta u_3 - h'_\delta h^{-1}\partial_\zeta u_3 + b^\beta_\delta u_\beta;\quad \overline{d}_{j3} = h^{-1}\partial_\zeta u_j;$$

а также (2.14), (2.15), получим определяющие соотношения для $s^{ij}_{(k)} = (s^{ij}, \mathrm{p}_{(k)})_1$

$$s^{i\beta}_{(k)} = \overline{\overline{C}}{}^{i\beta j\delta}_{(km)}\left(\overline{\nabla}_\delta u^{(m)}_j + H^{(\cdot m)}_{\delta(n)\cdot}u^{(n)}_j\right) + \overline{C}{}^{i3j3}_{(km)}D^{(\cdot m)}_{(n\cdot)}u^{(n)}_j - \overline{\overline{C}}{}^{i\beta\gamma\delta}_{(km)}b_{\gamma\delta}u^{(m)}_3 + \overline{\overline{C}}{}^{i\beta3\delta}_{(km)}b^\gamma_\delta u^{(m)}_\gamma;$$
$$s^{i3}_{(k)} = \overline{C}{}^{i3j\delta}_{(km)}\left(\overline{\nabla}_\delta u^{(m)}_j + H^{(\cdot m)}_{\delta(n)\cdot}u^{(n)}_j\right) + C^{i3j3}_{(km)}D^{(\cdot m)}_{(n\cdot)}u^{(n)}_j - \overline{C}{}^{i3\gamma\delta}_{(km)}b_{\gamma\delta}u^{(m)}_3 + \overline{C}{}^{i33\delta}_{(km)}b^\gamma_\delta u^{(m)}_\gamma, \tag{2.19}$$

С учетом (2.19) и (2.17) краевые условия (2.10) приводятся к виду (2.16). ■

2.3. Формулировка расширенной теории *N*-го порядка анизотропных оболочек как модели двумерного континуума со связями.

Следствие 8. Уравнения (2.16), определенные на двумерном многообразии S_0, имеют смысл *уравнений связей* (1.8) для переменных поля I рода $u^{(k)}_j$.

Определение 18. Множители Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}^\pm$, соответствующие связям (2.16) и условиям (2.10) – ковекторы на двумерном многообразии S_0: $\boldsymbol{\lambda}^\pm = \lambda^\pm_\alpha \mathbf{r}^\alpha + \lambda^\pm_3 \mathbf{n}$.

Определение 19. В соответствии с Определениями 1-13, модель *N*-го порядка оболочки – континуальная механическая система, заданная на двумерном многообразии S_0 – базовой поверхности (2.1) [28, 29] с краем $\Gamma = \partial S_0 = S_0 \cap S_B$:

а) конфигурационным пространством Ω с переменными поля I рода $u^{(k)}_i\left(M_0, t\right)$;

б) поверхностной L_S и контурной L_Γ плотностями функционала Лагранжа [29]

$$\mathrm{L}_S\left(u^{(k)}_i, \dot{u}^{(k)}_i, \overline{\nabla}_\beta u^{(k)}_i\right) = P^i_{(k)}u^{(k)}_i - \tfrac{1}{2}\Big[s^{\alpha\beta}_{(k)}\left(\overline{\nabla}_\beta u^{(k)}_\alpha + H^{(\cdot k)}_{\beta(m\cdot)}u^{(m)}_\alpha - b_{\beta\alpha}u^{(k)}_3\right) +$$
$$+ s^{3\beta}_{(k)}\left(\overline{\nabla}_\beta u^{(k)}_3 + H^{(\cdot k)}_{\beta(m\cdot)}u^{(m)}_3 + b^\alpha_\beta u^{(k)}_\alpha\right) + s^{i3}_{(k)}D^{(\cdot k)}_{(m\cdot)}u^{(m)}_i\Big] + \tfrac{1}{2}\rho^{(m)}_{(k)}\dot{u}^i_{(m)}\dot{u}^{(k)}_i; \tag{2.20}$$

$$\mathrm{L}_\Gamma\left(u^{(k)}_i\right) = q^i_{B(k)}u^{(k)}_i;\quad \alpha,\beta = 1,2;\quad i = \overline{1,3};\quad k,m = \overline{0,N}; \tag{2.21}$$

в) уравнениями связей (1.8) в форме (2.16).

Здесь $\overline{\nabla}_\beta$ – ковариантная производная на $T_M S_0$; F^i, q^i_B – компоненты главных векторов внешних сил в V и на S_B в сопутствующем базисе $\mathbf{r}_\alpha, \mathbf{n}$; ρ – плотность;

$$P^i_{(k)} = (\overline{\mu}\rho F^i, \mathrm{p}_{(k)})_1;\quad q^i_{B(k)} = (\mu_B q^i, \mathrm{p}_{(k)})_1;\quad \rho^{(m)}_{(k)} = (\overline{\mu}\rho\mathrm{p}_{(k)}, \mathrm{p}^{(m)})_1.$$

Теорема 1. II начально-краевая задача расширенной теории оболочек *N*-го порядка, соответствующая Определению 19, задается уравнениями движения (2.22), естественными краевыми условиями (2.23), уравнениями связей (2.24), определяющими соотношениями (2.25) и начальными условиями (2.27) [28,29]

$$\begin{aligned}
&\rho^{(m)}_{(k)}\ddot{u}^{\alpha}_{(m)} = \bar{\bar{\nabla}}_{\beta}\tilde{s}^{\alpha\beta}_{(k)} - H^{(\bullet m)}_{\beta(k\bullet)}\tilde{s}^{\alpha\beta}_{(m)} - b^{\alpha}_{\beta}\tilde{s}^{3\beta}_{(k)} - D^{(\bullet m)}_{(k\bullet)}\tilde{s}^{\alpha 3}_{(m)} + P^{\alpha}_{(k)};\\
&\rho^{(m)}_{(k)}\ddot{u}^{3}_{(m)} = \bar{\bar{\nabla}}_{\beta}\tilde{s}^{3\beta}_{(k)} - H^{(\bullet m)}_{\beta(k\bullet)}\tilde{s}^{3\beta}_{(m)} + b_{\alpha\beta}\tilde{s}^{\alpha\beta}_{(k)} - D^{(\bullet m)}_{(k\bullet)}\tilde{s}^{33}_{(m)} + P^{3}_{(k)};
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\left(\tilde{s}^{i\beta}_{(k)}\nu_{\beta} - q^{i}_{B(k)}\right)\delta u^{(k)}_{i}\Big|_{M_0\in\Gamma} = 0; \quad i = 1,2,3; \quad \beta = 1,2; \tag{2.23}$$

$$\left[\tilde{s}^{i3}_{(k)} - h^{\pm}_{\beta}\tilde{s}^{i\beta}_{(k)} - \lambda^{\pm}_{j}\left(C^{ji3}_{(k)\pm} - h^{\pm}_{\beta}C^{ji\beta}_{(k)\pm}\right)\right]\mathrm{p}^{(k)}_{\pm} \pm \bar{q}^{i}_{\pm} = 0; \tag{2.24}$$

$$\tilde{s}^{i\beta}_{(k)} = \bar{\bar{C}}^{i\beta j\delta}_{(km)}\bar{\bar{\nabla}}_{\delta}u^{(m)}_{j} + \bar{C}^{i\beta j}_{(km)}u^{(m)}_{j} + \lambda^{+}_{j}C^{ji\beta}_{(k)+} + \lambda^{-}_{j}C^{ji\beta}_{(k)-}; \tag{2.25}$$

$$\tilde{s}^{i3}_{(k)} = \bar{C}^{i3j\delta}_{(km)}\bar{\bar{\nabla}}_{\delta}u^{(m)}_{j} + C^{i3j}_{(km)}u^{(m)}_{j} + \lambda^{+}_{j}C^{ji3}_{(k)+} + \lambda^{-}_{j}C^{ji3}_{(k)-}; \tag{2.26}$$

$$u^{i}_{(k)}\Big|_{t=t_0} = U^{i}_{(k)}; \quad \dot{u}^{i}_{(k)}\Big|_{t=t_0} = V^{i}_{(k)}. \tag{2.27}$$

Доказательство. На базе метода множителей Лагранжа [36], Определений 18, 19 (2.20), (2.21), Лемм 1, 2, Следствий 3, 8, учитывая, что (2.16) удовлетворяют Следствию 4, приведем (1.24), (1.25) к виду (2.22) и (2.23). На основе Следствий 3, 4 и Определения 9 определяющие уравнения для $\tilde{s}^{ij}_{(k)}$ имеют вид (2.25), (2.26), где

$$\bar{\bar{C}}^{i\beta\gamma}_{(km)} = H^{(\bullet n)}_{\delta(k\bullet)}\bar{\bar{C}}^{i\beta\gamma\delta}_{(nm)} + b^{\gamma}_{\delta}\bar{\bar{C}}^{i\beta 3\delta}_{(km)} + D^{(\bullet n)}_{(k\bullet)}\bar{C}^{i\beta\gamma 3}_{(nm)}; \quad \bar{\bar{C}}^{i\beta 3}_{(km)} = H^{(\bullet n)}_{\delta(k\bullet)}\bar{\bar{C}}^{\alpha\beta 3\delta}_{(nm)} - b_{\gamma\delta}\bar{\bar{C}}^{i\beta\gamma\delta}_{(km)} + D^{(\bullet n)}_{(k\bullet)}\bar{C}^{i\beta 33}_{(nm)};$$

$$\bar{C}^{i3\gamma}_{(km)} = H^{(\bullet n)}_{\delta(k\bullet)}\bar{C}^{i3\gamma\delta}_{(nm)} + b^{\gamma}_{\delta}\bar{C}^{i33\delta}_{(km)} + D^{(\bullet n)}_{(k\bullet)}C^{i3\gamma 3}_{(nm)}; \quad \bar{C}^{i33}_{(km)} = H^{(\bullet n)}_{\delta(k\bullet)}\bar{C}^{i33\delta}_{(nm)} - b_{\gamma\delta}\bar{C}^{i3\gamma\delta}_{(km)} + D^{(\bullet n)}_{(k\bullet)}C^{i333}_{(nm)}.$$

Так как из (1.26), (2.16), (2.20) следует уравнение для обобщенных сил

$$s^{i\beta}_{(k)} = \tilde{s}^{i\beta}_{(k)} - \lambda^{+}_{q}C^{qi\beta}_{(k)} - \lambda^{-}_{q}C^{qi\beta}_{(k)}, \quad s^{i3}_{(k)} = \tilde{s}^{i3}_{(k)} - \lambda^{+}_{q}C^{qi3}_{(k)} - \lambda^{-}_{q}C^{qi3}_{(k)}, \tag{2.28}$$

при этом $s^{ij}|_{S\pm} = s^{ij}_{(k)}\mathrm{p}^{(k)}_{\pm}$, уравнения (2.16) с учетом (2.19) записываются относительно сил $\tilde{s}^{ij}_{(k)}$ в форме (2.24). ■

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Построены вариационные уравнения расширенной трехмерной теории анизотропных оболочек. Модель оболочки формулируется как континуальная механическая система на двумерном многообразии и определяется множеством переменных поля первого рода, являющихся коэффициентами биортогонального разложения вектора перемещения, и плотностью лагранжиана. Краевые условия, перенесенные с лицевых на базовую поверхность оболочки, образуют уравнения связей. Уравнения движения оболочки получены в виде обобщенных уравнений Лагранжа второго рода континуальной системы со связями и являются обобщением уравнений элементарной теории N-го порядка [27-31].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Eremeyev V., Pietraszkiewicz W.* Refined theories of plates and shells // Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2014. – Vol.94. – N1-2. – S.5-6.
2. *Кильчевский Н.А.* Основы аналитической механики оболочек. – Киев: изд. АН УССР, 1963. – 634 с.
3. *Ворович И.И.* Некоторые математические задачи теории пластин и оболочек. – М.: Наука, 1966.
4. *Григолюк Э.И., Коган Е.А.* Современное состояние теории слоистых оболочек // Прикладная механика. – 1972. – Т.8. – №6. – С. 583-595.

5. *Григолюк Э.И., Куликов Г.М.* Общее направление развития теории слоистых оболочек // Механика композитных материалов. – 1988. – Т.24. – №2. – С.231-241.
6. *Kienzler R., Altenbach H., Otts I.* Theories of Plates and Shells: Critical Review and New Applications. – Berlin, Springer-Verlag, 2004. – 246 p.
7. *Kirchhoff G.* Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer Elastischer Scheibe // J. Reine und angewandte Mathematik. – 1850. – Vol.40. – N1. – P.51-88.
8. *Love A.* On the small free vibrations and deformation of thin elastic shell / Phil. Trans. Roy. Soc. – 1988. – Vol.179(A). – P.491-546.
9. *Cauchy A.* Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque solide. Exercice de mathématique. – 1828. – Vol.3. – P.245-326.
10. *Poisson S.* Mèmoire sur l'équilibre et le mouvement des corps solides. Paris, Mèmoires de l'Acad. Sci. – 1829. – Vol.8. – P.357-570.
11. *Zhilin P.A.* Mechanics of Deformable Cosserat Surfaces // Int. J. Sol. Struct. – 1976. – Vol.12. – P.635-648.
12. *Гольденвейзер А.Л.* Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т.27. – №4. – С.593-608.
13. *Soler A.* Higher order effects in thick rectangular elastic beams // Int. J. Sol. Struct. – 1968. – Vol.4. – P.723-739.
14. *Векуа И.Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 282 с.
15. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Лизунов П.П.* Неклассическая теория оболочек и ее приложение к решению инженерных задач. – Львов: Вища Школа, 1978. – 192 с.
16. *Хома И.Ю.* Общая теория анизотропных оболочек. – Киев: Наукова думка, 1986. – 170 с.
17. *Амосов А.А.* Приближенная трехмерная теория толстостенных пластин и оболочек // Строительная механика и расчет сооружений. – 1987. – №5. – С.37-42.
18. *Никабадзе М.У.* Применение системы полиномов Чебышева к теории тонких тел // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика. – 2007. – №5. – С.56-63.
19. *Никабадзе М.У., Улуханян А.Р.* Постановки задач для тонкого деформируемого трехмерного тела // Вестн. Моск. ун-та. Сер.1. Математ. Механика. – 2005. – №5. – С.43-49.
20. *Amosov A.A., Zhavoronok, S.I.* An approximate high-order theory of thick anisotropic shells // Int. J. Comput. Civil Struct. Eng. – 2003. – Vol.1. – P.28-38.
21. *Жаворонок С.И.* Модели высшего порядка анизотропных оболочек // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2008. – Т.14. – №4. – С.561-571.
22. *Schwab C., Wright S.* Boundary layers in hierarchical beam and plate models // J. Elast. – 1995. – Vol.38. – P.1-40.
23. *Амосов А.А., Жаворонок С.И.* О трехмерном напряженном состоянии толстостенных оболочек // Вестн. НИЦ«Строительство». – 2009. – 1(26). – С.207-216.
24. *Жаворонок С.И., Леонтьев А.Н., Леонтьев К.А.* Анализ сходимости решения при расчете толстостенных оболочек вращения произвольной формы // Int. J. Comput. Civil Struct. Eng. – 2010. – Vol.6. – N1-2. – P.105-111.

25. *Никабадзе М.У.* Развитие метода ортогональных полиномов в механике микрополярных и классических упругих тонких тел. – М.: Изд-во Попечит. совета мех.-мат. ф-та МГУ, 2014. – 515 с.
26. *Кильчевский Н.А., Кильчинская Г.А., Ткаченко Н.Е.* Аналитическая механика континуальных систем. – Киев: Наукова Думка, 1979. – 189 с.
27. *Жаворонок С.И.* Вариационные уравнения трехмерной теории анизотропных оболочек // Вест.Нижегор.ун-та им.Н.И.Лобачевского. – 2011. – №4. – Ч.5. – С.2153-2155.
28. *Жаворонок С.И.* Обобщенные уравнения Лагранжа второго рода трехмерной теории анизотропных оболочек // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №1. – С.116-132.
29. *Zhavoronok S.I.* A Vekua-type linear theory of thick elastic shells // Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik. – 2014. – Vol.94. – N1-2. – S.164-184.
30. *Zhavoronok S.I.* Variational formulations of Vekua-type shell theories and some their applications. – In: Shell Structures: Theory and Applications. Vol.3. – CRC Press / Balkema, Taylor & Francis Gr., 2014. – P.341-344.
31. *Жаворонок С.И.* Формулировка начально-краевой задачи приближенной трехмерной теории оболочек N-го порядка в обобщенных перемещениях и ее приложение к задачам стационарной динамики // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №3. – С.333-344.
32. *Жаворонок С.И.* Исследование распространяющихся мод гармонических волн в упругом слое на базе трехмерной теории оболочек N-го порядка // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №2. – С. 278-287.
33. *Жаворонок С.И.* Исследование кинематики нормальных волн в упругом слое на основе трехмерной теории оболочек N-го порядка для различных значений волновых чисел // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №1. – С.45-56.
34. *Никабадзе М.У.* Уравнения теории оболочек, согласованные с граничными условиями на лицевых поверхностях// Вестник Моск. ун-та. Сер.1. Математика. Механика. – 2007. – №2. – С.72-76.
35. *Gordeziani D., Avalishvili M., Avalishvili G.* Hierarchical models for elastic shells in curvilinear coordinates // Comput. Math. Appl. – 2006, **51**. – 1789-1808.
36. *Абовский Н.П., Андреев Н.П., Деруга А.П.* Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. – М.: Наука, 1978. – 288 с.
37. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики. – М.: Мир, 1965. – 408 с.
38. *Бердичевский В.Л.* Вариационные принципы механики сплошной среды. – М.: Наука, 1983. – 448 с.
39. *Горшков А.Г., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В.* Основы тензорного анализа и механика сплошной среды. – М.: Наука, 2000. – 214 с.

Поступила в редакцию 7 апреля 2015 года.

Сведения об авторе:

Жаворонок Сергей Игоревич – к.ф.-м.н., доц., с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: zhavor71@mail.ru