УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ РАЗВИТИЯ КОРРЕКТНЫХ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ МЕТОДОВ МНОГОУРОВНЕВОГО РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ[1]

Акимов П.А.[*,**,***], Мозгалева М.Л.[*], Моджтаба Аслами[*], Негрозов О.А.[*,**]

[*]*Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия*
[**]*Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, Россия*
[***]*ЗАО «Научно-исследовательский центр «СтаДиО», г. Москва, Россия*

РЕЗЮМЕ

В настоящей статье представлены общие сведения о дискретно-континуальных методах многоуровневого расчета строительных конструкций, кратко изложена суть дискретно-континуального метода конечных элементов, а также вейвлет-реализации данного метода, ориентированной на локальный расчет строительных конструкций, сформулированы перспективные направления дальнейшего развития указанных методов и реализующего программно-алгоритмического обеспечения.

Ключевые слова: дискретно-континуальные методы; дискретно-континуальный метод конечных элементов; вейвлет-реализация; многоуровневые расчеты; локальные расчеты; строительные конструкции

ON SOME PATHS OF DEVELOPMENT OF THE CORRECT DISCRETE-CONTINUAL METHODS OF MULTI-LEVEL COMPUTING OF STRUCTURES

Akimov P.A.[*,**,***], Mozgaleva M.L.[*], Modjtaba Aslami[*], Negrozov O.A.[*,**]

[*]*National Research University "Moscow State University of Civil Engineering", Moscow, Russia*
[**]*Russian Academy of Architecture and Civil Engineering, Moscow, Russia*
[***]*Closed Corporation "Scientific Research Center Stadyo", Moscow, Russia*

SUMMARY

The general information on the discrete-continual approaches of multi-level computing of civil engineering structures is presented. The essentials of discrete-continual finite element

[1] *Исследования проводились в рамках следующих работ:*
Грант 7.1.7 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных численных методов решения геометрически, физически и конструктивно нелинейных задач деформирования, устойчивости и закритического поведения тонкостенных оболочечно-стержневых конструкций» на 2013-2015 гг.
Грант 7.1.8 Российской академии архитектуры и строительных наук «Разработка, исследование и верификация корректных многоуровневых численных и численно-аналитических методов локального расчета строительных конструкций на основе кратномасштабного вейвлет-анализа» на 2013-2015 гг.

method are briefly explained as well as the wavelet-based realization of this approach for the local level computing of civil engineering structures. The perspective path of development of the presented methods and software are formulated.

Key words: continual-discrete approaches; continual-discrete finite element method; wavelet approach; multi-level computing; local level computing; civil engineering structures

1. ПОНЯТИЕ О ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНЫХ МЕТОДАХ МНОГОУРОВНЕВОГО РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

Как известно, современный этап развития строительной механики, в частности задач определения многоуровневого (в том числе локального) напряженно-деформированного состояния (НДС) конструкций, связан с широким использованием численных методов [1-4]. Значительный прогресс в развитии ЭВМ и вычислительной математике, продолжающийся последние десятилетия, обусловил существенное изменение соотношения аналитических, экспериментальных (модельных и натурных) и численных подходов к анализу сложных конструкций (в частности, из композиционных материалов), зданий и сооружений. Практика выдвигает задачи мониторинга и комплексного наукоемкого расчетно-теоретического обоснования напряженно-деформированного (и иного) состояния, прочности, устойчивости, надежности и безопасности ответственных объектов промышленного и гражданского строительства, моделирования в том числе структурированных, неоднородных и гетерогенных сред со сложными реологическими свойствами, фазовыми переходами, адекватное решение которых может быть зачастую получено только численным путем. Как правило, найти замкнутое аналитическое решение для большинства проблем не представляется возможным, а экспериментальные исследования часто оказываются весьма дорогостоящими, а порой и неполными. Этим, в частности, и объясняется доминирование численных методов, имеющее место, как в отечественной, так и в зарубежной расчетной практике. Вместе с тем, очевидно, что на всех этапах изучения НДС строительного объекта математическая теория, исследования аналитическими и экспериментальными методами и численный расчет должны применяться совместно и согласованно, причем в конце прошлого столетия появился определенный потенциал для расширения доли аналитических подходов. Достигнутый уровень мощности ЭВМ и имеющийся в арсенале инструментарий аналитических математических средств в сочетании с разнообразием математических моделей позволил начать разработку корректных численно-аналитических (полуаналитических) методов, сочетающих качественные свойства замкнутых решений с общностью численных подходов. Преимущества такого сочетания, разумеется, отмечались и раньше [5], но многие из разработок прежнего времени либо были не реализуемыми практически из-за отсутствия, по крайней мере, одного из перечисленных факторов, либо в той или иной мере не учитывалась вычислительная специфика и необходимость последующей компьютерной реализации. Полуаналитические методы позволяют получать решения (в том числе локальные) в аналитической форме, способствующей улучшению качества исследования рассматриваемых объектов. Найденная с их помощью картина многоуровневого НДС развивает интуицию расчетчика и понимание работы конструкций, характера влияния на них различных локальных и глобальных факторов. Полуаналитические подходы особенно эффективны в зонах краевого эффекта (эффекта малого параметра), там, где часть составляющих решения представляет собой быстроизменяющиеся функции, скорость изменения которых не всегда может быть адекватно учтена традиционными численными методами. Аналитические подходы, в принципе, резко снижают размерность и объем вычислений, особенно в многомерных задачах, и в ряде случаев анализа состояния ответственных и конструктивно сложных сооружений переводят трехмерную задачу супербольшой вычислительной размерности из разряда «нерешаемой» в «решаемую». Следует также отметить, что предварительное аналитическое изучение отдельных локальных свойств проблемы может оказать значительную помощь при численном решении сложных задач строительной механики. Так, например, сравнение с аналитическими решениями сложной задачи в более простых и частных случаях позволяет дать оценку принятой расчетной схемы конструкции, используемого метода, алгоритма и полученного решения, в частности, оценить достигнутую точность (что особенно важно при верификационных исследованиях).

В работах А.Б.Золотова и П.А.Акимова (библиографический обзор см. [6]) было предложено семейство корректных дискретно-континуальных методов расчета строительных конструкций, включающее дискретно-континуальный метод конечных элементов (ДКМКЭ) [7], дискретно-континуальный метод граничных элементов (ДКМГЭ) и дискретно-континуальный вариационно-разностный метод (ДКВРМ)). Область применения дискретно-континуальных методов составляют преимущественно объекты, имеющие регулярные (постоянные или кусочно-постоянные) физико-геометрические параметры (характеристики) по одному из координатных направлений, которое далее условно называется основным. Характерной особенностью таких объектов является то, что их очень много. В качестве примеров можно привести высотные здания и сооружения, здания и сооружения большой протяженности, гидротехнические сооружения, тоннельные конструкции, большинство типовых конструкций (плиты перекрытий, стеновые панели, ригели, колонны, балочные конструкции, оболочечные конструкции, складчатые конструкции, фундаментные конструкции и т.д.). При их расчетном обосновании исключительно важно построить точное аналитическое решение вдоль основного направления, справедливое при любых воздействиях и промежуточных закреплениях, стыковках и т.д. Под точным аналитическим решением здесь понимается наличие явной формулы вычисления НДС конструкции в произвольной точке сечения (а вовсе не разложение в ряд). Соответствующая формула в явном виде демонстрирует характер поведения вычисляемых факторов (перемещений, их производных и т.д.). Методы являются дискретно-континуальными в том смысле, что по основному направлению сохраняется континуальный характер задачи и соответственно аналитический (абсолютно точный) вид получаемого решения, в то время как по остальным производится дискретизация того или иного вида (конечноэлементная для ДКМКЭ, граничноэлементная для ДКМГЭ и вариационно-разностная для ДКВРМ) с обоснованно контролируемой степенью точности. Разработанные методы позволяют с применением теории обобщенных функций строить точные аналитические решения в зонах сосредоточенных воздействий, избегая «размазок» или осреднений. Будем рассматривать далее ДКМКЭ, являющийся наиболее эффективным и универсальным представителем семейства дискретно-континуальных методов [8,9].

2. СУТЬ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

2.1. Первый этап.

Выполняется сведение исходной задачи расчета конструкции к обыкновенным дифференциальным уравнениям с операторными коэффициентами, сохраняющими общую континуальную постановку за счет выделения производных по основному направлению и использования метода стандартной (расширенной) области А.Б.Золотова [10]. Так, для трехмерной задачи теории упругости будем иметь

$$-L_{k,vv}\partial_3^2\bar{u}_k + \tilde{L}_{k,uv}\partial_3\bar{u}_k + L_{k,uu}\bar{u}_k = \bar{\bar{F}}_k, \quad x_3 \in \left(x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b\right), \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$ – декартовы координаты; x_3 – координата соответствующая основному направлению; $x_{3,k}^b$, $k = 1,\ldots,n_k$. – координаты сечений, в которых задаются граничные условия (в частности, координаты сечений, где происходит «скачкообразное» (разрывы первого рода) изменение физико-геометрических параметров конструкции; $\bar{u}_k = [\,u_1^{(k)}\ \ u_2^{(k)}\ \ u_3^{(k)}\,]^T$ – вектор составляющих перемещений на интервале $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$;

$$\tilde{L}_{k,uv} = L_{k,uv} - L_{k,uv}^*; \quad L_{k,vu} = L_{k,uv}^*; \quad \bar{\bar{F}}_k = \theta_k\bar{F}_k + \delta_{\Gamma,k}\bar{f}_k; \tag{2}$$

$$L_{k,vv} = \begin{bmatrix} \bar{\mu}_k & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\mu}_k & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k \end{bmatrix}; \quad L_{k,uv} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial_1^*\bar{\lambda}_k \\ 0 & 0 & \partial_2^*\bar{\lambda}_k \\ \partial_1^*\bar{\mu}_k & \partial_2^*\bar{\mu}_k & 0 \end{bmatrix}\partial_3; \tag{3}$$

$$L_{k,uu} = \sum_{j=1}^{2}\partial_j^*\bar{\mu}_k\partial_j \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_1^*\bar{\mu}_k\partial_1 & \partial_2^*\bar{\mu}_k\partial_1 & 0 \\ \partial_1^*\bar{\mu}_k\partial_2 & \partial_2^*\bar{\mu}_k\partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_1^*\bar{\lambda}_k\partial_1 & \partial_1^*\bar{\lambda}_k\partial_2 & 0 \\ \partial_2^*\bar{\lambda}_k\partial_1 & \partial_2^*\bar{\lambda}_k\partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

λ_k, μ_k – параметры Ламе на интервале $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$; Ω_k – область, описываемая фрагментом конструкции с постоянными физико-геометрическими параметрами по основному направлению и с границей $\Gamma_k = \partial\Omega_k$; $\theta_k = \theta_k(x)$ – характеристическая функция области Ω_k; $\delta_{\Gamma,k} = \delta_{\Gamma,k}(x)$ – дельта-функция границы $\Gamma_k = \partial\Omega_k$; $\bar{F}_k = [\,F_1^{(k)}\ \ F_2^{(k)}\ \ F_3^{(k)}\,]^T$ и $\bar{f}_k = [\,f_1^{(k)}\ \ f_2^{(k)}\ \ f_3^{(k)}\,]^T$ – векторы составляющих нагрузок, действующих соответственно внутри и на границе области Ω_k; $\bar{\nu}_k = [\,\nu_1^{(k)}\ \ \nu_2^{(k)}\ \ \nu_3^{(k)}\,]^T$ – вектор составляющих нормали к границе $\Gamma_k = \partial\Omega_k$; $\partial_i = \partial/\partial x_i$; $\partial_i^* = -\partial_i$, $i = 1,\ 2$;

$$\theta_k(x) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_k; \\ 0, & x \notin \Omega_k; \end{cases} \quad \delta_{\Gamma,k} = \frac{\partial\theta_k}{\partial\nu_k}; \quad \bar{\lambda}_k = \theta_k\lambda_k; \quad \bar{\mu}_k = \theta_k\mu_k; \tag{5}$$

2.2. Второй этап.

Выполняется дискретизация операторных коэффициентов на основе соответствующих им функционалов. В результате имеем дискретно-континуальную расчетную модель, представляющую из себя ансамбль дискретно-континуальных конечных элементов, причем на каждом дискретно-континуальном конечном элементе искомые функции по «неосновным» координатным направлениям аппроксимируются, как правило, полиномами, а в основном направлении их вид остается искомым. Иными словами, неизвестные функции фактически определяются своим поведением на ребрах дискретно-континуального конечного элемента.

При расчете трехмерной конструкции (в рамках модели трехмерной задачи теории упругости) имеем систему из $6N_1N_2$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями

$$\left(\overline{U}_n^{(k)}\right)'(x_3) = A_k\overline{U}_n^{(k)}(x_3) + \tilde{\overline{R}}_k(x_3), \quad x_3 \in \left(x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b\right), \quad k=1,\ldots,n_k-1; \quad (6)$$

$$B_k^-\overline{U}_n^{(k-1)}\left(x_{3,k}^b - 0\right) + B_k^+\overline{U}_n^{(k)}\left(x_{3,k}^b + 0\right) = \overline{g}_k^- + \overline{g}_k^+, \quad k=2,\ldots n_k-1;; \quad (7)$$

$$B_1^+\overline{U}_n^{(1)}\left(x_{3,1}^b + 0\right) + B_{n_k}^-\overline{U}_n^{(n_k-1)}\left(x_{3,n_k}^b - 0\right) = \overline{g}_1^+ + \overline{g}_{n_k}^-, \quad (8)$$

где B_k^-, B_k^+, $k=2, ..., n_k-1$ и B_1^+, $B_{n_k}^-$ – заданные матрицы коэффициентов граничных условий, квадратные $6N_1N_2$-го порядка; $\overline{g}_k^-$, $\overline{g}_k^+$, $k=2, ..., n_k-1$ и $\overline{g}_1^+$, $\overline{g}_{n_k}^-$ – заданные $6N_1N_2$-мерные векторы правых частей граничных условий;

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & E \\ K_{k,vv}^{-1}K_{k,uu} & K_{k,vv}^{-1}\tilde{K}_{k,uv} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\overline{R}}_k(x_3) = -\begin{bmatrix} 0 \\ K_{k,vv}^{-1}\overline{R}_{k,u} \end{bmatrix}; \quad (9)$$

$$L_{k,uu} \Rightarrow K_{k,uu}; \quad \tilde{L}_{k,uv} \Rightarrow \tilde{K}_{k,uv}; \quad L_{k,vv} \Rightarrow K_{k,vv}; \quad (10)$$

$$\overline{U}_n^{(k)} = \overline{U}_n^{(k)}(x_3) = \left[\left(\overline{u}_n^{(k)}\right)^T \quad \left(\overline{v}_n^{(k)}\right)^T\right]^T; \quad \left(\overline{U}_n^{(k)}\right)' = \partial_3\overline{U}_n^{(k)}; \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\overline{u}_k = \overline{u}_k(x_3) = \Big[&\left(\overline{u}_n^{(k,1,1)}\right)^T \quad \left(\overline{u}_n^{(k,2,1)}\right)^T \quad \ldots \quad \left(\overline{u}_n^{(k,N_1,1)}\right)^T \ldots \\ &\ldots \quad \left(\overline{u}_n^{(k,1,2)}\right)^T \quad \left(\overline{u}_n^{(k,2,2)}\right)^T \quad \ldots \quad \left(\overline{u}_n^{(k,N_1,2)}\right)^T \ldots \\ &\ldots \quad \left(\overline{u}_n^{(k,1,N_2)}\right)^T \quad \left(\overline{u}_n^{(k,2,N_2)}\right)^T \quad \ldots \quad \left(\overline{u}_n^{(k,N_1,N_2)}\right)^T\Big]^T;\end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned}\overline{v}_k = \overline{v}_k(x_3) = \Big[&\left(\overline{v}_n^{(k,1,1)}\right)^T \quad \left(\overline{v}_n^{(k,2,1)}\right)^T \quad \ldots \quad \left(\overline{v}_n^{(k,N_1,1)}\right)^T \quad \ldots \\ &\ldots \quad \left(\overline{v}_n^{(k,1,2)}\right)^T \quad \left(\overline{v}_n^{(k,2,2)}\right)^T \quad \ldots \quad \left(\overline{v}_n^{(k,N_1,2)}\right)^T \quad \ldots \\ &\ldots \quad \left(\overline{v}_n^{(k,1,N_2)}\right)^T \quad \left(\overline{v}_n^{(k,2,N_2)}\right)^T \quad \ldots \quad \left(\overline{v}_n^{(k,N_1,N_2)}\right)^T\Big]^T;\end{aligned} \quad (13)$$

$$\overline{u}_n^{(k,p,q)} = \overline{u}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} u_1^{(k,p,q)} \\ u_2^{(k,p,q)} \\ u_3^{(k,p,q)} \end{bmatrix}; \quad \overline{v}_n^{(k,p,q)} = \overline{v}_n^{(k,p,q)}(x_3) = \begin{bmatrix} v_1^{(k,p,q)} \\ v_2^{(k,p,q)} \\ v_3^{(k,p,q)} \end{bmatrix}; \quad (14)$$

$$\begin{aligned}\overline{R}_{k,u} = \overline{R}_{k,u}(x_3) = \Big[&\left(\overline{R}_{u,n}^{(k,1,1)}\right)^T \quad \left(\overline{R}_{u,n}^{(k,2,1)}\right)^T \quad \ldots \quad \left(\overline{R}_{u,n}^{(k,N_1,1)}\right)^T \quad \ldots \\ &\ldots \quad \left(\overline{R}_{u,n}^{(k,1,2)}\right)^T \quad \left(\overline{R}_{u,n}^{(k,2,2)}\right)^T \quad \ldots \quad \left(\overline{R}_{u,n}^{(k,N_1,2)}\right)^T \quad \ldots \\ &\ldots \quad \left(\overline{R}_{u,n}^{(k,1,N_2)}\right)^T \quad \left(\overline{R}_{u,n}^{(k,1,N_2)}\right)^T \quad \ldots \quad \left(\overline{R}_{u,n}^{(k,N_1,N_2)}\right)^T\Big]^T;\end{aligned} \quad (15)$$

$$\overline{R}_{u,n}^{(p,q,k)} = \overline{R}_{u,n}^{(p,q,k)}(x_3) = \left[R_{u,1}^{(p,q,k)} \quad R_{u,2}^{(p,q,k)} \quad R_{u,3}^{(p,q,k)} \right]^T; \qquad (16)$$

$N_1 - 1$ и $N_2 - 1$ – количество дискретно-континуальных конечных элементов по направлению осей, соответствующих переменным x_1, x_2; $u_{1,n}^{(k,p,q)}$, $u_{2,n}^{(k,p,q)}$, $u_{3,n}^{(k,p,q)}$ и $v_{1,n}^{(k,p,q)}$, $v_{2,n}^{(k,p,q)}$, $v_{3,n}^{(k,p,q)}$ – узловые неизвестные (составляющие перемещений $u_1^{(k)}$, $u_2^{(k)}$, $u_3^{(k)}$ на (p, q)-м узле и их производные $v_1^{(k)}$, $v_2^{(k)}$, $v_3^{(k)}$ по x_3 на интервале $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$; $R_{u,1}^{(k,p,q)}$, $R_{u,2}^{(k,p,q)}$, $R_{u,3}^{(k,p,q)}$ – значения узловых нагрузок, приложенных в (p, q)-м узле по направлению осей, соответствующих x_1, x_2, x_3 на интервале $x_3 \in (x_{3,k}^b, x_{3,k+1}^b)$.

Таким образом, в общем случае выполняется переход к многоточечной краевой задачи для системы, состоящей из нескольких тысяч (для многомерных задач) обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с кусочно-постоянными коэффициентами, сопровождаемый, как правило, введением дополнительных неизвестных. Разрешающая многоточечная краевая задача в общем случае имеет следующий вид

$$\overline{y}_k'(x) = A_k \overline{y}_k(x) + \overline{f}_k(x); \qquad (17)$$

$$B_k^- \, \overline{y}\left(x_k^b - 0\right) + B_k^+ \, \overline{y}\left(x_k^b + 0\right) = \overline{g}_k^- + \overline{g}_k^+, \quad k=2, ..., n_k - 1; \qquad (18)$$

$$B_1^+ \, \overline{y}\left(x_1^b + 0\right) + B_{n_k}^- \, \overline{y}\left(x_{n_k}^b - 0\right) = \overline{g}_1^+ + \overline{g}_{n_k}^-, \qquad (19)$$

где x – переменная соответствующая основному направлению; x_k^b, $k = 1, \ldots n_k$ – координаты точек задания граничных условий (общее количество граничных условий $n_k - 1$); $\overline{y}_k(x)$ – искомая n-мерная вектор-функция на интервале $x \in (x_k^b, x_{k+1}^b)$; A_k и $\overline{f}_k(x)$ – соответственно матрица постоянных коэффициентов n-го порядка и n-мерная вектор-функция правых частей на интервале $x \in (x_k^b, x_{k+1}^b)$.

2.3. Третий этап.

Выполняется корректное построение точного аналитического решения разрешающих систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Заметим, что все сложности реализации дискретно-континуальных методов определяются характерными специфическими особенностями этих систем.

Прежде всего, важен фактор количества рассматриваемых дифференциальных уравнений. В рамках известных традиционных методов Л.В.Канторовича, В.З.Власова и метода прямых [5] можно решить систему, насчитывающую очень небольшое число обыкновенных дифференциальных уравнений, и даже это зачастую требует зачастую привлечения ряда специальных мер (ограничение длины конструкции и проч.). Указанные методы вообще изначально были ориентированы их разработчиками исключительно на ручной счет. Так, например, выбор базисных функций в них чаще всего не предполагает никакой дискретизации. Кроме того, эти базисные функции далеко не всегда, а особенно в практических задачах, удается подобрать таким образом, чтобы они удовлетворяли соответствующей части заданных граничных условий. При решении же трехмерных задач с использованием ДКМКЭ число уравнений достигает нескольких тысяч, и все традиционно применяемые подходы для аналитического решения таких систем оказывались несостоятельными. В связи с отмеченным выше практически все исследователи ищут не точное аналитическое решение в виде формулы со слагаемыми экспоненциального типа, а строят решение с помощью разложений в ряды (методы Л.В.Канторовича и В.З.Власова, метод конечных полос), использований сплайн-функций (метод конечных полос) и т.д. [5,11-13].

Стандартные полуаналитические подходы очень плохо справляются с учетом сосредоточенных нагрузок и нагрузок, распределенных на небольших участках. Между тем расчет на такие нагрузки является наиболее важным для большинства строительных конструкций. Не менее критичны в этом же смысле и граничные условия: либо они несостоятельны, либо для их адекватного учета требуется некоторый специальный вид таких условий, не имеющий места в общем случае. Точность и сходимость решений, получаемых по таким методам, часто сильно зависит от вида выбираемых базисных функций для аппроксимации неизвестных, а также от количества учитываемых членов ряда. Сходимость же в зонах краевых эффектов, сосредоточенных факторов, концентраций напряжений и деформаций (т.е. в наиболее ответственных зонах) весьма медленная и слабо зависит от числа учитываемых членов ряда Фурье. И даже, например, если сходимость для перемещений относительно высока, для деформаций, напряжений и внутренних усилий она много меньше. Данный факт отчасти объясняется известным в теории рядов эффектом Гиббса [14], способам борьбы с которым посвящено достаточно много работ как отечественных, так и зарубежных специалистов. Отмеченные недостатки стандартных методов следуют из математической сути задачи, эти слабые места достаточно подробно указываются в обзорных статьях и монографиях [15].

Вычислительная специфика при решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений (6) определяется матрицами с постоянными коэффициентами. Решение, его корректность и эффективность зависят от спектра. Здесь следует отметить, что для большинства задач строительной механики спектр матрицы A_k имеет следующие особенности:

– наличие собственных значений с действительными частями разных знаков;
– «жесткость» системы, т.е. отношение максимального собственного числа матрицы A_k к минимальному (по модулю) является большим числом,

$$|\lambda_{k,\max}|/|\lambda_{k,\min}| \geq M_k, \quad \text{где } M_k \text{ – большое число;} \tag{20}$$

– в спектральном разложении матрицы A_k присутствуют жордановы клетки неединичного порядка и присоединенные (корневые) вектора, при этом они соответствуют нулевым собственным значениям;
– жордановы клетки неединичного порядка имеют конечный вид и практически не зависят от густоты сетки дискретно-континуальных конечных элементов, аппроксимирующих «поперечное» сечение конструкции, число жордановых клеток неединичного порядка небольшое.

Итак, спектральное разложение матрицы A_k имеет вид

$$A_k = T_k J_k T_k^{-1}, \tag{21}$$

где T_k – невырожденная матрица n-го порядка, столбцами которой являются собственные и корневые (присоединенные) векторы матрицы A_k;

$$J_k = \begin{bmatrix} J_{k,1} & & & \\ & J_{k,2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_{k,u_k} \end{bmatrix}; \quad J_{k,p} = \begin{bmatrix} \lambda_{k,p} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{k,p} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{k,p} \end{bmatrix}; \qquad (22)$$

J_k – матрица Жордана n-го порядка для матрицы A_k; $J_{k,p}$ – жорданова клетка, соответствующая собственному значению $\lambda_{k,p}$; u_k – количество различных собственных значений матрицы A_k; $\dim J_{k,p} = m_{k,p}$.

Традиционный подход, рекомендуемый в неспециальной математической литературе и публикациях, посвященных строительной механике, фактически сразу предлагает искать решение системы типа (ниже $\bar{y}(x)$ – искомая n-мерная вектор-функция; A и $\bar{f}(x)$ – соответственно матрица постоянных коэффициентов n-го порядка и n-мерная вектор-функция правых частей)

$$\bar{y}'(x) = A\bar{y}(x) + \bar{f}(x), \qquad (23)$$

в следующем виде:

$$\bar{y}(x) = \exp(Ax)\bar{y}(0) + \int_0^x \exp\left(A(x-\xi)\right)\bar{f}(\xi)\,d\xi. \qquad (24)$$

Функция от матрицы в (24) вычисляется по известным правилам, причем

$$\exp(Ax) = T\exp(Jx)T^{-1}, \qquad (25)$$

где T – невырожденная матрица n-го порядка, столбцами которой являются собственные и корневые (присоединенные) векторы матрицы A; J – матрица Жордана n-го порядка для матрицы A [16,17].

Решение типа (22) в первую очередь ориентируются на задачи Коши. Для случаев, когда исходные уравнения имеют эллиптический тип, (22) является, по сути, решением по методу начальных параметров или начальных функций. Несмотря на наличие в некотором ограниченном числе задач решений по формуле (22), в общем случае данная формула практически нереализуема. Это связано с тем обстоятельством, что в решении (22) всегда имеются функции вида $\exp(\lambda x)$, где $\lambda > 0$, причем величина λx достигает значительных величин (например, $12 < \lambda x < 300$). Реализация таких функций на ЭВМ является «вычислительной катастрофой». Следует отметить, что чем точнее аппроксимация по неосновным направлениям, тем большие значения принимает величина λx.

Системы (16), как указывалось, являются жесткими. В частности, отсюда вытекает характер решения вблизи границ (краевой эффект) и в зонах приложения сосредоточенных нагрузок. Таким образом, часть составляющих решения системы является быстроизменяющимися, а часть меняется медленно. Как следствие, никакой дискретный подход, например использующий сплайны, не в состоянии уловить все компоненты решения одновременно и его асимптотику. Важным параметром является также и протяженность рассматриваемой конструкции. Как было показано выше, если, например, она значительна, то становятся неработоспособными те методы, где на каком-либо этапе используются гиперболические функции. Часто решение систем (16) ведется либо некорректными методами, зачастую не учитывающими специфику строительных задач (например, метод начальных параметров), либо используются методы, не позволяющие получить аналитическое решение (методы типа прогонки, ортогональной прогонки и другие [5], причем метод ортогональной прогонки сопряжен с большим объемом вычислений и неоправданным усилением (ортогонализацией и нормировкой) исчезающих по длине факторов)).

В литературе жесткие системы, безусловно, исследуются [18], но в основном при решении задач Коши и, как правило, для систем дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от аргумента. В нашем случае цель состояла именно в получении аналитического решения при постоянных коэффициентах, что является характерным для большинства задач расчета типовых строительных конструкций.

Важной особенностью при построении решения в форме (22) является необходимость вычисления жордановых клеток и присоединенных векторов. Эта задача также является некорректной, необходимое для ее решения математическое и программное обеспечение в общем случае отсутствует. В литературе по линейной алгебре [17] доказывается, что не может существовать ни одного численно устойчивого универсального способа вычисления жордановых канонических форм. Данное обстоятельство можно преодолеть путем возмущения матрицы, но при этом возникает проблема адекватного выбора параметров возмущения и, кроме того, теряется аналитический характер получаемого решения.

Суть предложенного, в частности, в [6,8,9] подхода описана ниже.

Строится фундаментальная матрица-функция, свертка с которой является оператором, обратным к исходному дифференциальному. Для этой цели исходная матрица A_k коэффициентов системы представляется в виде следующей суммы

$$A_k = A_{k,+} + A_{k,-} + A_{k,0}\,; \tag{26}$$

$$A_{k,+} = P_{k,+}A_k; \quad A_{k,-} = P_{k,-}A_k; \quad A_{k,0} = P_{k,0}A_k = A_k - A_{k,+} - A_{k,-}, \tag{27}$$

где $P_{k,+}$ – проектор на подпространство, отвечающее собственным векторам, соответствующим ненулевым собственным значениям с неотрицательными действительными частями; $P_{k,-}$ – проектор на подпространство, отвечающее собственным векторам, соответствующим ненулевым собственным значениям с отрицательными действительными частями; $P_{k,0}$ – проектор на подпространство, отвечающее собственным и присоединенным векторам, соответствующим нулевым собственным значениям;

$$P_{k,+} = T_{k,+}\left(\tilde{T}_{k,+}T_{k,+}\right)^{-1}\tilde{T}_{k,+}; \; P_{k,-} = T_{k,-}\left(\tilde{T}_{k,-}T_{k,-}\right)^{-1}\tilde{T}_{k,-}; \; P_{k,0} = E - P_{k,+} - P_{k,-}, \tag{28}$$

$T_{k,+}$ и $\tilde{T}_{k,+}$ – соответственно матрицы размерности $n_k \times n_{k,+}$ и $n_{k,+} \times n_k$, содержащие правые и левые собственные векторы, соответствующие ненулевым собственным значениям матрицы A_k с неотрицательными действительными частями; $T_{k,-}, \tilde{T}_{k,-}$ – соответственно матрицы размерности $n_k \times n_{k,-}$ и $n_{k,-} \times n_k$, содержащие правые и левые собственные векторы, соответствующие ненулевым собственным значениям матрицы A_k с неотрицательными действительными частями; E – единичная матрица соответствующего порядка; $n_{k,+}$ и $n_{k,-}$ – соответственно количество ненулевых собственных значений с неотрицательными и отрицательными действительными частями.

Заметим, что матрицы $\tilde{T}_{k,+}$ и $\tilde{T}_{k,-}$ предлагается определять из решения левой проблемы собственных значений для матрицы A_k (учитывается тот факт, что, как следует из сказанного выше, практически невозможно на практике построить матрицы и в разложении (19) при наличии в матрице J_k жордановых клеток неединичного порядка). Левая проблема собственных значений матрицы A_k, как известно, сводится к (правой) проблеме собственных матрицы A_k^T. Отметим, что после решения проблем собственных значений для матриц A_k и A_k^T следует провести такую сортировку их собственных значений (и соответственно собственных векторов), чтобы сначала нумеровались все ненулевые собственные значения. Сопутствующие преобразования определяются формулами (знак $\Rightarrow$ условно обозначает операцию присваивания)

$$\tilde{T}_{k,+} \;\Rightarrow\; \left(\tilde{T}_{k,+}T_{k,+}\right)^{-1}\tilde{T}_{k,+}, \qquad \tilde{T}_{k,-} \;\Rightarrow\; \left(\tilde{T}_{k,-}T_{k,-}\right)^{-1}\tilde{T}_{k,-}. \tag{29}$$

Подчеркнем, что проектор $P_{k,0}$ не нуждается в специальном построении. Он элементарно находится как разность единичной матрицы соответствующего порядка с парой проекторов $P_{k,+}$ и $P_{k,-}$, которым он ортогонален.

Предлагаемые процедуры также облегчают применение метода стандартной области [10], связанное с наличием дискретно-континуальных элементов нулевой жесткости.

Соответствующие фундаментальные матрицы-функции для систем (16) могут быть представлены в следующем виде

$$\varepsilon_k(x) = T_{k,1}\tilde{\varepsilon}_{k,0}(x)\tilde{T}_{k,1} + \chi(x,0)\left[P_{k,0} + \sum_{k=1}^{m_{k,\max}-1}\frac{x^k}{k!}A_{k,0}^k\right], \tag{30}$$

где $m_{k,\max} = \max\limits_{I\le i\le u} m_{k,i}$, причем величина $m_{k,\max}$ конечна и небольшая;

$$\chi(x,\lambda_{k,p}) = \begin{cases} \chi(x), & \mathrm{Re}(\lambda_{k,p}) \le 0; \\ -\chi(-x), & \mathrm{Re}(\lambda_{k,p}) > 0; \end{cases} \tag{31}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{k,0}(x) = \mathrm{diag}\left\{\chi(x,\lambda_{k,1})\exp(\lambda_{k,1}x), \quad \ldots, \quad \chi(x,\lambda_{k,i})\exp(\lambda_{k,i}x)\right\}; \tag{32}$$

$$T_{k,1} = \begin{bmatrix} T_{k,+} & T_{k,-} \end{bmatrix}; \quad \tilde{T}_{k,1} = \begin{bmatrix} \tilde{T}_{k,+}^T & \tilde{T}_{k,-}^T \end{bmatrix}^T; \tag{33}$$

$l_k = n_{k,+} + n_{k,-}$ – число ненулевых собственных значений матрицы A_k; $x_+ = \chi(x)\cdot x$.

В приведенном выражении для фундаментальных матриц-функций нет компонент типа $\exp(\lambda x)$, где $\lambda x > 0$. Следует особо отметить, что такие представления основаны на том, что из свойств задач строительной механики вытекает, что все жордановы клетки неединичного порядка соответствуют нулевым собственным значениям, являются нильпотентными, т.е. их некоторая степень приводит к нулевым клеткам.

Вектор-функция решение задачи (17)-(19) на интервале $x \in (x_k^b, x_{k+1}^b)$, обозначается $\bar{y}_k(x)$ и определяется формулой

$$\bar{y}_k(x) = \left(\varepsilon\left(x - x_k^b\right) - \varepsilon\left(x - x_{k+1}^b\right)\right)\bar{C}_k + \varepsilon(x) * \bar{f}_k(x), \quad x \in \left(x_k^b, x_{k+1}^b\right), \tag{34}$$

где $\bar{C}_k$ – вектор постоянных коэффициентов n-го порядка, определяемых из условий (18)-(19); $*$ – символ, обозначающий операцию свертки;

$$\overline{f}_k\left(x\right) \equiv f\left(x\right)\theta\left(x, x_k^b, x_{k+1}^b\right); \quad \theta\left(x, x_k^b, x_{k+1}^b\right) = \begin{cases} 1, & x \in \left(x_k^b, x_{k+1}^b\right); \\ 0, & x \notin \left(x_k^b, x_{k+1}^b\right). \end{cases} \tag{35}$$

Общий вид решения (34) является корректным при любых условиях и свободным от всех недостатков, присущих, например, методам типа начальных параметров. Методы типа начальных параметров применимы с практической точки зрения, главным образом, только лишь при расчете балок и пространственных стержней при отсутствии упругого основания.

Прямое или точное решение многоточечных краевых задач строительной механики для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в литературе (выполнен анализ более 600 публикаций, в том числе обзорных статей, см., например, [15]) не приводится. По-видимому, главную роль в этом сыграли перечисленные особенности подобных задач. Отметим, что эти особенности характерны именно для строительных задач (расчеты конструкций, зданий, сооружений) и, может быть, по этой причине они не являлись предметом широкого исследования в математике, хотя решением близких проблем в значительной степени занимались в МГУ им.М.В.Ломоносова, в том числе в научных школах М.В.Келдыша, А.Г.Костюченко [19], Б.М.Левитана, А.А.Шкаликова [20-24] и др. Однако в работах перечисленных ученых исследовались в основном качественные вопросы (существование, единственность и т.д.), тогда как проблемы численной реализации практически не затрагивались. А.Б.Золотовым и П.А.Акимовым реализован устойчивый алгоритм аналитического решения при любом числе неизвестных в корректной для вычислений форме, который является основой для построения программных комплексов промышленного типа.

В целом, представляется, что в дальнейшем ДКМКЭ послужат надежной основой и для их дальнейшей «коммерциализации», проводимой по двум направлениям:

- создание, апробация и внедрение в практику самодостаточных исследовательских программных комплексов;
- «встраивание» в качестве эффективных альтернативных блоков в передовые отечественные конечно/суперэлементные программные комплексы, интенсивно эксплуатируемые при расчетном обосновании типовых и уникальных строительных конструкций, зданий и сооружений мегаполисов на стадиях их проектирования и эксплуатации-мониторинга (данное направление реализуется в рамках исследований О. А. Негрозова [9,25,26], он также занимается развитием библиотеки дискретно-континуальных конечных элементов, совершенствованием алгоритмов сеточной аппроксимации моделируемых строительных конструкций (в том числе с использованием нерегулярных аппроксимирующих сеток).

3. СУТЬ ВЕЙВЕЛЕТ-РЕАЛИЗАЦИИ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ЛОКАЛЬНОГО РАСЧЕТА КОНСТРУКЦИЙ

Характерными особенностями развития строительного комплекса в последние годы являются значительный рост числа домов, возводимых по индивидуальным проектам с применением нестандартных строительных материалов и оригинальных конструктивных решений, обусловленных реальными условиями и пожеланиями заказчика, а также увеличивающийся объем работ, связанный с переделкой и реконструкцией существующих зданий и сооружений, в том числе и по результатам мониторинга строительных объектов. Для недопущения аварийных ситуаций необходимо подтверждать принимаемые конструктивные решения надлежащими расчетами. Современные численные (прежде всего, метод конечных элементов (МКЭ)) и численно-аналитические методы позволяют моделировать поведение сложных строительных объектов в целом, что может привести на практике к вычислительным схемам исключительно большой размерности. Вместе с тем, квалифицированному расчетчику известно, что наиболее опасным с точки зрения прочности является напряженно-деформированное состояние (НДС) в относительно небольшом числе локальных зон конструкций, причем расположение этих зон, как правило, известно заранее. К последним следует отнести зоны краевого эффекта, т.е. разного рода углы, трещины, щели, места контактов и связей различных конструктивных элементов, места локальных изменений, обусловленных реконструкцией объекта (например, пробивка новых проходов, снос опор, усиления и т.д.) и др. Таким образом, возникает задача разработки, исследования и развития методов локального высокоточного расчета строительных конструкций, тем более актуальная, с позиции того, что корректная локализация расчетного обоснования позволяет существенно сократить количество неизвестных. Вейвлет-анализ [27-30], позволяющий всесторонне оценить влияние различных с точки зрения локализации факторов, является здесь весьма эффективным инструментарием. Предметом исследований П. А. Акимова, М. Л. Мозгалевой, М. Аслами и О. А. Негрозова в настоящее время, в частности, является применение аппарата вейвлет-анализа для корректного численно-аналитического расчета и анализа работы конструкций на основе использования и развития ДКМКЭ [32-35]. В качестве простейшего вейвлетного базиса здесь применяются дискретные базисы Хаара.

Одномерный дискретный базис Хаара на отрезке $[a,\ b]$ имеет вид

$$\psi_j^p(i)=\alpha_p^{-1}\begin{cases}1, & 2^{p+1}(j-1)\le i<2^p(2j-1);\\ -1, & 2^p(2j-1)\le i<2^{p+1}j\\ 0, & i<2^{p+1}(j-1)\ \cup\ i\ge 2^{p+1}j,\end{cases}\qquad i=1,2,\ldots n,\ 0\le p<M; \quad (36)$$

$$\psi_1^M(i)=\alpha_M^{-1},\quad i=1,2,\ \ldots n, \quad (37)$$

где $\psi_j^p(i)$ – j-я функция Хаара уровня p, определенная в точках разбиения отрезка $x_i=a+(i-1)h$, $i=1,2,\ldots n$ ($h=(b-a)/(n-1)$); $n=2^M$ – количество частей, на которые разбивается отрезок (M – некоторое целое число).

Двумерный дискретный базис Хаара на прямоугольной области

$$\Omega=\{(x_1,x_2):\quad 0\le x_1\le l_1,\quad 0\le x_2\le l_2\}$$

определяется следующими формулами

$$\psi_{s_1,s_2,j_1,j_2}^p(i_1,i_2)=\alpha_p^{-1}\begin{cases}(-1)^{k_1s_1+k_2s_2}, & \bigcap\limits_{q=1}^{2}\bigcup\limits_{k_q=0}^{1}\begin{pmatrix}2^{p+1}(j_q-1+k_q/2)<i_q\wedge\\ \wedge i_q\le 2^{p+1}(j_q-1/2+k_q/2)\end{pmatrix},\\ 0, & \text{в остальных случаях}\end{cases} \quad (38)$$

$$i_1=1,2,\ldots n;\quad i_2=1,\ 2,\ldots n;\quad 0\le p<M;$$

$$\psi_{0,0,1,1}^{M}\left(i_1,i_2\right)=\alpha_M^{-1},\qquad i_1=1,2,\ldots n;\quad i_2=1,2,\ldots n, \tag{39}$$

где $\psi_{s_1,s_2,j_1,j_2}^{p}(i_1,i_2)$ – функция Хаара, определенная в узлах равномерной сетки, аппроксимирующей область Ω с координатами $x_{1,i}=(i_1-1)h_1$, $i_1=1,\ 2,\ ...,\ n$, $x_{2,i}=(i_2-1)h_2$, $i_2=1,\ 2,\ ...,\ n$; $s_1=0,\ 1$, $s_2=0,\ 1$ (причем недопустим случай $s_1=\ s_2=0$); $n=2^M$ (M – некоторое целое число);

$$N_p=\begin{cases} n/2^{p+1}=2^{M-(p+1)}, & 0\le p<M;\\ 1, & p=M;\end{cases}\qquad \alpha_p=\begin{cases}\sqrt{2^{p+1}}, & 0\le p<M;\\ \sqrt{2^M}=\sqrt{n}, & p=M.\end{cases} \tag{40}$$

В [6] рассмотрены корректные быстрые алгоритмы вейвлет-преобразований по одномерному и двумерному базисам Хаара, корректные алгоритмы осреднения функций, разложенных по одномерному и двумерному дискретному базису Хаара, а также корректные алгоритмы многоуровневых аппроксимаций функций, разложенных по одномерному и двумерному дискретному базису Хаара.

В одномерном случае произвольная функция f, определенная в точках разбиения рассматриваемого отрезка, может быть разложена в ряд Хаара

$$f(i)=\sum_{p=0}^{M}\sum_{j=1}^{N_p}v_j^p\psi_j^p(i), \tag{41}$$

где v_j^p, $j=1,2,\ldots N_p$, $p=1,2,\ldots M$ – коэффициенты разложения функции $f(i)$ по базису Хаара, определяемые как скалярное произведение

$$v_j^p=\left(\overline{f},\overline{\psi}_j^p\right)=\sum_{i=1}^{n}f\left(i\right)\psi_j^p\left(i\right),\quad j=1,2,\ldots N_p,\quad p=1,2,\ldots M; \tag{42}$$

$$\overline{f}=\left[\,f\left(1\right)\quad f\left(2\right)\quad\ldots\quad f\left(n\right)\right]^T;\quad \overline{\psi}_j^p=[\ \psi_j^p(1)\quad \psi_j^p(2)\quad ...\quad \psi_j^p(n)\ ]^T. \tag{43}$$

Формулу (42) можно переписать в матрично-векторном виде

$$\overline{v}=DQ^0\overline{f}, \tag{44}$$

где Q^0 – матрица ненормированных базисных функций Хаара (т.е. функций вида (38), (39), но у которых отсутствует деление соответственно на α_p для формулы (38) и α_M для (39)), записанных по строкам; D – диагональная матрица, на главной диагонали которой располагаются величины α_p, $p=1,2,\ldots M$; $\overline{v}$ – вектор, составленных из искомых коэффициентов разложения функции $f(i)$ по базису Хаара (36), (37).

При осреднении на некотором уровне q для всех $p=1,\ 2,\ ...,\ q$ имеем

$$\left(Du^p\right)_{2j-1}\approx\left(Du^p\right)_{2j}\approx\left(D\tilde{u}^p\right)_{2j-1},\quad v_{2j-1}^p=v_{2j}^p,\quad j=1,\ 2,\ ...,\ N_{p+1}, \tag{45}$$

$$\left(D\tilde{u}^p\right)_{2j-1}=\left(\tilde{u}_{2j}^p-\tilde{u}_{2j-1}^p\right)/\left(2^{p+1}h\right);\quad \left(Du^p\right)_{2j-1}=\left(u_{2j}^p-u_{2j-1}^p\right)/\left(2^{p+1}h\right); \tag{46}$$

Следовательно, формулы осреднения могут быть записаны в виде

$$v_{2j-1}^p=v_{2j}^p=\beta v_j^{p+1},\quad j=1,\ 2,\ ...,\ N_{p+1},\quad \text{где}\quad \beta=1/\left(2\sqrt{2}\right). \tag{47}$$

Матрично-векторная форма записи алгоритма осреднения

$$\overline{v}^k=R_k\overline{v}^{k+1},\quad \text{где}\quad R_k=\overline{\beta}\otimes I_{N_{k+1}},\quad \overline{\beta}=\beta\left[1\quad 1\right]^T, \tag{48}$$

где R_k – матрица рекуррентного перехода на k-й уровень; I_n – единичная матрица n-го порядка; $\otimes$ – обозначение операции прямого произведения.

При необходимости осреднения на некотором уровне q имеем

$$\overline{v}^{p} = W_{p}\overline{v}^{q+1}, \quad p = 0,1,2,\ldots q, \tag{49}$$

где W_p – матрица рекуррентного перехода на k-й уровень,

$$W_p = \prod_{s=p}^{q} R_s \quad \text{или} \quad W_p = \overline{\beta}_{p,q} \otimes I_{N_{p+1}}, \quad \overline{\beta}_{p,q} = \beta^{q-p+1}\overline{e}_{q+1}; \tag{50}$$

$\overline{e}_{q+1}$ – вектор размерности N_{q+1}, составленный из единиц.

В двумерном случае для произвольной функции $f(i_1,i_2)$, определенной в узлах рассмотренной выше прямоугольной сетки, будем иметь

$$\begin{gathered} f\left(i_1,i_2\right) = \sum_{p=0}^{M-1}\sum_{j_1=1}^{N_p}\sum_{j_2=1}^{N_p}\Big[v^p_{1,0,j_1,j_2}\psi^p_{1,0,j_1,j_2}\left(i_1,i_2\right) + v^p_{0,1,j_1,j_2}\psi^p_{0,1,j_1,j_2}\left(i_1,i_2\right) + \\ + v^p_{1,1,j_1,j_2}\psi^p_{1,1,j_1,j_2}\left(i_1,i_2\right)\Big] + v^p_0\psi^p_{0,0,1,1}, \end{gathered} \tag{51}$$

где $v^p_{1,0,j_1,j_2}$, $v^p_{0,1,j_1,j_2}$, $v^p_{1,1,j_1,j_2}$, $j_1 = 1,\ 2,\ ...,\ N_p$, $j_2 = 1,\ 2,\ ...,\ N_p$, $p = 1,\ 2,\ ...,\ M-1$ – коэффициенты разложения функции $f(i_1,i_2)$ по дискретному базису Хаара,

$$\begin{gathered} v^p_{s_1,s_2,j_1,j_2} = \left(\overline{f},\overline{\psi}^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}\right) = \sum_{i_1=1}^{N}\sum_{i_2=1}^{N} f\left(i_1,i_2\right)\overline{\psi}^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}\left(i_1,i_2\right), \\ s_1 = 0,1, \quad s_2 = 0,1, \quad j_1 = 1,2,\ldots N_p, \quad j_2 = 1,2,\ldots N_p,\ldots p = 1,2,\ldots M; \end{gathered} \tag{52}$$

$$\overline{f} = \left[\, f\left(1,1\right)\ldots\ f\left(1,n\right)\ f\left(2,1\right)\ldots\ f\left(2,n\right)\ldots\ f\left(n,1\right)\ldots\ f\left(n,n\right)\right]^T; \tag{53}$$

$$\begin{gathered} \overline{\psi}^p_{s_1,s_2,j_1,j_2} = \Big[\psi^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}\left(1,1\right)\ldots\psi^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}\left(1,n\right) \\ \psi^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}\left(2,1\right)\ldots\psi^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}\left(2,n\right)\ldots\psi^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}\left(n,1\right)\ldots\psi^p_{s_1,s_2,j_1,j_2}\left(n,n\right)\Big]^T \end{gathered} \tag{54}$$

Матрично-векторный вид формулы (52) следующий

$$\overline{v} = DQ^0\overline{f}, \tag{55}$$

где Q^0 – матрица ненормированных базисных функций Хаара, записанных по строкам; D – диагональная матрица, на главной диагонали которой располагаются величины α_p, $p = 1,2,\ldots M$; $\overline{v}$ – вектор, составленных из искомых коэффициентов коэффициенты разложения функции $f(i_1,i_2)$ по базису Хаара.

При осреднении на некотором уровне q для всех $p = 1,2,\ldots q$ имеем (ниже $s_1 = 0,\ 1$; $s_2 = 0,\ 1$ (кроме $s_1 = s_2 = 0$); $j_1 = 1,2,\ldots N_p$; $j_2 = 1,2,\ldots N_p$)

$$\begin{gathered} \left(D_1u^p\right)_{2j_1-1,2j_2-1} = \left(D_1u^p\right)_{2j_1-1,2j_2} = \\ = \left(D_1u^p\right)_{2j_1,2j_2-1} = \left(D_1u^p\right)_{2j_1,2j_2} \approx \left(D_1\tilde{u}^p\right)_{2j_1-1,2j_2-1}; \end{gathered} \tag{56}$$

$$\begin{gathered} \left(D_2u^p\right)_{2j_1-1,2j_2-1} = \left(D_2u^p\right)_{2j_1-1,2j_2} = \\ = \left(D_2u^p\right)_{2j_1,2j_2-1} = \left(D_2u^p\right)_{2j_1,2j_2} \approx \left(D_2\tilde{u}^p\right)_{2j_1-1,2j_2-1}; \end{gathered} \tag{57}$$

$$\begin{gathered} \left(D_2^+D_1^+u^p\right)_{2j_1-1,2j_2-1} = \left(D_2^+D_1^+u^p\right)_{2j_1-1,2j_2} = \\ = \left(D_2^+D_1^+u^p\right)_{2j_1,2j_2-1} = \left(D_2^+D_1^+u^p\right)_{2j_1,2j_2} \approx \left(D_2^+D_1^+\tilde{u}^p\right)_{2j_1-1,2j_2-1}; \end{gathered} \tag{58}$$

$$v^p_{s_1,s_2,2j_1-1,2j_2-1} = v^p_{s_1,s_2,2j_1,2j_2-1} = v^p_{s_1,s_2,2j_1-1,2j_2} = v^p_{s_1,s_2,2j_1,2j_2}\,. \tag{59}$$

Следовательно, формулы осреднения могут быть записаны в виде

$$v^p_{s_1,s_2,2j_1-1,2j_2-1} = v^p_{s_1,s_2,2j_1,2j_2-1} = v^p_{s_1,s_2,2j_1-1,2j_2} = v^p_{s_1,s_2,2j_1,2j_2} = \beta_{s_1,s_2} v^{p+1}_{s_1,s_2,j_1,j_2}\,, \tag{60}$$

$$\beta_{1,0} = 0.25; \quad \beta_{0,1} = 0.25; \quad \beta_{1,1} = 0.125. \tag{61}$$

Матрично-векторная форма записи алгоритма осреднения

$$\overline{v}^k = R_k \overline{v}^{k+1}; \tag{62}$$

$$R_k = \beta^G \otimes I_{N^2_{k+1}}; \quad \beta^G = \beta \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T; \quad \beta = \mathrm{diag}\left\{\beta_{1,0}, \beta_{0,1}, \beta_{1,1}\right\}; \tag{63}$$

При необходимости осреднения на некотором уровне q имеем

$$\overline{v}^p = W_p \overline{v}^{q+1}, \quad p = 0,1,2,\ldots q, \tag{64}$$

$$W_p = \prod_{s=p}^{q} R_s \quad \text{или} \quad W_p = \beta^G_{p,q} \otimes I_{N^2_{p+1}}; \quad \beta^G_{p,q} = \beta^{q-p+1} \otimes \overline{e}_{q+1}; \tag{65}$$

$\overline{e}_{q+1}$ – вектор, составленный из единиц, размерности N^2_{q+1}.

После перехода в (6)-(8) к дискретному двумерному базису Хаара по переменным x_1 и x_2, реализации процедур редукции и осреднения получим соответствующую редуцированную постановку многоточечной краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\overline{V}'_k = A_k \overline{V}_k + \overline{\tilde{F}}_k, \quad x_3 \in \left(x^b_{3,k}, x^b_{3,k+1}\right), \quad k = 1,\ldots n_k - 1; \tag{66}$$

$$\tilde{B}^-_k \overline{V}_{k-1}\left(x^b_{3,k} - 0\right) + \tilde{B}^+_k \overline{V}_k\left(x^b_{3,k} + 0\right) = \overline{\tilde{g}}^-_k + \overline{\tilde{g}}^+_k, \quad k = 2,\ldots n_k - 1; \tag{67}$$

$$\tilde{B}^+_1 \overline{V}_1\left(x^b_{3,1} + 0\right) + \tilde{B}^-_{n_k} \overline{V}_{n_k-1}\left(x^b_{3,n_k} - 0\right) = \overline{\tilde{g}}^+_1 + \overline{\tilde{g}}^-_{n_k}, \tag{68}$$

где A_k – матрица размером $2(N^{(k)}_{red,1} + N^{(k)}_{red,2} + N^{(k)}_{red,3}) \times 2(N^{(k)}_{red,1} + N^{(k)}_{red,2} + N^{(k)}_{red,3})$; $\overline{V}_k$ и $\overline{\tilde{F}}_k$ – векторы размером $2(N^{(k)}_{red,1} + N^{(k)}_{red,2} + N^{(k)}_{red,3})$; $\tilde{B}^-_k$, $\tilde{B}^+_k$ – прямоугольные матрицы размером $6N_1N_2 \times 2(N^{(k-1)}_{red,1} + N^{(k-1)}_{red,2} + N^{(k-1)}_{red,3})$ и $6N_1N_2 \times 2(N^{(k)}_{red,1} + N^{(k)}_{red,2} + N^{(k)}_{red,3})$ соответственно,

$$\overline{U}^{(k)}_n\left(x_3\right) = S_{b,k} \overline{V}_k\left(x_3\right); \quad S_{b,k} = \begin{bmatrix} S_k & 0 \\ 0 & S_k \end{bmatrix}; \quad S_k = P^T_{12} Q_b R_{b,k}; \tag{69}$$

$$R_{b,k} = \begin{bmatrix} R_{k,1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{k,2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{k,3} \end{bmatrix}; \quad Q_b = \begin{bmatrix} Q & 0 & 0 \\ 0 & Q & 0 \\ 0 & 0 & Q \end{bmatrix}; \tag{70}$$

$$\overline{w}^{(k)}_i\left(x_3\right) = R_{k,i} \overline{w}^{(k),red}_i\left(x_3\right), \quad i = 1,\ 2,\ 3;$$

$$P_{12} \overline{u}^{(k)}_n\left(x_3\right) = \begin{bmatrix} \overline{u}^{(k)}_{1,n}\left(x_3\right) \\ \overline{u}^{(k)}_{2,n}\left(x_3\right) \\ \overline{u}^{(k)}_{3,n}\left(x_3\right) \end{bmatrix}, \quad k = 1,2,\ldots n_k - 1; \tag{71}$$

$$\overline{u}^{(k)}_i\left(x_2\right) = \left\{u^{(k)}_i\left(x^{(p,q)}_1, x^{(p,q)}_2, x_3\right)\right\}_{\substack{p=1,\ 2,\ \ldots,\ N_1 \\ q=1,\ 2,\ \ldots,\ N_2}}, \quad i = 1,2,3, \quad x_3 \in \left(x^b_{3,k}, x^b_{3,k+1}\right); \tag{72}$$

$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & E_k \\ A^{-1}_{k,2,s} \tilde{A}_{k,1,s} & A^{-1}_{k,2,s} A_{k,0,s} \end{bmatrix}; \quad \overline{\tilde{F}}_k = -\begin{bmatrix} 0 \\ A^{-1}_{k,2,s} \overline{b}_{k,s} \end{bmatrix}; \quad \overline{V}'_k = \partial_3 \overline{V}_k; \tag{73}$$

$$A_{k,2,s} = S_k^T A_{k,vv} S_k; \quad \tilde{A}_{k,1,s} = S_k^T \tilde{A}_{k,uv} S_k; \quad A_{k,0,s} = S_k^T A_{k,uu} S_k; \quad \overline{b}_{k,s} = S_k^T \overline{b}_k; \tag{74}$$

$$\overline{t}_k^{red} = \partial_3 \overline{w}_k^{red}, \quad k=1,\ldots n_k - 1; \quad \overline{b}_k = K_{k,vv}^{-1} \overline{R}_{k,u}; \tag{75}$$

$$\tilde{B}_k^- = B_k^- S_{b,k}, \quad k=2,\ldots,n_k; \quad \tilde{B}_k^+ = B_k^- S_{b,k}, \quad k=1,\ldots,n_k - 1. \tag{76}$$

Далее для точного аналитического решения многоточечных краевых задач строительной механики типа (66)-(68) может быть использована методика, описанная во втором пункте настоящей статьи.

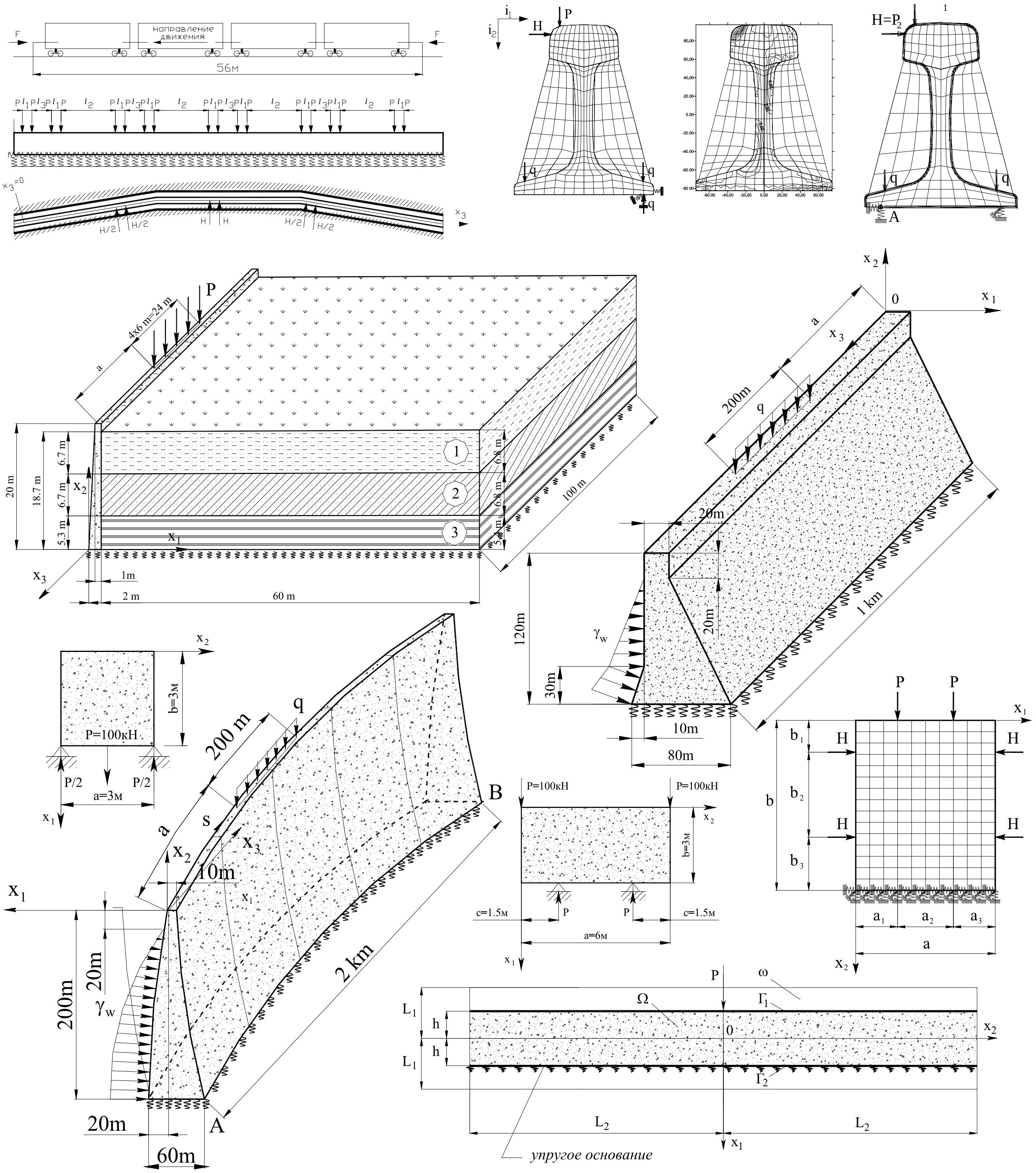

Рис.1. Некоторые примеры решенных двумерных и трехмерных задач.

4. СВЕДЕНИЯ О ВЕРИФИКАЦИИ И АПРОБАЦИИ МЕТОДОВ

Рассмотренные выше дискретно-континуальные методы верифицированы и апробированы на широком спектре модельных, тестовых и практически важных задач многоуровневого расчета конструкций (рис.1).

Построено реализующее программно-алгоритмическое обеспечение, актуальные модули которого предназначены для функционирования под управлением операционных систем Microsoft Windows 8/8.1 (зарегистрированы в установленном порядке в федеральном государственном бюджетном учреждении «Федеральный институт промышленной собственности» (см., например, [36,37])). Программирование вычислительных алгоритмов проводилось на языке Fortran стандарта Fortran 90/95, использовалась среда разработки приложений Microsoft Visual Studio, компилятор Intel Visual Fortran 13.0.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обеспечение безопасности зданий, сооружений и комплексов неразрывно связано с качественным и количественным многоуровневым анализом напряженно-деформированного состояния строительных конструкций, раздельным исследованием глобальных и локальных расчетных факторов. Как известно, многие дефекты и разрушения носят локальный характер, тогда как несущая способность, связанная с состоянием предельного равновесия, определяется глобальным поведением строительного объекта.

Вместе с тем, в практических приложениях зачастую не требуется определять решение во всех точках рассматриваемой конструкции, интерес представляют конкретные локальные (в частности, наиболее опасные с точки зрения прочности) зоны, как правило, известные заранее. В настоящей статье были представлены корректные дискретно-континуальные методы многоуровневого расчета строительных конструкций, основанные в том числе на использовании аппарата кратномасштабного вейвлет-анализа. Областью применения указанных методов являются строительные конструкции, у которых имеется регулярность (постоянство или кусочное постоянство) физико-геометрических параметров (характеристик) по одному из координатных направлений (балки, балки-стенки, тонкостенные стрежни, полосы, длинные фундаменты, плиты, пластины, оболочки, высотные и протяженные здания, трубопроводы, плотины, рельсы, резервуары и т.д.; см., например, рис.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Fish J., Belytschko T.* A First course in finite elements. – John Wiley & Sons Ltd, 2007. – 344 p.
2. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The finite element method for solid and structural mechanics. Seventh edition. – Butterworth-Heinemann, 2014. – 624 p.
3. *Перельмутер А.В., Сливкер В.И.* Расчетные модели сооружений и возможности их анализа. – Киев: Сталь, 2002. – 445 с.
4. *Белостоцкий А.М.* Численное моделирование статического и динамического напряженно-деформированного состояния пространственных систем

«сооружение – основание – водохранилище» с учетом нелинейных эффектов открытия – закрытия швов и макротрещин / Дис. на соиск. учен. степ. д-ра техн. наук: 05.23.07. – М.: МГУП, 1998. – 367 с.

5. *Постнов В.А.* Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 280 с.
6. *Акимов П.А., Мозгалева М.Л.* Многоуровневые дискретные и дискретно-континуальные методы локального расчета строительных конструкций. – М.: МГСУ, 2014. – 632 с.
7. *Сидоров В.Н., Золотов А.Б., Акимов П.А., Мозгалева М.Л.* Дискретно-континуальный метод конечных элементов для расчета строительных конструкций, зданий, сооружений // Известия ВУЗов. Строительство.– 2004. – №10. – С.8-14.
8. *Akimov P.A.* Correct discrete-continual finite element method of structural analysis based on precise analytical solutions of resulting multipoint boundary problems for systems of ordinary differential equations // Applied Mechanics and Materials. – 2012. – Vols.204-208. – P.4502-4505.
9. *Akimov P.A., Belostotskiy A.M., Mozgaleva M.L., Mojtaba Aslami, Negrozov O.A.* Correct multilevel discrete-continual finite element method of structural analysis // Advanced Materials Research. – 2014. – Vol.1040. – P.664-669.
10. *Золотов А.Б.* Постановка и алгоритмы численного решения краевых задач строительной механики методом стандартной области / Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. – М.: МИСИ им. В.В. Куйбышева, 1989. – 284 с.
11. *Ляхович Л.С., Мулик Е.И.* Смешанная форма метода конечных полос. – Томск: Изд-во Томского ун-та, 1983. – С.114-119.
12. *Мулик Е.И.* Расчет регулярных пластинчатых систем методом конечных полос в смешанной форме / Дис. на соиск. уч.степ.к.т.н: 01.02.03. – Томск, 1984. – 137 с.
13. *Cheung Y.K., Tham L.G.* A review of the finite strip method // Progress in Structural Engineering and Materials. – 2000. – Vol.2. – Iss.3. – P.369-375.
14. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961. – 524 с.
15. *Christov C.T., Petrova L.* Comparison of some variants of the finite strip method for analysis of complex shell structures // Proceedings of the IKM. – Weimar, 2000. – 6 p.
16. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. – М.: Мир, 2001. – 430 с.
17. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.
18. *Федоренко Р. П.* Введение в вычислительную физику. – М.: Изд-во Московского физико-технического института, 1994. – 528 с.
19. *Костюченко А.Г., Оразов М.Б.* Задача о колебаниях упругого полуцилиндра и связанные с ней самосопряженные квадратичные пучки // Труды семинара им. И.Г. Петровского, т.6. – М.: Изд-во МГУ, 1981. – С.97-146.
20. *Шкаликов А.А.* Задача об установившихся колебаниях трансверсально изотропного полуцилиндра со свободной границей // Функциональный анализ и его приложения. – 1991. – Т.17. – №2. – С.86-89.

21. *Шкаликов А.А.* К спектральной теории пучков операторов и разрешимости операторно-дифференциальных уравнений / Дис. на соискание уч. ст. докт. физ.-матем. наук. – М.: МГУ, 1985. – 111 с.
22. *Шкаликов А.А.* Некоторые вопросы теории полиномиальных операторных пучков // Успехи математических наук. – 1983. – Т.38. – №3. – С.189-190.
23. *Шкаликов А.А.* Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними // Труды семинара им.И.Г.Петровского. – 1989. – Т.14. – С.140-224.
24. *Шкаликов А.А., Шкред А.В.* Задача об установившихся колебаниях трансверсально-изотропного полуцилиндра // Математический сборник. – 1991. – Т.182. – №3. – С.1222-1246.
25. *Akimov P.A., Negrozov O.A.* On the use of discrete-continual finite element method with unstructured meshes // Procedia Engineering. – 2015. – Vol.111. – P.8-13.
26. *Akimov P.A., Negrozov O.A.* On the use of discrete-continual finite elements with triangular cross-section for semianalytical structural analysis // Procedia Engineering. – 2015. – Vol.111. – P.14-19.
27. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
28. *Burrus C.S., Gopinath R.A., Guo H.* Introduction to wavelets and wavelet transforms. – NJ: Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, 1998. – 282 p.
29. *Акимов П.А., Мозгалева М.Л.* Некоторые элементы кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 1: Понятие о вейвлетах и кратномасштабном вейвлет-анализе // Вестник МГСУ. – 2012. – №7. – С.44-50.
30. *Акимов П.А., Мозгалева М.Л.* Некоторые элементы кратномасштабного вейвлет-анализа. Часть 2: Анализ и синтез // Вестник МГСУ. – 2012. – №8. – С.60-65.
31. *Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.* Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения двумерных задач расчета конструкций // Intern. J. for Computational Civil and Structural Engineering. – 2014. – Vol.10. – Iss.2. – P.29-37.
32. *Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.* Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения трехмерных задач расчета конструкций // Intern. J. for Computational Civil and Structural Engineering. – 2014. – Vol.10. – Iss.2. – P.38-46.
33. *Акимов П.А., Мозгалева М.Л., Сидоров В.Н., Моджтаба Аслами, Негрозов О.А.* Усовершенствованная вейвлет-реализация дискретно-континуального метода конечных элементов для локального решения задач расчета тонких пластин // Intern. J. for Computational Civil and Structural Engineering. – 2014. – Vol.10. – Iss.2. – P.47-55.
34. *Akimov P.A., Mozgaleva M.L.* Correct wavelet-based multilevel discrete-continual methods for local solution of boundary problems of structural analysis // Applied Mechanics and Materials. – 2013. – Vols.353-356. – P.3224-3227.
35. *Mozgaleva M.L., Akimov P.A.* Multilevel Wavelet-based Numerical Method of Local Structural Analysis for Three-dimensional Problem // Procedia Engineering. – 2015. – Vol.111. – P.569-574.

36. *Мозгалева М.Л.* Программа для ЭВМ ELASTIC_3D. Внесена в Реестр программ для ЭВМ, регистрационный №2015617058 от 29.06.2015.
37. *Мозгалева М.Л.* Программа для ЭВМ Программа для ЭВМ PLANE. Внесена в Реестр программ для ЭВМ, регистрационный №_2015617315 от 07.07.2015.

Поступила в редакцию 5 октября 2015 года.

Сведения об авторах:

Акимов Павел Алексеевич – д.т.н., чл.-корр. РААСН, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, Россия; e-mail: akimov@raasn.ru

Мозгалева Марина Леонидовна – к.т.н., проф., Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия; e-mail: marina.mozgaleva@gmail.com

Аслами Моджтаба – асп., Кафедра информатики и прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет, г. Москва, Россия; e-mail: aslami.mojtaba@gmail.com

Негрозов Олег Александрович – асп., Кафедра информатики и прикладной математики, Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет; Российская академия архитектуры и строительных наук, г. Москва, Россия; e-mail: genromgsu@gmail.com