

УДК 539.3+ 517.95

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ И РАЗЛОЖЕНИЯ ЛАГРАНЖА ПО ФУНКЦИЯМ ФАДЛЯ-ПАПКОВИЧА В ЗАДАЧЕ ИЗГИБА ПОЛУПОЛОСЫ С ПРОДОЛЬНЫМИ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ¹

Меньшова И.В., Семенова И.А.*

*ФГБУН Институт теории прогноза землетрясений и математической
геофизики РАН, г. Москва, Россия*

**Чувашский государственный педагогический университет им. И.Я.Яковлева,
г. Чебоксары, Россия*

РЕЗЮМЕ

Рассматриваются особенности построения систем функций, биортогональных к функциям Фадля-Папковича, которые возникают при решении краевой задачи об изгибе полуполосы со свободными продольными сторонами, подкрепленными ребрами жесткости. Ребра жесткости работают только на изгиб. Точного аналитического решения этой задачи, насколько авторам известно, построено не было. Техника разложений по функциям Фадля-Папковича [1,2] позволяет найти это решение. В отличие от систем функций Фадля-Папковича, рассматривавшихся ранее, например, в статьях [1-4], здесь при построении биортогональных систем функций необходимо дополнительно построить биортогональные функции к слагаемым полиномиального типа (их можно рассматривать и как элементарное решение, отвечающее балочной теории). Если таких слагаемых два или больше, то функции соответствующих этим слагаемым биортогональных систем называются биортогональными функциями нулевого индекса первого, второго и т.д. порядков. Показано, при каких условиях на раскладываемые функции слагаемые полиномиального типа в разложениях Лагранжа этих функций будут отсутствовать. В статье [5] приведены разложения Лагранжа в полуполосе с продольными ребрами жесткости, работающими только на изгиб в случае симметричной деформации полуполосы.

Ключевые слова: изгиб полуполосы; ребра жесткости; функции Фадля-Папковича; биортогональные функции

BIORTHOGONAL SYSTEMS OF FUNCTIONS AND THE LAGRANGE EXPANSIONS ON THE FADL-PAPKOVICH FUNCTIONS, TO THE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF THE SEMISTRIP BENDING WITH LONGITUDINAL STIFFENERS

Menshova I. V., Semenova I. A.*

*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian
Academy of Sciences, Moscow, Russia*

**I. Yakovlev Chuvash state pedagogical University, Cheboksary, Russia*

¹Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №№ 13-08-00118 а, 15-31-500-33 мол_нр, 15-41—02-644 р_поволжье_а .

SUMMARY

The peculiarities of functions construction, which biorthogonal to the Fadde-Papkovich functions, are considered. The problem arises in the solution of the boundary value problem to the semi-strip bending in the case of the antisymmetric deformation. The longitudinal sides of which are reinforced by ribs. The ribs work in bending only. The exact analytical solution of this problem, as much as the authors know, has not been constructed. The method on the Fadde-Papkovich Function expansions [1,2] allows to find the solution. Unlike Fadde-Papkovich systems of functions, which was discussed earlier, for example, in papers [1-4], here it is necessary, an additional, biorthogonal functions to a summands of polynomial type (which can be considered as solutions of the beam bending theory) to construct. If there are two or more polynomial summands, we called the corresponding biorthogonal functions as biorthogonal functions of the zero index of the first, second, etc. orders. We show the conditions to expansion function when the polynomial summands in the Lagrange expansions of these functions will be missing. The Lagrange expansions for to be in tension semi-strip, with bending longitudinal stiffeners in the case of symmetric deformation of the semistrip, was given in the article [5].

Key words: bending strip; ribs; the Fadde-Papkovich functions; biorthogonal functions

1. ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим полуполосу $\{П: x \geq 0, |y| \leq 1\}$, у которой вдоль продольных сторон $y = \pm 1$ имеются ребра жесткости, работающие только на изгиб. Обозначим: G – модуль сдвига пластины, E_1 – модуль упругости ребра; ν – коэффициент Пуассона для пластины и ребра; I – момент инерции поперечного сечения ребра, t – толщина пластины; $U(x, y) = Gu(x, y)$, $V(x, y) = Gv(x, y)$, где $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – перемещения, соответственно, по x и y .

Из условия контакта ребра и пластины можно получить следующее дифференциальное уравнение [6]

$$\frac{E_1 I}{Gt} \frac{d^4 V(x, \pm 1)}{dx^4} + \sigma_y(x, \pm 1) = 0. \quad (1.1)$$

Кроме того, будем считать, что касательная нагрузка вдоль ребер отсутствует, т.е.

$$\tau_{xy}(x, \pm 1) = 0. \quad (1.2)$$

Далее воспользуемся методом начальных функций [6], позволяющим эффективно получать выражения для функций Фадля-Папковича. Основные соотношения метода начальных функций имеют вид

$$\begin{aligned} U(x, y) &= L_{uU}(y)U_0(x) + L_{uV}(y)V_0(x) + L_{uY}(y)Y_0(x) + L_{uX}(y)X_0(x), \\ V(x, y) &= L_{vU}(y)U_0(x) + L_{vV}(y)V_0(x) + L_{vY}(y)Y_0(x) + L_{vX}(y)X_0(x), \\ \sigma_x(x, y) &= A_U(y)U_0(x) + A_V(y)V_0(x) + A_Y(y)Y_0(x) + A_X(y)X_0(x), \\ Y(x, y) &= L_{yU}(y)U_0(x) + L_{yV}(y)V_0(x) + L_{yY}(y)Y_0(x) + L_{yX}(y)X_0(x), \\ X(x, y) &= L_{xU}(y)U_0(x) + L_{xV}(y)V_0(x) + L_{xY}(y)Y_0(x) + L_{xX}(y)X_0(x). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Начальные функции

$$U_0(x) = Gu(x, 0), \quad V_0(x) = Gv(x, 0), \quad Y_0(x) = \sigma_y(x, 0), \quad X_0(x) = \tau_{xy}(x, 0)$$

выберем на оси симметрии $y = 0$. Тогда, в силу обратной симметрии задачи, четные начальные функции $U_0(x) = Y_0(x) = 0$. С помощью формул (1.3)

удовлетворим граничным условиям (1.1), (1.2), которые теперь будут выглядеть так

$$\begin{cases} (C\alpha^4 L_{VV}(1) - L_{TV}(1))V_0(x) + (C\alpha^4 L_{VX}(1) - L_{TX}(1))X_0(x) = 0; \\ L_{XV}(1)V_0(x) + L_{XX}(1)X_0(x) = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

где $L_{VV}(1)$, $L_{TV}(1)$ и т.д. – соответствующие операторы метода начальных функций [6], определенные при $y=1$, а $C = E_1 I / Gt$. Вводя разрешающую функцию $F(x)$ по формулам

$$V_0(x) = L_{XX}(1)F(x), \quad X_0(x) = -L_{XV}(1)F(x), \quad (1.5)$$

тождественно удовлетворим второму уравнению (1.4), а первое примет вид

$$\left\{ [C\alpha^4 L_{VV}(1) - L_{TV}(1)] L_{XX}(1) - [C\alpha^4 L_{VX}(1) - L_{TX}(1)] L_{XV}(1) \right\} F(x) = 0. \quad (1.6)$$

Полагая в уравнении (1.6)

$$F(x) = e^{\lambda x},$$

получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$L(\lambda) = \lambda \left(C\lambda^3 \cos^2 \lambda + (1+\nu)(\lambda - \cos \lambda \sin \lambda) \right) = 0, \quad (1.7)$$

имеющее четыре нулевых и бесконечное множество комплексно-сопряженных корней $\{\pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$. Следовательно, функцию $F(x)$ можно представить в таком виде

$$F(x) = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k e^{\bar{\lambda}_k x} \quad (\lambda_k \in \Lambda, \operatorname{Re} \lambda_k < 0).$$

Подставляя $F(x)$ в формулы (1.5), найдем начальные функции, а затем по формулам (1.3) – все перемещения и напряжения:

$$\begin{aligned} U(x, y) &= -y(C_2 + 2C_3 x) - y(3x^2 - (2+\nu)y^2 + 3\nu)C_4 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \xi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ V(x, y) &= C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \nu y^2 (C_3 + 3C_4 x) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k \chi(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_x(x, y) &= -2y(C_3 + 3C_4 x) + \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k s_y(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= 3(y^2 - 1)C_4 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) e^{\lambda_k x} + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) e^{\bar{\lambda}_k x}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В формулах (1.8) функции Фадля-Папковича $\xi(\lambda_k, y)$, $\chi(\lambda_k, y)$, $s_x(\lambda_k, y)$, $s_y(\lambda_k, y)$, $t_{xy}(\lambda_k, y)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \xi(\lambda_k, y) &= \left[\frac{\nu-1}{2} \cos \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k \right] \sin \lambda_k y - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y, \\ \chi(\lambda_k, y) &= \left[\cos \lambda_k - \frac{1+\nu}{2} \lambda_k \sin \lambda_k \right] \cos \lambda_k y + \frac{1+\nu}{2} \lambda_k y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_x(\lambda_k, y) &= \\
&= -(1+\nu)\lambda_k((\cos \lambda_k + \lambda_k \sin \lambda_k) \sin \lambda_k y + \lambda_k y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y), \\
s_y(\lambda_k, y) &= (1+\nu)\lambda_k((\lambda_k \sin \lambda_k - \cos \lambda_k) \sin \lambda_k y + \lambda_k y \cos \lambda_k \cos \lambda_k y), \\
t_{xy}(\lambda_k, y) &= -\lambda_k^2(1+\nu)(\sin \lambda_k \cos \lambda_k y - y \cos \lambda_k \sin \lambda_k y).
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Они таковы, что граничные условия (1.1), (1.2) по продольным сторонам полуполосы удовлетворяются автоматически. Удовлетворяя с помощью выражений (1.8) граничным условиям, заданным на торце полуполосы, приходим к задаче определения неизвестных коэффициентов $C_1, \dots, C_4, a_k, \overline{a_k}$ из разложений вида

$$\begin{cases} \sigma(y) = -2yC_3 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) + \overline{a_k} s_x(\overline{\lambda_k}, y); \\ \tau(y) = 3(y^2 - 1)C_4 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) + \overline{a_k} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y), \end{cases} \tag{1.10}$$

где $\sigma(y)$ и $\tau(y)$ – нормальные и касательные напряжения на торце полуполосы.

Коэффициенты a_k и $\overline{a_k}$ определяются отсюда в явном виде с помощью систем функций $\{X_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{T_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$, биортогональных к функциям Фадля-Папковича $\{s_x(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{t_{xy}(\lambda_k, y)\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно. А функции биортогональных систем находятся, как решения уравнений [2-4,7]

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda, y) U_k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, y) V_k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} s_x(\lambda, y) X_k(y) dy &= \frac{L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, & \int_{-\infty}^{+\infty} s_y(\lambda, y) Y_k(y) dy &= \frac{\lambda^2 L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2}, \\
\int_{-\infty}^{+\infty} t_{xy}(\lambda, y) T_k(y) dy &= \frac{\lambda L(\lambda)}{\lambda^2 - \lambda_k^2},
\end{aligned} \tag{1.11}$$

в которых $\xi(\lambda, y)$, $\chi(\lambda, y)$ и т.д. – порождающие функции. Они получаются из соответствующих функций Фадля-Папковича (1.9) заменой λ_k на комплексный параметр λ .

При $\lambda = \lambda_m$ из уравнений (1.11) вытекают соотношения биортогональности

$$\begin{aligned}
\int_T \xi(\lambda_m, y) U_k(y) dy &= \begin{cases} \lambda_m M_m & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \\
\int_T \chi(\lambda_m, y) V_k(y) dy &= \begin{cases} M_m & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \\
\int_T s_x(\lambda_m, y) X_k(y) dy &= \begin{cases} M_m & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \\
\int_T s_y(\lambda_m, y) Y_k(y) dy &= \begin{cases} \lambda_m^2 M_m & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases} \\
\int_T t_{xy}(\lambda_m, y) T_k(y) dy &= \begin{cases} \lambda_m M_m & \text{при } \lambda_m = \lambda_k, \\ 0 & \text{при } \lambda_m \neq \lambda_k, \end{cases}
\end{aligned} \tag{1.12}$$

где $M_m = L'(\lambda_m) / 2\lambda_m$, а $L'(\lambda_m)$ – производная функции $L(\lambda)$, определенная при $\lambda = \lambda_m$. T – контур интегрирования, лежащий в плоскости $z = x + iy$ и составленный из отрезка мнимой оси $y \in [-1, 1]$ и луча $x \in (-\infty, 0]$, на который заменяется прямая интегрирования в формулах (1.11) в случае комплексных значений параметра λ [1,2,8].

Из равенств (1.11), в частности, следует, что при всех $\lambda = \overline{\lambda_m}$

$$\begin{aligned} \int_T \xi(\overline{\lambda_m}, y) U_k(y) dy &= \int_T \xi(\lambda_m, y) \overline{U_k(y)} dy = 0, \\ \int_T \chi(\overline{\lambda_m}, y) V_k(y) dy &= \int_T \chi(\lambda_m, y) \overline{V_k(y)} dy = 0, \\ \int_T s_x(\overline{\lambda_m}, y) X_k(y) dy &= \int_T s_x(\lambda_m, y) \overline{X_k(y)} dy = 0, \\ \int_T s_y(\overline{\lambda_m}, y) Y_k(y) dy &= \int_T s_y(\lambda_m, y) \overline{Y_k(y)} dy = 0, \\ \int_T t_{xy}(\overline{\lambda_m}, y) T_k(y) dy &= \int_T t_{xy}(\lambda_m, y) \overline{T_k(y)} dy = 0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Согласно [1,2,8], элементы $U_k(y)$, $V_k(y)$, $X_k(y)$, $Y_k(y)$ и $T_k(y)$ биортогональных систем можно представить в виде сумм финитных, соответственно, $u_k(y)$, $v_k(y)$, $x_k(y)$, $y_k(y)$, $t_k(y)$, равных нулю вне отрезка $|y| \leq 1$, и не финитных частей, ортогональных на бесконечной прямой ко всем функциям $\{\sin q_m y\}_{m=1}^\infty$ и $\{\cos q_m y\}_{m=1}^\infty$, $q_m = (2m-1)\pi / 2$ ($m = 1, 2, \dots$). Выпишем финитные части биортогональных функций ($\delta(\cdot)$ – дельта-функция)

$$\begin{aligned} u_k(y) &= -\frac{\lambda_k \sin \lambda_k y}{\cos \lambda_k} - (\delta(y-1) - \delta(y+1)), \quad v_k(y) = -\frac{\cos \lambda_k y}{\cos \lambda_k}, \\ x_k(y) &= -\frac{\sin \lambda_k y}{2\lambda_k \cos \lambda_k}, \\ y_k(y) &= \frac{\lambda_k \sin \lambda_k y}{2 \cos \lambda_k} + \frac{\delta(y-1) - \delta(y+1)}{2}, \quad t_k(y) = -\frac{\cos \lambda_k y}{2 \cos \lambda_k}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Формулы (1.14) получаются так. Например, построим функцию $u_k(y)$. Примем в первой формуле (1.11) $\lambda = q_m$. Тогда получим

$$\int_{-1}^1 \xi(q_m, y) u_k(y) dy = \frac{q_m L(q_m)}{q_m^2 - \lambda_k^2}$$

или

$$\int_{-1}^1 \sin(q_m y) u_k(y) dy = (-1)^m \frac{2q_m^2}{q_m^2 - \lambda_k^2}.$$

Отсюда найдем функцию $u_k(y)$, используя обратное преобразование Фурье (или простым подбором).

Между финитными частями биортогональных функций существует связь [2]

$$x'_k(y) = t_k(y), \quad t'_k(y) = y_k(y).$$

2. ПОСТРОЕНИЕ БИОРТОГОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С НУЛЕВЫМ ИНДЕКСОМ

Разложим в равенствах (1.11) правые и левые части в ряды Тейлора по степеням λ и перейдем в них к пределу при $\lambda \rightarrow 0$. Имея в виду асимптотические представления

$$\begin{aligned}
 L(\lambda) &= \lambda^4 \left(C + \frac{2(\nu+1)}{3} \right) - \lambda^6 \left(C + \frac{2(\nu+1)}{15} \right) + \dots, \\
 \xi(\lambda, y) &= -y\lambda + \lambda^3 \frac{(2+\nu)y^3 - 3\nu y}{6} + \dots, \\
 \chi(\lambda, y) &= 1 + \lambda^2 \left(\frac{\nu(y^2-1)}{2} - 1 \right) + \lambda^4 \left(-\frac{(2\nu+1)y^4}{24} + \frac{y^2}{4} + \frac{\nu}{12} + \frac{1}{8} \right) + \dots, \\
 s_x(\lambda, y) &= -2\lambda^2 y(\nu+1) + \lambda^4 \frac{2y^3(\nu+1)}{3} + \dots, \\
 s_y(\lambda, y) &= -\lambda^4 \frac{y(\nu+1)(y^2-3)}{3} + \lambda^6 \frac{y(\nu+1)(y^4-5)}{30} + \dots, \\
 t_{xy}(\lambda, y) &= \lambda^3(\nu+1)(y^2-1) - \lambda^5 \frac{(\nu+1)(y^4-1)}{6} + \dots,
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

получим

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} -yU_k(y)dy &= 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2+\nu)y^3 - 3\nu y}{6} U_k(y)dy = 0, \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} V_k(y)dy &= 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\nu(y^2-1)}{2} - 1 \right) V_k(y)dy = 0, \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} -2(\nu+1)yX_k(y)dy &= 0, \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\nu+1)y(y^2-3)}{3} Y_k(y)dy &= 0, \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} (\nu+1)(y^2-1)T_k(y)dy &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

В силу ортогональности (2.2) биортогональных систем функций к полиномиальным слагаемым, разложения Лагранжа по соответствующим системам функций Фадля-Папковича $\xi(\lambda_k, y)$, $\chi(\lambda_k, y)$, $s_x(\lambda_k, y)$, $s_y(\lambda_k, y)$, $t_{xy}(\lambda_k, y)$ могут отличаться от раскладываемых функций следующими слагаемыми полиномиального типа

$$\begin{aligned}
 A_U y + B_U \frac{(2+\nu)y^3 - 3\nu y}{6}, \quad A_V + B_V \left[\frac{1}{2}\nu(y^2-1) - 1 \right], \\
 A_X y, \quad A_Y (1+\nu)y \left(1 - \frac{y^2}{3} \right), \quad A_{XY} (y^2-1).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь A_U, B_U, A_V, B_V и т.д. – произвольные постоянные. Чтобы определить их, нужно к функциям Фадля-Папковича добавить соответствующие полиномы и дополнительно построить функции, ортогональные к функциям Фадля-Папковича и не ортогональные к полиномам. Назовем их биортогональными функциями с нулевым индексом. В том случае, когда полиномиальных слагаемых два (первая строчка в формулах (2.3)), будем говорить о биортогональных функциях с нулевым индексом первого и второго порядков, соответственно, для первого и второго полиномиальных слагаемых.

1) Построим биортогональные функции с нулевым индексом к первому выражению (2.3). Их будет две. Пусть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda, y) U_0(y) dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda^3}. \quad (2.4)$$

Если $\lambda = \lambda_k \in \Lambda$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda_k, y) U_0(y) dy = 0. \quad (2.5)$$

Учитывая разложения (2.1) для $L(\lambda)$, $\xi(\lambda, y)$ и переходя в (2.4) к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (-y) U_0(y) dy = K, \quad (2.6)$$

где

$$K = C + \frac{2}{3}(1 + \nu). \quad (2.7)$$

Функцию $U_0(y)$ назовем функцией с нулевым индексом первого порядка.

Введем биортогональную функцию с нулевым индексом второго порядка $U_0^*(y)$ следующим образом

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda, y) U_0^*(y) dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda}. \quad (2.8)$$

Принимая в равенстве (2.8) $\lambda = \lambda_k \in \Lambda$, найдем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \xi(\lambda_k, y) U_0^*(y) dy = 0. \quad (2.9)$$

Кроме того, при $\lambda \rightarrow 0$ из (2.8) вытекают два следующих равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -y U_0^*(y) dy = 0 \quad (2.10)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2 + \nu)y^3 - 3\nu y}{6} U_0^*(y) dy = K. \quad (2.11)$$

Еще одно важное равенство получим из формулы (2.4). Заменяем здесь функции $\xi(\lambda, y)$ и $L(\lambda)$ в соответствии с их представлениями (2.1).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(-y\lambda + \lambda^3 \frac{(2 + \nu)y^3 - 3\nu y}{6} + \dots \right) U_0(y) dy = \lambda K - \lambda^3 K_1 + \dots, \quad (2.12)$$

где

$$K_1 = C + \frac{2(1+\nu)}{15}. \quad (2.13)$$

Из равенства (2.12), в силу (2.6), получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lambda^3 \frac{(2+\nu)y^3 - 3\nu y}{6} + \dots \right) U_0(y) dy = -\lambda^3 K_1 + \dots \quad (2.14)$$

Наконец, устремляя λ к нулю, придем к нужному равенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(2+\nu)y^3 - 3\nu y}{6} U_0(y) dy = -K_1. \quad (2.15)$$

Формулы (1.12), (1.13), а также формулы (2.5), (2.6), (2.9)-(2.11), (2.15) выражают свойства ортогональности биортогональных систем функций $\{U_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$, $U_0(y)$, $U_0^*(y)$.

По обычной методике [8] найдем финитные части биортогональных функций $U_0(y)$ и $U_0^*(y)$. Принимая в формуле (2.4) $\lambda = q_m$, получим

$$\int_{-1}^1 u_0(y) \sin q_m y dy = (-1)^m \frac{2}{q_m^2}, \quad (2.16)$$

где $u_0(y)$ – финитная часть биортогональной функции $U_0(y)$. Можно проверить, что тогда

$$u_0(y) = -y. \quad (2.17)$$

Построим финитную часть биортогональной функции нулевого индекса второго порядка. Полагая в (2.8) $\lambda = q_m$, после упрощений будем иметь

$$\int_{-1}^1 u_0^*(y) \sin q_m y dy = 2(-1)^m, \quad (2.18)$$

где $u_0^*(y)$ – финитная часть биортогональной функции $U_0^*(y)$. Легко убедиться, что в этом случае

$$u_0^*(y) = -(\delta(y-1) - \delta(y+1)). \quad (2.19)$$

Пусть $U(y)$ – некоторая нечетная функция. Найдем коэффициенты разложения ее представления рядом Лагранжа

$$U(y) = A_U y + B_U \frac{(2+\nu)y^3 - 3\nu y}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \xi(\lambda_k, y) + \overline{A}_k \xi(\overline{\lambda}_k, y). \quad (2.20)$$

Умножим правую и левую части равенства (2.20) на функцию $U_0(y)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$. Если раскладываемая функция периодически продолжается вне отрезка $[-1, 1]$, то в силу известных свойств биортогональных функций [1], интеграл от произведения функций $U(y)U_0(y)$ по бесконечному промежутку будет равен интегралу от произведения функций $U(y)u_0(y)$ на отрезке $[-1, 1]$. Тогда получим

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 U(y)u_0(y)dy = \\ & = \int_{-\infty}^{+\infty} A_U y U_0(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} B_U \frac{(2+\nu)y^3 - 3\nu y}{6} U_0(y)dy + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_T \xi(\lambda_k, y) U_0(y)dy + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{A_k} \int_T \xi(\overline{\lambda_k}, y) U_0(y)dy. \end{aligned} \tag{2.21}$$

В силу равенств (2.5), (2.6) и (2.15), из равенства (2.21) вытекает

$$\int_{-1}^1 U(y)u_0(y)dy = -A_U K + B_U K_1. \tag{2.22}$$

Умножим теперь левую и правую части равенства (2.20) на функцию U_0^* . Учитывая равенства (2.9)-(2.11), получим

$$\int_{-1}^1 U(y)u_0^*(y)dy = -\int_{-1}^1 U(y)[\delta(y-1) - \delta(y+1)]dy = -2U(1) = B_U K.$$

Откуда найдем

$$B_U = -\frac{2U(1)}{K}. \tag{2.23}$$

Подставляя (2.23) в (2.22) и учитывая формулу (2.17) для функции $u_0(y)$, найдем

$$A_U = \frac{2U(1)K_1}{K^2} + \frac{1}{K} \int_{-1}^1 yU(y)dy. \tag{2.24}$$

Умножим обе части (2.20) на функцию $U_k(y)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$. Принимая во внимание равенства (1.12), (1.13) и свойства (2.2) биортогональных систем функций $\{U_k(y)\}_{k=1}^{\infty}$, получим

$$\int_{-1}^1 U(y)u_k(y)dy = A_k M_k \lambda_k, \tag{2.25}$$

откуда

$$A_k = \frac{1}{\lambda_k M_k} u_k, \tag{2.26}$$

где

$$u_k = \int_{-1}^1 U(y)u_k(y)dy. \tag{2.27}$$

Формулу (2.26), учитывая представление для функции $u_k(y)$, можно записать так

$$A_k = -\frac{1}{M_k} \int_{-1}^1 U(y) \frac{\sin \lambda_k y}{\cos \lambda_k} dy - \frac{2U(1)}{\lambda_k M_k}. \tag{2.28}$$

Из формул (2.20), (2.23), (2.24), (2.28) следует, что если раскладываемая функция $U(y)$ самоуравновешена по моменту, т.е.

$$\int_{-1}^1 yU(y)dy = 0 \tag{2.29}$$

и равна нулю на концах отрезка, т.е. $U(\pm 1) = 0$, то $A_U = B_U = 0$ и разложение Лагранжа (2.20) принимает вид

$$U(y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \xi(\lambda_k, y) + \overline{A_k} \xi(\overline{\lambda_k}, y), \quad A_k = -\frac{1}{M_{k-1}} \int U(y) \frac{\sin \lambda_k y}{\cos \lambda_k} dy. \quad (2.30)$$

2) Построим биортогональные функции с нулевым индексом ко второму выражению (2.3). Их тоже будет две. Пусть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, y) V_0(y) dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda^4}. \quad (2.31)$$

Приняв здесь $\lambda = \lambda_k \in \Lambda$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda_k, y) V_0(y) dy = 0. \quad (2.32)$$

Учитывая разложения (2.1) для функций $\chi(\lambda, y)$, $L(\lambda)$ и переходя в (2.31) к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, найдем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_0(y) dy = K. \quad (2.33)$$

$V_0(y)$ – биортогональная функция с нулевым индексом первого порядка.

Введем биортогональную функцию с нулевым индексом второго порядка $V_0^*(y)$ по формуле

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda, y) V_0^*(y) dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda^2}. \quad (2.34)$$

Если здесь $\lambda = \lambda_k \in \Lambda$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi(\lambda_k, y) V_0^*(y) dy = 0. \quad (2.35)$$

При $\lambda \rightarrow 0$ из равенства (2.34), как и выше, получим два равенства

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V_0^*(y) dy = 0 \quad (2.36)$$

и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\nu(y^2 - 1)}{2} - 1 \right) V_0^*(y) dy = K. \quad (2.37)$$

Заменим в формуле (2.31) функции $\chi(\lambda, y)$ и $L(\lambda)$ в соответствии с их представлениями (2.1). Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ 1 + \lambda^2 \left[\frac{\nu(y^2 - 1)}{2} - 1 \right] + \dots \right\} V_0(y) dy = K - \lambda^2 K_1 + \dots \quad (2.38)$$

Учитывая (2.33) и переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, будем иметь

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\nu(y^2 - 1)}{2} - 1 \right] V_0(y) dy = -K_1. \quad (2.39)$$

Финитные части соответствующих биортогональных функций с нулевым индексом находятся так же, как это было проделано выше. Они равны

$$v_0(y) = \frac{1}{2}(y^2 - 1), \quad v_0^*(y) = -1. \quad (2.40)$$

Рассмотрим разложение Лагранжа некоторой четной функции $V(y)$

$$V(y) = A_V + B_V \left[\frac{v(y^2 - 1)}{2} - 1 \right] + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \chi(\lambda_k, y) + \overline{B}_k \chi(\overline{\lambda}_k, y). \quad (2.41)$$

Умножим правую и левую части равенства (2.41) на $V_0(y)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$. Если раскладываемая функция периодически продолжается вне отрезка $[-1, 1]$, то интеграл слева заменяется интегралом по этому отрезку. И тогда имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} V(y)V_0(y)dy &= \int_{-1}^1 V(y)v_0(y)dy = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_V V_0(y)dy + \int_{-\infty}^{+\infty} B_V \left[\frac{v(y^2 - 1)}{2} - 1 \right] V_0(y)dy + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_T \chi(\lambda_k, y)V_0(y)dy + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{B}_k \int_T \chi(\overline{\lambda}_k, y)V_0(y)dy. \end{aligned}$$

Учитывая свойства биортогональности (2.32), (2.33) и (2.39), приходим к равенству

$$\int_{-1}^1 V(y)v_0(y)dy = A_V K - B_V K_1. \quad (2.42)$$

Теперь умножим обе части равенства (2.41) на $V_0^*(y)$ и проинтегрируем по бесконечному промежутку, по-прежнему полагая, что раскладываемая функция периодически продолжается вне отрезка $[-1, 1]$. Учитывая равенства (2.35)-(2.37) и (2.40), придем к выражению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} V(y)V_0^*(y)dy = \int_{-1}^1 V(y)v_0^* dy = - \int_{-1}^1 V(y)dy = B_V K. \quad (2.43)$$

Отсюда

$$B_V = - \frac{1}{K} \int_{-1}^1 V(y)dy. \quad (2.44)$$

Подставив (2.44) в (2.42) и учитывая формулу (2.40) для функции $v_0(y)$, найдем

$$A_V = - \frac{K_1}{K^2} \int_{-1}^1 V(y)dy + \frac{1}{K} \int_{-1}^1 V(y) \frac{y^2 - 1}{2} dy. \quad (2.45)$$

Для коэффициентов B_k не трудно получить формулу, аналогичную (2.28)

$$B_k = \frac{1}{M_k} v_k = \frac{1}{M_k} \int_{-1}^1 V(y)v_k(y)dy = - \frac{1}{M_k} \int_{-1}^1 V(y) \frac{\cos \lambda_k y}{\cos \lambda_k} dy. \quad (2.46)$$

4) Построим биортогональную функцию с нулевым индексом к полиному $A_x y$. Пусть

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_x(\lambda, y)X_0(y)dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda^2}. \quad (2.47)$$

При $\lambda = \lambda_k \in \Lambda$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_x(\lambda_k, y)X_0(y)dy = 0. \quad (2.48)$$

Учитывая разложение по степеням λ функции $s_x(\lambda, y)$ и переходя в (2.47) к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -2(\nu+1)yX_0(y)dy = K. \quad (2.49)$$

Финитная часть функции $X_0(y)$ равна

$$x_0(y) = -\frac{1}{2}y. \quad (2.50)$$

Построим разложение Лагранжа некоторой функции $\sigma_x(y)$

$$\sigma_x(y) = A_x y + \sum_{k=1}^{\infty} C_k s_x(\lambda_k, y) + \overline{C}_k s_x(\overline{\lambda}_k, y). \quad (2.51)$$

Умножим равенство (2.51) на функцию $X_0(y)$ и проинтегрируем. Учитывая (2.48)-(2.50) и считая раскладываемую функцию периодически продолженной вне отрезка $[-1, 1]$, получим

$$\int_{-1}^1 \sigma_x(y)x_0(y)dy = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sigma_x(y)ydy = \int_{-\infty}^{+\infty} A_x yX_0(y)dy = -A_x \frac{K}{2(1+\nu)}.$$

Откуда найдем

$$A_x = \frac{1+\nu}{K} \int_{-1}^1 \sigma_x(y)ydy. \quad (2.52)$$

Если же раскладываемая функция $\sigma_x(y)$ самоуравновешена по моменту, т.е.

$$\int_{-1}^1 \sigma_x(y)ydy = 0,$$

то $A_x = 0$.

Найдем числа C_k . Умножая обе части равенства (2.51) на функцию $X_k(y)$ и интегрируя по контуру Γ , а также, учитывая, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} yX_k(y)dy = 0, \quad (2.53)$$

что сразу получается из соответствующего равенства (1.11) при $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$x_k = \int_{-1}^1 \sigma_x(y)x_k(y)dy = -\int_{-1}^1 \sigma_x(y) \frac{\sin \lambda_k y}{2\lambda_k \cos \lambda_k} dy = C_k M_k.$$

Откуда

$$C_k = \frac{1}{M_k} x_k. \quad (2.54)$$

3) Функцию с нулевым индексом $Y_0(y)$, биортогональную к полиному

$$A_y (1+\nu) y \left(1 - \frac{y^2}{3} \right),$$

построим, полагая

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_y(\lambda, y)Y_0(y)dy = L(\lambda). \quad (2.55)$$

При $\lambda = \lambda_k$, очевидно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_y(\lambda_k, y) Y_0(y) dy = 0. \quad (2.56)$$

Переходя в формуле (2.55) к пределу, когда $\lambda \rightarrow 0$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+\nu) y \left(1 - \frac{y^2}{3}\right) Y_0(y) dy = C + \frac{2}{3}(\nu+1) = K. \quad (2.57)$$

Финитная часть функции $Y_0(y)$ равна

$$y_0(y) = \frac{1}{2} [\delta(y-1) - \delta(y+1)]. \quad (2.58)$$

Пусть раскладываемая функция равна $\sigma_y(y)$. Найдем коэффициенты ее разложения в ряд Лагранжа

$$\sigma_y(y) = A_Y y (1+\nu) \left(1 - \frac{y^2}{3}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} D_k s_y(\lambda_k, y) + \overline{D}_k s_y(\overline{\lambda}_k, y). \quad (2.59)$$

Имеем

$$\int_{-1}^1 \sigma_y(y) y_0(y) dy = \sigma_y(1) = A_Y \int_{-\infty}^{+\infty} (1+\nu) y \left(1 - \frac{y^2}{3}\right) Y_0(y) dy = A_Y K.$$

Откуда

$$A_Y = \frac{\sigma_y(1)}{K}. \quad (2.60)$$

Отсюда видно, что если раскладываемая функция обращается в нуль на концах отрезка $y = \pm 1$, то $A_Y = 0$ и слагаемое вне суммы (2.59) пропадает.

Для чисел D_k получим

$$D_k = \frac{1}{\lambda_k M_k} \int_{-1}^1 \sigma_y(y) \frac{\sin \lambda_k y}{\cos \lambda_k} dy + \frac{\sigma_y(1)}{\lambda_k^2 M_k}. \quad (2.61)$$

Обозначим

$$y_k = \int_{-1}^1 \sigma_y(y) y_k(y) dy, \quad (2.62)$$

тогда

$$D_k = \frac{1}{\lambda_k M_k} y_k. \quad (2.63)$$

5) Построим биортогональную функцию нулевого индекса $T_0(y)$ к последнему полиному (2.3), считая

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t_{xy}(\lambda, y) T_0(y) dy = \frac{L(\lambda)}{\lambda}. \quad (2.64)$$

При $\lambda = \lambda_k \in \Lambda$ получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t_{xy}(\lambda_k, y) T_0(y) dy = 0. \quad (2.65)$$

Переходя в (2.64) к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, придем к равенству

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+\nu)(y^2 - 1) T_0(y) dy = C + \frac{2}{3}(\nu+1) = K. \quad (2.66)$$

Финитная часть функции $T_0(y)$ равна

$$t_0(y) = -\frac{1}{2}. \quad (2.67)$$

Найдем коэффициенты разложения в ряд Лагранжа

$$\tau(y) = A_{XY} (y^2 - 1) + \sum_{k=1}^{\infty} E_k t_{xy}(\lambda_k, y) + \overline{E_k} t_{xy}(\overline{\lambda_k}, y). \quad (2.68)$$

Умножим обе части (2.68) на $T_0(y)$ и проинтегрируем от $-\infty$ до $+\infty$. Считая, что раскладываемая функция продолжается периодически вне отрезка $[-1, 1]$, с учетом (2.65)-(2.67), получим

$$-\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \tau(y) dy = A_{XY} \frac{K}{1+\nu}.$$

Откуда найдем

$$A_{XY} = -\frac{1+\nu}{2K} \int_{-1}^1 \tau(y) dy. \quad (2.69)$$

Если раскладываемая функция $\tau(y)$ самоуравновешена, то $A_{XY} = 0$.

Умножая обе части равенства (2.68) на функцию $T_k(y)$ и интегрируя по контуру T , а также учитывая (1.12), (1.13) и (2.2), найдем коэффициенты E_k . Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tau(y) T_k(y) dy = \int_{-1}^1 \tau(y) t_k(y) dy = E_k \lambda_k M_k.$$

Отсюда получим

$$E_k = \frac{1}{\lambda_k M_k} t_k, \quad (2.70)$$

где

$$t_k = \int_{-1}^1 \tau(y) t_k(y) dy = -\int_{-1}^1 \tau(y) \frac{\cos \lambda_k y}{2 \cos \lambda_k} dy. \quad (2.71)$$

3. ПРИМЕРЫ РАЗЛОЖЕНИЙ ЛАГРАНЖА ПО ФУНКЦИЯМ ФАДЛЯ-ПАПКОВИЧА

Приведем примеры разложений Лагранжа функций $U(y)$, $V(y)$

$$\begin{aligned} U(y) &= A_U y + B_U \frac{(2+\nu)y^3 - 3\nu y}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \{A_k \xi(\lambda_k, y)\}, \\ V(y) &= A_V + B_V \left[\frac{\nu(y^2 - 1)}{2} - 1 \right] + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \{B_k \chi(\lambda_k, y)\}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Каждый пример сопровождается графиком, иллюстрирующим сходимость ряда к раскладываемой функции.

Пример 1. Пусть $U(y) = y$. По формулам (2.23), (2.24) и (2.27), (2.28) вычислим

$$A_U = \frac{2}{3K} + 2 \frac{K_1}{K^2}, \quad B_U = -\frac{2}{K}, \quad A_k = -\frac{u_k}{\lambda_k M_k}, \quad u_k = -\frac{2}{\lambda_k} \operatorname{tg} \lambda_k.$$

Следовательно, имеем (рис.1)

$$y = \left(\frac{2}{3K} + 2 \frac{K_1}{K^2} \right) y - \frac{(2+\nu)y^3 - 3\nu y}{3K} + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{u_k}{\lambda_k M_k} \xi(\lambda_k, y) \right\}.$$

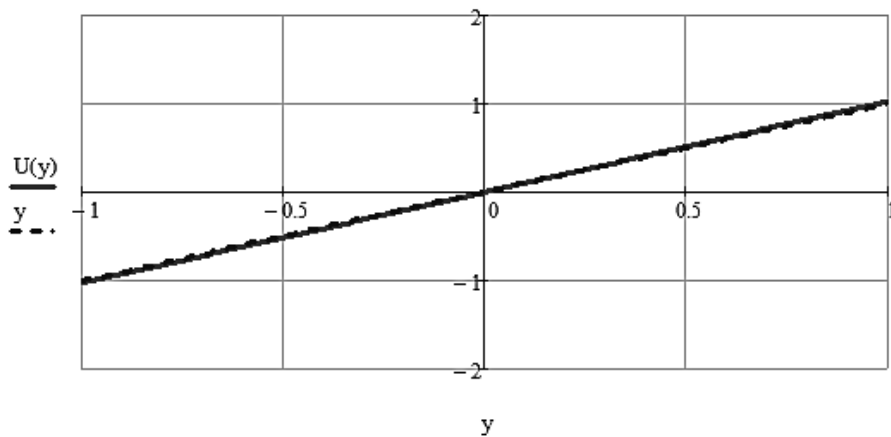


Рис.1.

Пример 2. Разложим в ряд Лагранжа функцию $V(y) = y^2$. Вычисленные по формулам (2.44) - (2.46) коэффициенты имеют вид

$$A_V = -\frac{2}{15K} - \frac{2}{3} \frac{K_1}{K^2}, \quad B_V = -\frac{2}{3K}, \quad B_k = \frac{v_k}{M_k}, \quad v_k = -\frac{2}{\lambda_k^3} \left((\lambda_k^2 - 2) \operatorname{tg} \lambda_k + 2\lambda_k \right).$$

Тогда (рис.2)

$$y^2 = \left(-\frac{2}{15K} - \frac{2K_1}{3K^2} \right) + \left(-\frac{2}{3K} \right) \left(\frac{y^2 - 1}{2} \nu - 1 \right) + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{v_k}{M_k} \chi(\lambda_k, y) \right\}.$$

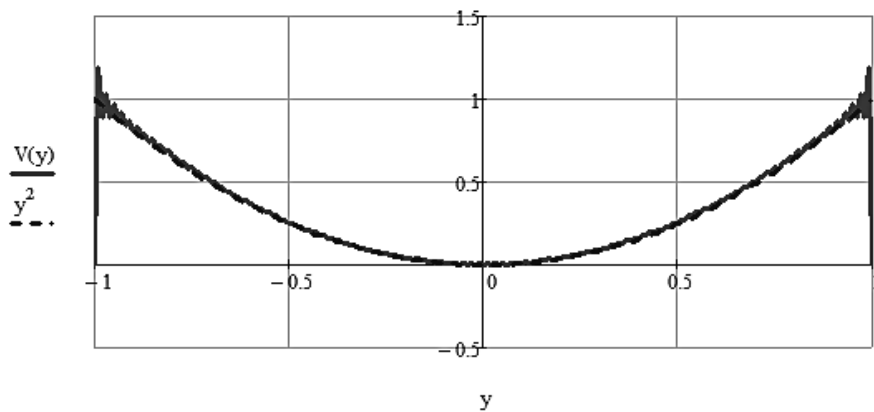


Рис.2.

Приведем теперь примеры разложений в ряды Лагранжа (3.1) таких функций, для которых полиномиальные слагаемые (элементарные решения) в этих разложениях обращаются в нуль.

Пример 3. Рассмотрим разложение Лагранжа функции $U(y) = \frac{7}{3}y^5 - \frac{10}{3}y^3 + y$. Так как

$$U(1) = 0, \int_{-1}^1 yU(y)dy = 0,$$

то соответствующий ряд Лагранжа имеет вид (рис.3)

$$\frac{7}{3}y^5 - \frac{10}{3}y^3 + y = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{u_k}{\lambda_k M_k} \xi(\lambda_k, y) \right\},$$

$$u_k = -\frac{16}{3\lambda_k^5} \left[(\lambda_k^4 - 45\lambda_k^2 + 105) \operatorname{tg} \lambda_k + 5\lambda_k (2\lambda_k^2 - 21) \right].$$

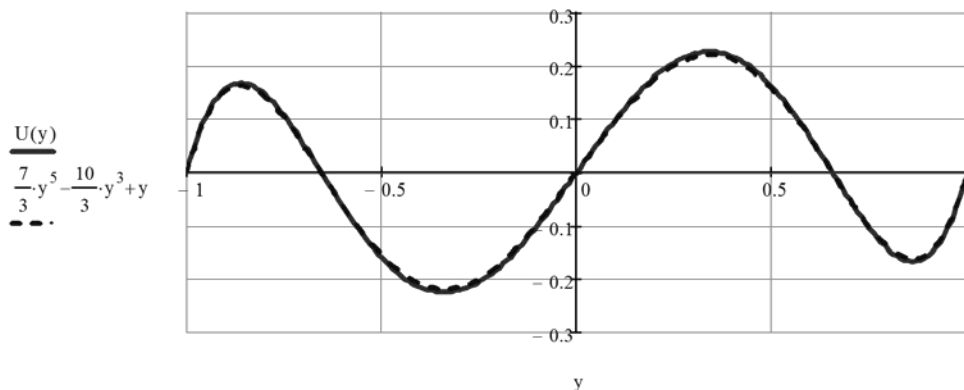


Рис.3.

Пример 4. Пусть $V(y) = \frac{35}{3}y^4 - 10y^2 + 1$. Так как

$$V(1) = 0, \int_{-1}^1 (y^2 - 1)V(y)dy = 0,$$

то коэффициенты разложений A_v и B_v обращаются в нуль. Коэффициенты B_k определим по формуле (2.46). Тогда получим ряд (рис.4)

$$\frac{35}{3}y^4 - 10y^2 + 1 = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \frac{v_k}{M_k} \chi(\lambda_k, y) \right\},$$

$$v_k = -\frac{2}{3\lambda_k^5 \cos \lambda_k} \left[(80\lambda_k^3 - 840\lambda_k) \cos \lambda_k + 8 \sin \lambda_k (\lambda_k^4 - 45\lambda_k^2 + 105) \right].$$

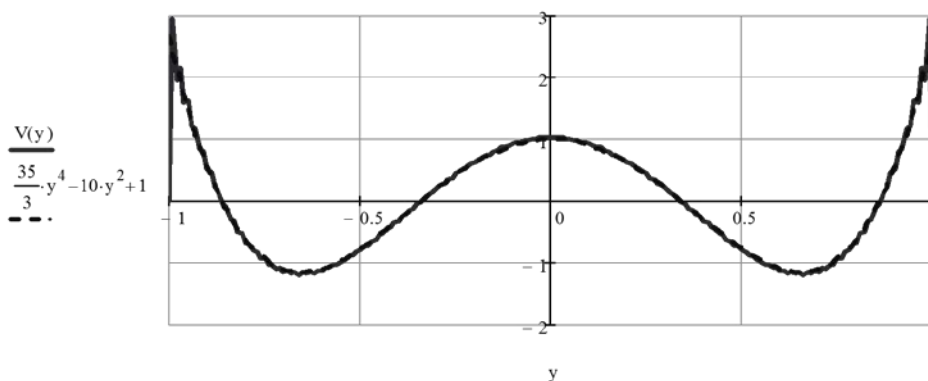


Рис.4.

4. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим небольшой пример решения краевой задачи. Пусть в разложениях (1.10) на торце полуполосы $\sigma(y) = y^5 - \frac{10}{7}y^3 + \frac{3}{7}y$, а $\tau(y) = 0$.

Воспользуемся формулами для перемещений и напряжений, полученными в [9], добавив к ним элементарные решения

$$\begin{aligned}
 U(x, y) &= -y(C_2 + 2C_3x) - y(3x^2 - (2 + \nu)y^2 + 3\nu)C_4 - \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}, \\
 V(x, y) &= C_1 + C_2x + C_3x^2 + \nu y^2 (C_3 + 3C_4x) + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \left(\cos b_k x - c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\
 \sigma_x(x, y) &= -2y(C_3 + 3C_4x) + \\
 &\quad + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \left(\cos b_k x - c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\
 \sigma_y(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{s_y(\lambda_k, y) \lambda_k \bar{\lambda}_k}{M_k \lambda_k^2} \left(\cos b_k x + c_k \frac{\sin b_k x}{b_k} \right) e^{c_k x} \right\}, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= 3(y^2 - 1)C_4 - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \lambda_k \bar{\lambda}_k \frac{\sin b_k x}{b_k} e^{c_k x} \right\}
 \end{aligned}$$

Здесь $c_k = \operatorname{Re} \lambda_k$, $b_k = \operatorname{Im} \lambda_k$.

Так как касательные напряжения на торце полуполосы равны нулю, то $C_4 = 0$. Кроме того, в силу самоуравновешенности по моменту заданных на торце нормальных напряжений, $C_3 = 0$. C_1 и C_2 отвечают перемещениям полуполосы, как недеформируемой. Числа

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 \sigma(y) x_k(y) dy = -\frac{8}{7\lambda_k^7} \left[(\lambda_k^4 - 45\lambda_k^2 + 105) \operatorname{tg} \lambda_k + 10\lambda_k^3 - 105\lambda_k \right].$$

На рис.5 показана сходимость нормальных напряжений к раскладываемой функции.

На рис.6 показано распределение нормальных напряжений вдоль ребра, а на рис.7 – распределение перемещений вдоль ребра. Зная закон распределения нормальных напряжений $\sigma_y(x, 1)$ в месте стыка ребра и пластины, по известным формулам теории изгиба балок легко найти перерезывающие силы и изгибающие моменты в ребре.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Ряды Лагранжа (разложения только одной функции в ряд по какой-либо одной системе функций Фадля-Папковича, коэффициенты которых находятся с помощью биортогональных систем функций) играют фундаментальную роль при решении краевых задач теории упругости в конечных канонических областях с угловыми точками границы и точками смены типа граничных условий. Их можно

рассматривать, как аналоги тригонометрических рядов Фурье, или как их обобщение, т.к. в том случае, когда собственные числа λ_k равны $k\pi$, они превращаются в тригонометрические ряды. Важно заметить, что ряды Лагранжа равномерно равносходятся с тригонометрическими рядами Фурье.

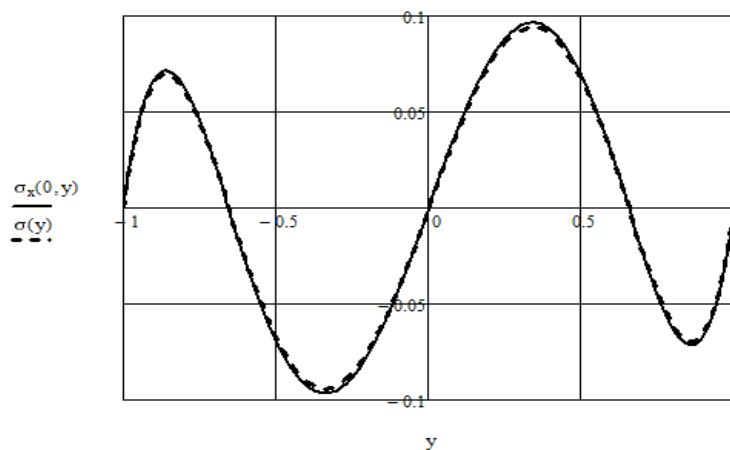


Рис.5.

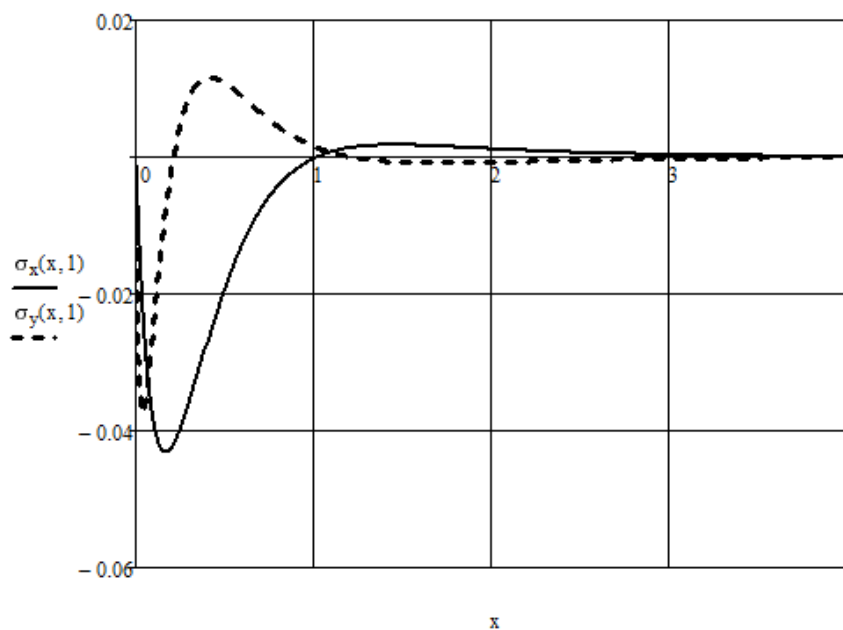


Рис.6.

Рассмотренные в статье разложения Лагранжа отличаются от тех, что исследовались ранее, полиномиальными слагаемыми, к которым нужно было построить биортогональные функции. Полиномиальные слагаемые фактически представляют собой отвечающие нулевым корням характеристического уравнения элементарные решения сопротивления материалов. Удивительно то, что их можно присоединить к соответствующим системам функций Фадля-Папковича и построить затем общие для этих объединений биортогональные системы функций. Полученные с помощью биортогональных функций с нулевым индексом условия (2.52) и (2.69), при которых полиномиальные слагаемые в

разложениях по системам функций $s_x(\lambda_k, y)$ и $t_{xy}(\lambda_k, y)$ исчезают, совпадают с известными условиями интегрального равенства нулю на торце полуполосы момента и перерезывающей силы (самоуравновешенные нормальные и касательные напряжения). Однако, для перемещений эти условия не очевидны. В работах М.И. Гусейн-Заде [10,11] и других авторов одно время этот вопрос обсуждался, но окончательно не был решен. Здесь он дается в простой явной форме. Сформулируем эти условия в следующем виде:

1. Если заданные на торце полуполосы продольные перемещения $U(y)$ самоуравновешены по моменту и равны нулю на концах отрезка, то решение нечетно-симметричной краевой задачи для полуполосы, продольные стороны которой подкреплены работающими только на изгиб ребрами жесткости, будет затухающим на бесконечности.

2. Заданные на торце полуполосы поперечные перемещения $V(y)$ должны быть такими, чтобы интегралы в формуле (2.45) обращались в ноль.

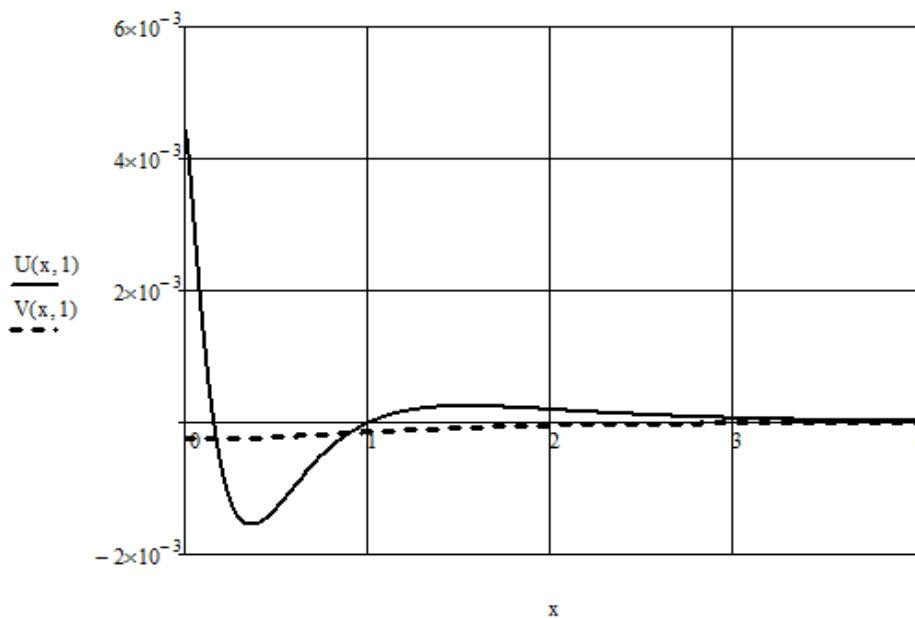


Рис.7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коваленко М.Д., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля-Папковича в полосе. Основы теории // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №5. – С.78-98.
2. Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д. Разложения по функциям Фадля-Папковича. Примеры решений в полуполосе // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2013. – №5. – С.136-158.
3. Себряков Г.Г., Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д. Разложения Лагранжа по функциям Фадля-Папковича в краевой задаче теории упругости для полуполосы // Доклады Академии наук. – 2015. – Т.460. – № 5. – С.540-543.

4. Себряков Г.Г., Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Семенова И.А. Нечетно-симметричная краевая задача теории упругости для полуполосы. Точное решение // Доклады Академии наук. – 2015. – Т.462. – №6. – С.662-665.
5. Лапикова Е.С., Юринкина М.Н. Полуполоса с продольными ребрами жесткости, работающими на изгиб. Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им.И.Я.Яковлева. Сер.: Механика предельного состояния. – 2014. – №1(19). – С.95-107.
6. Власов В.В. Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики. – М.: Стройиздат, 1975. – 224 с.
7. Коваленко М.Д., Меньшова И.В. Разложения Лагранжа по функциям Фадля – Папковича в обратно симметричной задаче теории упругости для прямоугольной полуполосы // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им.И.Я.Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – №5(15). – С.81-89.
8. Коваленко М.Д., Меньшова И.В. Аналитические решения двумерных краевых задач теории упругости в конечных областях с угловыми точками границы. – Чебоксары: Изд-во Чуваш. гос. пед. ун-та, 2014. – 123 с.
9. Семенова И.А. Примеры аналитических решений обратно симметричной краевой задачи теории упругости в полуполосе // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им.И.Я.Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2014. – №4(22). – С.215-224.
10. Гусейн-Заде М.И. О необходимых и достаточных условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы // ПММ. – 1985. – Т.29. – Вып.4. – С.452-759.
11. Гусейн-Заде М.И. Об условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы // ПММ. – 1985. – Т.29. – Вып.2. – С.393-399.

Поступила в редакцию 2 сентября 2014 года.

Сведения об авторах:

Меньшова Ирина Владимировна – к.ф.-м.н., с.н.с., Лаборатория геодинамики, ФГБУН Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г.Москва, Россия; e-mail: menshovairina@yandex.ru

Семенова Ирина Александровна – асп., Кафедра математического анализа, алгебры и геометрии, Чувашский государственный педагогический университет им.И.Я.Яковлева, г.Чебоксары, Россия; e-mail: irishka_g_05@mail.ru