

## РЕШЕНИЕ ДВАЖДЫ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ТРУБОК ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ В РЕЖИМЕ СВЕРХУПРУГОСТИ<sup>1</sup>

Саганов Е.Б.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия*

### РЕЗЮМЕ

В работе решена дважды связанная задача кручения тонкостенных трубок из сплава с памятью формы (СПФ), широко применяемых в составе демфирующих устройств при сейсмических воздействиях, а также в качестве рабочего тела торсионных актуаторов в авиационно-космических системах. Рассмотрение задачи ведется в рамках нелинейной модели деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. Проведенное численное моделирование, с учетом выделения/поглощения латентного тепла термоупругого фазового мартенситного превращения и диссипативных свойств СПФ, а также конвективного теплообмена с окружающей средой, позволило получить кривые сверхупругости (безразмерные напряжения - полные деформации), а также графические зависимости безразмерного параметра температуры от объемной доли мартенситной фазы для различных величин скорости нагружения и коэффициента теплообмена с окружающей средой.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы; кручение; сверхупругость; латентное тепло; тонкостенные трубки

## SOLUTION DOUBLE COUPLED PROBLEM OF TORSION OF THIN- WALLED TUBES FROM SHAPE MEMORY ALLOY IN THE MODE OF SUPERELASTICITY

Saganov E.B.

*Moscow aviation institute (national research center), Moscow, Russia*

### SUMMARY

In this paper the double coupled problem of torsion of thin-walled tubes from shape memory alloy (SMA) is widely used in damping devices at the seismic influences, as well as working body torsional actuators in aerospace systems is solved. Consideration of the problem is carried out in the framework of non-linear model of straining of SMA in phase and structure transition. The numerical simulation, considering separation/absorption of latent heat of thermoelastic phase martensitic transformation and dissipative properties of SMA, as well as convective heat transfer to the environment, possible to obtain superelasticity curves (dimensionless stresses – total deformation), and graphic dependences of a dimensionless parameter of temperature from the volume fraction of the martensite phase for any values of the loading rate and heat transfer coefficient with the environment.

**Key words:** shape memory alloys; torsion, superelasticity; latent heat; thin-walled tubes

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, проект № 14-01-00189.

## ВВЕДЕНИЕ

Сплавы с памятью формы [1] обладают целым рядом уникальных термомеханических свойств, примером которых служит явление сверхупругости [2]. Пусть образец из СПФ находится в аустенитном фазовом состоянии при температуре выше температуры окончания обратного мартенситного превращения и нагружается монотонно возрастающим напряжением. Сначала образец будет деформироваться упруго. При достижении некоторого значения напряжений за счет инициации прямого мартенситного превращения (ПМП) начнется резкий рост нелинейных (фазово-структурных) деформаций, величина которых на порядок превышает упругие деформации. Если в некоторый момент нагружения прекратить рост напряжений и начать их уменьшать, то сначала деформации будут уменьшаться по линейному закону. При достижении некоторой величины напряжений, начнется резкое, нелинейное уменьшение деформаций, за счет протекания обратного мартенситного превращения (ОМП). По завершении этого этапа, образец из СПФ не обладает фазово-структурными деформациями, и дальнейшее уменьшение напряжений приводит к упругой разгрузке с аустенитным модулем. Использование описанного выше явления сверхупругости, позволяет создавать устройства, обладающие способностью к рассеиванию энергии [3], а также применять СПФ в качестве активных элементов управления [4].

Изучению явления сверхупругости на примере кручения тонкостенных трубок из СПФ посвящена работа [5]. Рассмотрение задачи ведется в рамках модели [6]. В [7] в рамках модели [8,9] предложен полуаналитический подход к изучению поведения трубок и стрежней из СПФ при кручении в режиме сверхупругости. В [10] в рамках той же модели изучается влияние скорости нагружения на термомеханический отклик трубок из СПФ при кручении и кручении совместно с растяжением. В работах [11-13], в рамках моделей [14-16] соответственно, выполнено численное моделирование поведения тонкостенных трубок из СПФ при совместном действии растяжения и кручения. В [17] в рамках моделей [18,19], интегрированных в коммерческие пакеты конечно-элементного анализа, проведено моделирование поведения трубок и стрежней из СПФ при кручении в режиме сверхупругости. Экспериментальному исследованию явления сверхупругости посвящены работы [20-24].

Задачи о прямых и обратных фазовых переходах в элементах из СПФ в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [25-29], в однократно связной постановке [30], решались в [31-36].

В данной работе в рамках той же модели [25-29], в дважды связной постановке [30], получено решение задачи кручения тонкостенных трубок из СПФ в режиме сверхупругости. Выполнено численное моделирование, учитывающее выделение/поглощение латентного тепла во время протекания термоупругого фазового мартенситного превращения, диссипативные эффекты, а также конвективный теплообмен с окружающей средой, для различных величин скорости нагружения и коэффициента теплообмена с окружающей средой.

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ ТОНКОСТЕННЫХ ТРУБОК ИЗ СПФ

Рассмотрение задачи ведется в полярной системе координат. При этом предполагается, что толщина трубки достаточно мала и напряжения

распределены по ее толщине равномерно. Так, при кручении тонкостенных трубок, касательные напряжения и упругая крутка определяются на основе следующих соотношений

$$\tau_{z\varphi} = \frac{M_{кр}}{2\pi R^2 \delta} \quad (1.1)$$

$$\theta = \frac{M_{кр}}{2\pi R^3 G \delta} \quad (1.2)$$

Здесь  $M_{кр}$  – внешний крутящий момент,  $G$  – модуль сдвига,  $R, \delta$  – радиус и толщина трубки соответственно.

Решение задачи выполнено в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [25-29]. При этом предполагается аддитивное представление девиатора деформаций

$$\varepsilon_{ij}' = \varepsilon_{ij}^{e'} + \varepsilon_{ij}^{phst'} \quad (1.3)$$

В случае кручения отличной от нуля будет только деформация сдвига. Тогда уравнение (1.3) переписывается в следующем виде

$$\gamma = \gamma^e + \gamma^{phst} \quad (1.4)$$

Здесь  $\gamma^e$  – упругая деформация

$$\gamma^e = \frac{\tau}{G(q)}, \quad \frac{1}{G(q)} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A} \quad (1.5)$$

где  $G_{A,M}$  – модуль сдвига аустенитной и мартенситной фазы соответственно.

Приращение неупругой деформации  $d\gamma^{phst}$  вычисляется на основе следующего соотношения

$$d\gamma^{phst} = d\gamma^{ph} + d\gamma^{st} \quad (1.6)$$

Учитывая, что  $\sigma_i = \sqrt{3}\tau$ , приращение фазовых деформаций при прямом превращении  $dq > 0$  определяется по формуле

$$d\gamma^{ph} = \sqrt{3}\omega^+ dq, \quad \omega^+ = \rho_d (1 - qf(q)) F_1(\sqrt{3}\tau) + f(q) \frac{\gamma^{phst}}{\sqrt{3}} \quad (1.7)$$

При обратном превращении  $dq < 0$

$$d\gamma^{ph} = \sqrt{3}\omega^- dq, \quad \omega^- = \frac{\gamma^{phst}}{\sqrt{3}q} \quad (1.8)$$

Приращение структурных деформаций, как при прямом, так и при обратном превращении равно

$$d\gamma^{st} = 3\rho_d q F_2'(\sqrt{3}\tau) d\tau \quad \text{при } d\tau > 0 \text{ и } \tau \geq \tau^{\max} \quad (1.9)$$

иначе  $d\gamma^{st} = 0$ .

Здесь  $q$  – параметр фазового состава, трактуемый как объемная доля мартенситной фазы,  $\rho_d$  – интенсивность кристаллографической деформации фазового превращения,  $F_1(\sqrt{3}\tau), F_2(\sqrt{3}\tau)$  – функции распределения интенсивности микронапряжений в аустенитном и мартенситном состоянии соответственно, штрих у функции  $F_2$  обозначает производную,  $f(q)$  – материальная функция определяющая вклад в приращение фазовой деформации процессов зарождения и развития мартенситных элементов.

В ходе протекания термоупругих фазовых мартенситных превращений температура трубки из СПФ изменяется из-за следующих факторов: выделения/поглощения латентного тепла фазового перехода, механической диссипации и теплообмена с окружающей средой. Для определения актуальной температуры трубки используется уравнение энергетического баланса, которое в общем случае имеет следующий вид [37-39]

$$k_{\sigma} \Delta T = C_{\sigma} \dot{T} + T \alpha \dot{\sigma}_{kk} - (\Delta U_0 + \sigma_{kk} \varepsilon_0 / 3 + \omega_{ij} \sigma'_{ij}) \dot{q} - \rho_d q F'_2(\sigma_i) \sigma_i \dot{\sigma}_i \quad (1.10)$$

Здесь  $k_{\sigma}$  – коэффициент теплопроводности,  $\Delta$  – оператор Лапласа,  $T$  – текущая температура трубки,  $\alpha$  – коэффициент линейного температурного расширения,  $\sigma_{kk}$  – первый инвариант тензора напряжений,  $\varepsilon_0$  – линейная деформация объемного эффекта реакции ПМП,  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений,  $\Delta U_0$  – скачек объемной плотности внутренней энергии при переходе от мартенситного состояния к аустенитному,  $C_{\sigma}$  – теплоемкость единицы объема при постоянном напряжении. Точка обозначает производную по времени.

## 2. РЕШЕНИЕ ДВАЖДЫ СВЯЗАННОЙ ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ В РЕЖИМЕ СВЕРХУПРУГОСТИ

В случае деформирования в режиме сверхупругости тонкостенная трубка из СПФ изначально находится в аустенитном фазовом состоянии, при температуре выше или равной температуре окончания обратного мартенситного превращения. При первоначальном нагружении внешним крутящим моментом трубка будет деформироваться упруго с аустенитным модулем. По достижению некоторой величины напряжений в трубке из СПФ, в ней инициируется вызванное ростом напряжений прямое мартенситное превращение. При этом нелинейно растут деформации, а также выделяется латентное тепло фазового перехода, увеличивая температуру трубки, что несколько снижает скорость протекания прямого фазового перехода. Одновременно с этим происходит конвективный теплообмен [40] между трубкой и окружающей средой. Варьируя коэффициент теплопередачи можно моделировать свободную либо вынужденную конвекцию, как в воздухе, так и в воде или иной среде. После завершения ПМП (весь материал трубки находится в мартенситном фазовом состоянии) следует упругая разгрузка, до тех пор пока снижение напряжений не приведет к инициации ОМП. При этом снимаются неупругие фазово-структурные деформации, и поглощается латентное тепло фазового перехода. После завершения обратного мартенситного превращения весь материал трубки находится в аустенитном фазовом состоянии, и дальнейшая разгрузка происходит линейно.

В данном разделе предполагается, что толщина трубки достаточно мала и температура распределена по ее толщине равномерно, то есть градиент температур отсутствует. Учитывая вышеизложенное, а также пренебрегая объемными деформациями и напряжениями, уравнению (1.10) можно придать следующий вид

$$C_{\sigma} \dot{T} - (\Delta U_0 + \omega_{ij} \sigma'_{ij}) \dot{q} - \rho_d q F'_2(\sigma_i) \sigma_i \dot{\sigma}_i = 0 \quad (2.1)$$

В простейшем варианте в уравнение (2.1) не входят слагаемые, учитывающие механическую диссипацию, связанную как с фазовым переходом, так и со структурным превращением. Учитывая это, уравнение (2.1) можно переписать в следующем виде

$$C_{\sigma} \dot{T} - \Delta U_0 \dot{q} = 0 \quad (2.2)$$

Дальнейшая конкретизация уравнения (2.2) требует формулировки выражения для параметра фазового состава  $q$ . Кроме этого в уравнение (2.1) необходимо добавить слагаемое, связанное с теплообменом с окружающей средой.

В простейшем случае параметр фазового состава  $q$  может быть определен на основе линейных зависимостей параметра фазового состава от температуры и характерных температур фазовых переходов от интенсивности напряжений [41].

$$q = \frac{M_s^{\sigma} - T}{M_s^0 - M_f^0}, \text{ при } dq > 0 \text{ и } q = \frac{A_f^{\sigma} - T}{A_f^0 - A_s^0} \text{ при } dq < 0 \quad (2.3)$$

$$M_{s,f}^{\sigma} = M_{s,f}^0 + k\sigma_i = M_{s,f}^0 + \sqrt{3}k\tau \quad (2.4)$$

$$A_{s,f}^{\sigma} = A_{s,f}^0 + k\sigma_i = A_{s,f}^0 + \sqrt{3}k\tau \quad (2.5)$$

Здесь  $M_s, M_f, A_s, A_f$  – температуры начала и окончания прямого/обратного мартенситного превращения, верхний индекс 0 соответствует случаю отсутствия напряжений,  $\sigma$  – наличию напряжений,  $k$  – коэффициент влияния действующих напряжений на температуры фазовых переходов.

Дифференцируя (2.3) для случая прямого мартенситного превращения с учетом (2.4) можно получить

$$\dot{q} = \frac{\sqrt{3}k\dot{\tau} - \dot{T}}{M_s^0 - M_f^0} \quad (2.6)$$

Подставляя (2.6) в (2.1), а также вводя в уравнение энергетического баланса слагаемое, связанное с конвективным теплообменом с окружающей средой [40] получим

$$C_{\sigma} \dot{T} - \delta_1 U_0 (\sqrt{3}k\dot{\tau} - \dot{T}) + H_{\infty} \Delta T = 0 \quad (2.7)$$

$$\delta_1 U_0 = \frac{\Delta U_0}{M_s^0 - M_f^0}, \quad H_{\infty} = h_{\infty} / \delta \quad (2.8)$$

Здесь  $h_{\infty}$  – коэффициент теплопередачи,  $\Delta T = T - T_{окр}$  – разность температур между трубкой из СПФ и окружающей средой,  $T_{окр}$  – температура окружающей среды, которая считается неизменной.

Предполагается, что напряжения связаны со временем, следующим соотношением

$$\tau = \lambda t, \quad \dot{\tau} = \lambda dt \quad (2.9)$$

Здесь  $\lambda$  – скорость нагружения.

Подставляя (2.9) в соотношение (2.7), и разрешая это дифференциальное уравнение относительно приращения температуры получим

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\sqrt{3}\delta_1 U_0 k \lambda - H_{\infty} \Delta T}{D_u} \quad (2.10)$$

$$D_u = C_{\sigma} + \delta_1 U_0 \quad (2.11)$$

Решение уравнения (2.10) находится при начальном условии  $T(0) = T_{окр}$  и имеет следующий вид

$$T(t) = T_{окр} + A(1 - \exp(-t/B)) \quad (2.12)$$

$$A = \sqrt{3}H_{\infty}^{-1}\delta_1 U_0 k \lambda \quad (2.13)$$

$$B = H_{\infty}^{-1}D_u \quad (2.14)$$

При упругой мартенситной разгрузке  $\dot{q} = 0$ , поэтому уравнение энергетического баланса запишется в следующем виде

$$\frac{dT}{dt} = -F_c (T - T_{direct}) \quad (2.15)$$

$$F_c = H_{\infty} / C_{\sigma} \quad (2.16)$$

Уравнения (2.15) разрешается при начальном условии  $T(0) = T_{direct}$ , где  $T_{direct}$  – температура трубки, при которой завершилось прямое мартенситное превращение. При разгрузке температура трубки определяется на основе соотношения, приведенного ниже

$$T(t) = T_{окр} + \exp(-F_c t)(T_{direct} - T_{окр}) \quad (2.17)$$

В случае обратного мартенситного превращения для определения температуры трубки справедлив блок уравнений (2.12-2.14), за тем отличием, что скорость нагружения становится величиной отрицательной (разгрузка). В качестве начального условия будет выступать условие  $T(0) = T_{unload}$ , где  $T_{unload}$  – температура после упругой мартенситной разгрузки.

Совокупность соотношений (2.3-2.16) в дальнейшем в работе будем называть первой моделью.

В качестве второй модели рассматривается случай, когда влияние внешних напряжений на характерные температуры фазовых переходов имеет нелинейную зависимость [37-39] и выражается в следующем виде

$$M_{s,f}^{\sigma} = M_{s,f}^0 + \frac{\sqrt{3}\tau\omega^+}{\Delta S}, \quad A_{s,f}^{\sigma} = A_{s,f}^0 + \frac{\sqrt{3}\tau\omega^-}{\Delta S} \quad (2.18)$$

где  $\Delta S$  – скачок объемной плотности энтропии при переходе от мартенситного состояния к аустенитному, а  $\omega^+$  и  $\omega^-$  определяются на основе соотношений (1.7), (1.8) соответственно. При этом величина объемной доли мартенситной фазы вычисляется согласно уравнению (2.3).

Производя те же действия, что и в случае с первой моделью, уравнению энергетического баланса на случай прямого мартенситного превращения можно придать следующий вид

$$\frac{dT}{dt} = \frac{U_1 \left( \sqrt{3}\lambda\rho_d \left( 1 - \exp(\lambda_1 t) - \sqrt{3}\lambda_1 t \exp(\lambda_1 t) \right) \right) - H_{\infty}\Delta T}{D_u} \quad (2.19)$$

$$U_1 = \delta_1 U_0 / \Delta S, \quad \lambda_1 = -\sqrt{3}\lambda / \sigma_0 \quad (2.20)$$

Начальное условие для решения (2.19) остается прежним:  $T(0) = T_{окр}$ . При упругой мартенситной разгрузке справедливо уравнение (2.17), как для модели номер два, так и для последующих.

На случай обратного мартенситного превращения приращение температуры находится в соответствии со следующим соотношением при начальном условии  $T(0) = T_{unload}$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{U_2 \gamma_0^{phst} \lambda - H_{\infty}(T - T_{unload})}{R_u} \quad (2.21)$$

$$\delta_2 U_0 = \frac{\Delta U_0}{A_f^0 - A_s^0}, U_2 = \delta_2 U_0 / \Delta S, R_u = C_\sigma + \delta_2 U_0 \quad (2.22)$$

В третьей модели параметр фазового состава вычисляется на основе соотношения предложенного в [42]

$$q = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi t_\sigma)) \quad (2.23)$$

где

$$t_\sigma = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}, \text{ при } dq > 0 \text{ и } t_\sigma = \frac{A_f^\sigma - T}{A_f^0 - A_s^0} \text{ при } dq < 0 \quad (2.24)$$

При этом в уравнении энергетического баланса не учитываются диссипативные слагаемые. Начальные условия для вычисления приращения температуры остаются неизменными. Так на случай прямого фазового перехода уравнение энергетического баланса принимает следующий вид

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\Delta U_0 \beta A \lambda - H_\infty (T - T_{окр})}{(C_\sigma + \Delta U_0 \beta \Delta S)} \quad (2.25)$$

Здесь

$$\beta = \frac{\pi \sqrt{q(1-q)}}{\Delta S (M_s^0 - M_f^0)} \quad (2.26)$$

$$A = \sqrt{3} \rho_d (1 - \exp(\lambda_1 t) - \sqrt{3} \lambda_1 t \exp(\lambda_1 t)) \quad (2.27)$$

В случае обратного фазового перехода

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\Delta U_0 \beta_1 \gamma_0^{phst} \lambda - H_\infty (T - T_{unload})}{(C_\sigma + \Delta U_0 \beta_1 \Delta S)} \quad (2.28)$$

где

$$\beta_1 = \frac{\pi \sqrt{q(1-q)}}{\Delta S (A_f^0 - A_s^0)} \quad (2.29)$$

Четвертая модель в отличие от третьей учитывает диссипативные слагаемые в уравнении энергетического баланса. Таким образом, на случай прямого мартенситного превращения приращение температуры может быть определено из уравнения, приведенного ниже

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(\Delta U_0 + \rho_d \sqrt{3} \lambda t (1 - \exp(\lambda_1 t))) \beta A \lambda + Z - H_\infty (T - T_{окр})}{C_\sigma + (\Delta U_0 + \rho_d \sqrt{3} \lambda t (1 - \exp(\lambda_1 t))) \beta \Delta S} \quad (2.30)$$

$$Z = 6 \rho_d q \lambda_1^2 t^2 \exp(-\lambda_1^2 t^2) \lambda \quad (2.31)$$

где  $\beta$  и  $A$  определяются на основе (2.26) и (2.27) соответственно.

Для случая обратного мартенситного превращения

$$\frac{dT}{dt} = \frac{(\Delta U_0 + \gamma_0^{phst} \lambda t) \beta_1 \gamma_0^{phst} \lambda - H_\infty \Delta T}{C_\sigma + (\Delta U_0 + \gamma_0^{phst} \tau) \beta_1 \Delta S} \quad (2.32)$$

Здесь  $\beta_1$  вычисляется на основе (2.29).

Общий алгоритм решения задачи сверхупругости при кручении тонкостенных трубок из СПФ следующий. Изначально решается упругая задача кручения. При этом материал трубки находится в аустенитном фазовом состоянии

при температуре окружающей среды и фазового перехода не происходит. Напряжение, при котором начнется прямое мартенситное превращение, определяется из следующего соотношения

$$T = M_s^\sigma \quad (2.33)$$

Здесь  $T$  – температура трубки, а в качестве выражения для  $M_s^\sigma$  можно использовать соотношения (2.4) или (2.18) в зависимости от использованной при решении модели. Далее находится упругая деформация (1.5), соответствующая данной величине напряжений. После следует цикл прямого мартенситного превращения. Производится малый шаг по напряжениям. Используя соотношение (2.9) определяется промежуток времени, за который достигнута новая величина напряжений. Далее находится новое значение температуры трубки на основе соотношений (2.12-2.14), (2.19-2.20), (2.25-2.27) либо (2.30). Зная новую температуру трубки, находится величина параметра фазового состава (2.3), (2.23). Располагая новыми значениями напряжений, температуры и параметра фазового состава находятся фазово-структурные (1.8), (1.9) и полные деформации системы. Далее следует новый шаг по напряжениям. Прямой фазовый переход продолжается до тех пор, пока весь материал трубки не перейдет в мартенситное состояние, при этом  $q = 1$ . Далее следует цикл упругой мартенситной разгрузки. В ходе данного этапа величина напряжений уменьшается на заданный шаг за каждую итерацию, что влечет за собой уменьшение упругих деформаций. Фазово-структурные деформации и параметр фазового состава при этом не изменяют своего значения. Температура же трубки находится из уравнения (2.17). Данный этап продолжается до тех пор, пока не будет выполнено следующее соотношение

$$T = A_s^\sigma \quad (2.34)$$

Далее следует цикл обратного мартенситного превращения. Он аналогичен этапу прямого превращения, за той лишь разницей, что шаг по напряжениям становится величиной отрицательной (для определения промежутка времени, за который достигнута новая величина напряжений используется абсолютное значение напряжений). Температура трубки определяется на основе (2.12)-(2.14) с начальным условием  $T(0) = T_{unload}$ , либо используя (2.21-2.22), (2.28-2.29) или (2.32). Данный этап продолжается до тех пор, пока весь материал трубки не перейдет в аустенитное фазовое состояние ( $q = 0$ ). Далее следует упругая аустенитная разгрузка до нулевого значения напряжений, при этом может наблюдаться остаточная фазово-структурная деформация, величина которой зависит от температуры в процессе протекания обратного мартенситного превращения и тем ниже, чем выше температура трубки из СПФ.

В данной работе выполнено численное моделирование явления сверхупругости в рамках четырех, изложенных выше моделей. Рассмотрение задачи велось для различных величин скорости нагружения, а также коэффициента теплообмена с окружающей средой. Полученные результаты, сравнивались с решением аналогичной изотермической задачи (температура трубки постоянна и равна температуре окружающей среды) и адиабатической задачи, то есть без учета теплообмена с окружающей средой.

При решении задачи использованы следующие безразмерные переменные и параметры материала трубки, соответствующие СПФ типа равноатомного никелида титана:  $s = \sqrt{3}\tau / \sigma_0$ ,  $\delta S = (M_s^0 - M_f^0) \Delta S_0 \sigma_0^{-1}$ ,  $t_0 = T / T_{окр}$ . Функция  $F_1$  представляет собой экспоненциальное распределение

$F_1(\sqrt{3}\tau) = \Phi_1(\sqrt{3}\tau / \sigma_0) = 1 - \exp(-s)$ , а Функция  $F_2$  – распределение Вейбулла,  $F_2(\sqrt{3}\tau) = \Phi_2(\sqrt{3}\tau / \sigma_0) = 1 - \exp(-s^2)$ . В работе принимается  $f(q) = a_0 = 0$ ,  $\lambda = G_A / G_M = 3$ ,  $s_{0A} = \sigma_0 / G_A = 0.0046$ ,  $s_{0M} = \sigma_0 / G_M = 0.0139$ ,  $\delta S = 0.0427$ . Здесь и далее принимается, что  $\delta_1 U_0 = \delta_2 U_0 = 4.8 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·К),  $D_u = 8 \cdot 10^6$  Дж/(м<sup>3</sup>·К),  $\delta = 1$  мм.

На рис.1а приведены кривые сверхупругости для четырех представленных в работе моделей, а также изотермическое решение (сплошная жирная кривая). Так сплошная тонкая кривая соответствует модели номер один. Штриховая линия – модели номер два, пунктирная – третьей, а штрих-пунктирная линия четвертой модели. Приведенные кривые получены для  $\lambda = 0.5$  МПа/с,  $h_{\infty} = 20$  Вт/(м<sup>2</sup>·К) (свободная конвекция с воздухом),  $T_{окр} = 343$  К. Как видно из данного рисунка, решение задачи в дважды связанной постановке существенно отличается от изотермического решения. Это вызвано ростом температуры трубки во время протекания прямого мартенситного превращения (рис.1б), что замедляет скорость протекания фазового перехода. При этом увеличивается величина напряжений на момент окончания прямого мартенситного превращения. Наибольшее значение напряжений на момент окончания ПМП отмечается при использовании модели номер четыре. Модель номер один дает заниженное значение напряжений начала фазового перехода, при этом величина накопленной деформации на момент окончания прямого мартенситного превращения превосходит аналогичные значения для других моделей.

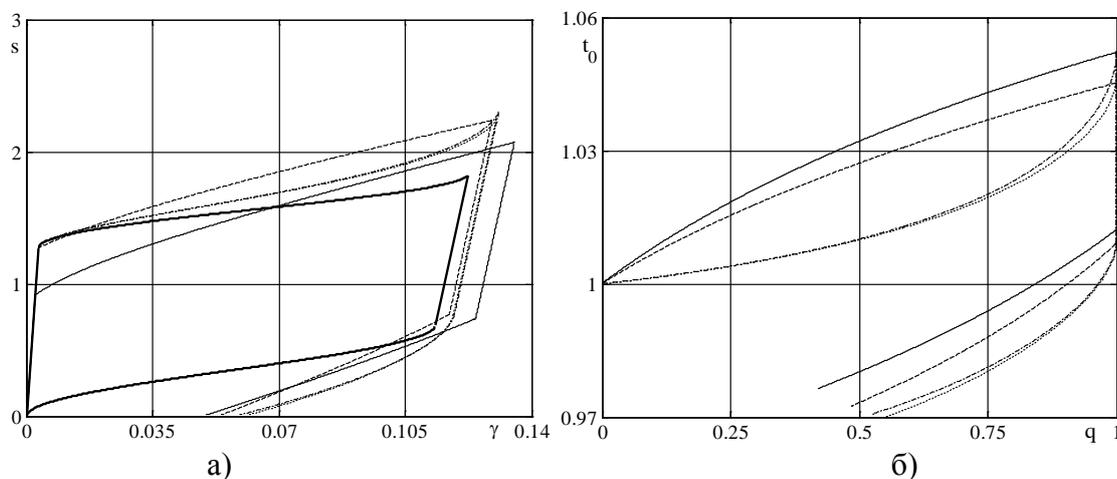


Рис.1.

На рис.1б приведены зависимости безразмерного параметра температуры  $t_0$  от объемной доли мартенситной фазы  $q$ . Сплошная линия соответствует модели номер один, штриховая – второй, пунктирная – третьей, а штрих-пунктирная линия четвертой модели. Из данного рисунка видно, что в процессе протекания прямого мартенситного превращения температура трубки возрастает. Модели номер один, три, четыре дают схожие результаты, при этом величина  $t_0$  для модели номер два на момент окончания прямого мартенситного превращения несколько ниже. В ходе упругой мартенситной разгрузки происходит охлаждение трубки вследствие теплообмена с окружающей средой, при этом параметр

фазового состава остается неизменным. При протекании обратного мартенситного превращения трубка продолжает охлаждаться, за счет поглощения латентного тепла фазового перехода. При этом ее температура может падать ниже температуры окружающей среды и тогда теплообмен с окружающей средой, напротив, повышает температуру трубки из СПФ. Так наименьшая температура трубки на момент окончания обратного мартенситного превращения наблюдается при использовании модели номер три. Вследствие того, что температура трубки при обратном фазовом переходе падает ниже температуры  $A_f^0$ , отмечается наличие остаточных фазово-структурных деформаций (рис.1а), и кривая сверхупругости не замыкается.

На рис.2а приведены кривые сверхупругости для различных скоростей нагружения  $\lambda$ . Так сплошная тонкая кривая соответствует  $\lambda = 0.1$  МПа/с, штриховая –  $\lambda = 0.5$  МПа/с, пунктирная –  $\lambda = 1$  МПа/с, штрих-пунктирная –  $\lambda = 2$  МПа/с. Моделирование выполнено для  $h_\infty = 20$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $T_{орп} = 343$  К. Использована модель номер четыре. Сплошная жирная линия представляет собой решение адиабатической задачи. Из рис.2а видно, что с увеличением скорости нагружения растет величина напряжений на момент окончания прямого мартенситного превращения. Увеличение скорости нагружения выше 0.5 МПа/с приводит к уменьшению остаточных фазово-структурных деформаций, вследствие существенного нагрева трубки при прямом мартенситном превращении, рис.2б. На данном рисунке кривые расположены по аналогии с рис.2а. В случае адиабатического процесса кривая сверхупругости получается замкнутой (остаточные деформации отсутствуют), при этом диссипации энергии (площадь под кривой сверхупругости) минимальна.

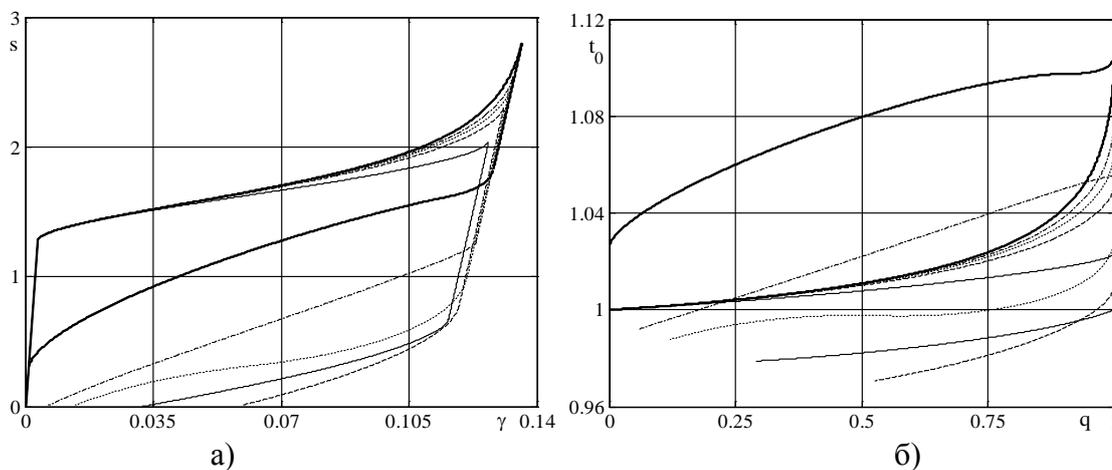


Рис.2.

В работе [43] отмечено, что коэффициент теплообмена с окружающей средой (в случае свободной конвекции с воздухом)  $h_\infty$  есть функция геометрических параметров трубки из СПФ, а также разности температур между трубкой и окружающей средой. Для тонкостенных трубок из СПФ коэффициент  $h_\infty$  варьируется от 18 до 22 Вт/(м<sup>2</sup>·К). В качестве среднего значения для цикла прямого и обратного мартенситного превращения  $h_\infty$  может быть принят равным 20 Вт/(м<sup>2</sup>·К). В ходе данной работы изучено влияние изменения параметра  $h_\infty$  на термомеханический отклик трубки из СПФ при кручении в режиме

сверхупругости. Моделирование выполнено для  $\lambda=0.5$  МПа/с и  $T_{окр}=343$  К, использована модель номер четыре. Результаты приведены в таблице 1.

Таблица 1.

$h_{\infty}, \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}}$	$s_{direct}$	$t_0^{direct}$	$s_{unload}$	$t_0^{unload}$	$\gamma_{res}^{phst}$	$t_0^{reverse}$
18	2.3207	1.0542	0.7958	1.0123	0.0583	0.9711
20	2.309	1.0521	0.77	1.001	0.0591	0.9708
22	2.2835	1.0503	0.7497	1.0081	0.059	0.9708

Здесь  $s_{direct}, t_0^{direct}$  – безразмерные напряжения и безразмерный параметр температуры на момент окончания прямого мартенситного превращения,  $s_{unload}, t_0^{unload}$  – те же величины после упругой мартенситной разгрузки,  $\gamma_{res}^{phst}$  – остаточные фазово-структурные деформации,  $t_0^{reverse}$  – безразмерный параметр температуры на момент окончания обратного мартенситного превращения. Как видно из таблицы 1, влияние изменения коэффициента теплообмена с окружающей средой несущественно. Для различных значений  $h_{\infty}$  кривые сверхупругости практически совпадают и в данной работе не приводятся.

На рис.3а приведены кривые сверхупругости для различных температур окружающей среды. Здесь сплошная линия соответствует  $T_{окр}=343$  К, штриховая – 353К, а пунктирная – 363К. Моделирование выполнено для  $\lambda=0.5$  МПа/с и  $h_{\infty}=20$  Вт/(м<sup>2</sup>·К), использована также модель номер четыре. Как видно из рис.3а, с ростом температуры окружающей среды, увеличиваются величины напряжений начала и окончания фазовых превращений. При этом в случае  $T_{окр}=363$ К не наблюдается остаточных фазово-структурных деформаций. Это обусловлено тем, что в ходе обратного мартенситного превращения температура трубки не падает ниже величины  $A_f^0$ , рис.3б. Линии на рис.3б приведены в соответствии с рис.3а, здесь  $t_0 = T / 343$  К.

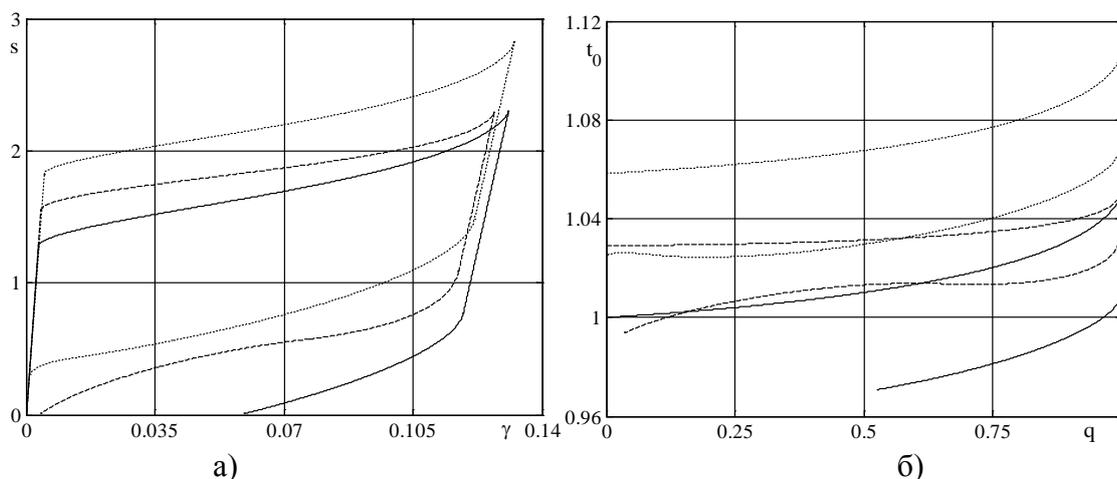


Рис.3.

## ВЫВОДЫ

В ходе работы получено решение дважды связанной задачи кручения тонкостенных трубок из СПФ в режиме сверхупругости. Показано, что учет изменения температуры трубки во время протекания фазовых переходов, существенно меняет решение задачи по сравнению с изотермическим случаем. Проведено численное моделирование явления сверхупругости для четырех вариантов уравнения энергетического баланса. Исследовано влияние скорости нагружения на термомеханический отклик трубки из СПФ. Установлено, что изменение коэффициента теплообмена с окружающей средой, в рамках диапазона, соответствующего свободной конвекции с воздухом, несущественно влияет на характерные параметры кривых сверхупругости. Отмечено влияние температуры окружающей среды на поведение трубки из СПФ при нагружении в режиме сверхупругости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. Эффект памяти формы. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 216 с.
2. Ооцука К., Симицзу К., Судзуки Ю., Сэкигути Ю., Тадаки Ц., Хомма Т., Миядзаки С. Сплавы с эффектом памяти формы. – М.: Металлургия, 1990. – 218 с.
3. Dolce M., Cardone D. Mechanical behavior of shape memory alloys for seismic applications 1. Martensite and austenite NiTi bars subjected to torsion // Intern. J. of Mechanical Sciences. – 2001. – Vol.43. – N11. – P.2631-2656.
4. Icardi U., Ferrero L. Preliminary study of and adaptive wing with shape memory alloy torsion actuators // Materials and Design. – 2009. – Vol.30. – N10. – P.4200-4210.
5. Prahlad H., Chopra I. Modeling and experimental characterization of sma torsional actuator // J. of Intelligent Material Systems and Structures. – 2007. – Vol.18. – N29. – P.29-38.
6. Brinson L.C. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable // J. of Intelligent Material Systems and Structures. – 1993. – Vol.4. – N2. – P.229-242.
7. Andani T.M., Alipour A., Eshghinejad A., Elahinia M. Modifying the torque-angle behavior of rotary shape memory alloy actuators through axial loading: a semi-analytical study of combined tension-torsion behavior // J. of Intelligent Material Systems and Structure. – 2013. – Vol.24. – N12. – P.1524-1535.
8. Boyd J.G., Lagoudas D.C. A thermodynamical constitutive model for shape memory materials. Part I. The monolithic shape memory alloy // Intern. J. of Plasticity. – 1996. – Vol.12. – N6. – P.805-842.
9. Qidwai M.A., Lagoudas D.C. Numerical implementation of shape memory alloy thermomechanical constitutive model using return mapping algorithms // Intern. J. for Numerical Methods in Engineering. – 2000. – Vol.47. – N6. – P.1123-1168.
10. Andani T.M., Elahinia M. A rate dependent tension-torsion constitutive model for superelastic nitinol under non-proportional loading; a departure from von Mises equivalency // Smart Materials and Structure. – 2014. – Vol.23. – N1. – P.150012-15026.

11. *Lexcellent C., Rejzner J.* Modeling of the strain-rate effect, creep and relaxation of a Ni-Ti shape memory alloy under tension (compression) – torsional proportional loading in the pseudoelastic range // *Smart Materials and Structure.* – 2000. – Vol.9. – N5. – P.613-621.
12. *Wang Y.F., Yue Z.F., Wang J.* Experimental and numerical study of the superelastic behavior on NiTi thin-walled tube under biaxial loading // *Computational Materials Science.* – 2007. – Vol. 40. – N2. – P.246-254.
13. *McNaney J.M., Imbeni V., Jung Y., Papadopoulos P., Ritchie R.* An experimental study of the superelastic effect in a shape-memory Nitinol alloy under biaxial loading // *Mechanics of Materials.* – 2003. – Vol.35. – N10. – P.969-986.
14. *Raniecki B., Lexcellent C.* Thermodynamics of isotropic pseudoelasticity in shape memory alloys // *European J. of Mechanics.* – 1998. – Vol.17. – N2. – P.185-205.
15. *Lim T.J., McDowell D.L.* Cyclic thermomechanical behavior of a polycrystalline pseudoelastic shape memory alloy // *J. of the Mechanics and Physics of Solids.* – 2002. – Vol.50. – N3. – P.651-676.
16. *Siredy N., Patoor E., Berveiller M., Everhardt A.* Constitutive equations for polycrystalline thermoelastic shape memory alloys. Part I. Intragranular interactions and behavior of the grain // *Intern. J. of Solids and Structures.* – 1999. – Vol.36. – N28. – P.4289-4315.
17. *Chapman C., Eshghinejad A., Elahinia M.* Torsional behavior of NiTi wires and tubes: modeling and experimentation // *J. of Intelligent Material Systems and Structures.* – 2011. – Vol.22. – N11. – P.1239-1248.
18. *Tabesh M., Elahnia M., Pourazady M.* Modeling NiTi superelastic shape memory antagonistic beams: a finite element analysis / *ASME 2009 Conference on Smart Materials, Adaptive Structures and Intelligent Systems SMASIS2009. Proceedings.* – CA. Oxnard, 2009. – P.557-566.
19. *Lagoudas D.C., Bo Z., Qidwai M.A., Entchev P.B.* SMA UM: User material subroutine for thermomechanical constitutive model of shape memory alloys. – Texas A&M University, College Station, TX, 2003. – 26 p.
20. *Lim T.J., McDowell D.L.* Mechanical behavior of a Ni-Ti shape memory alloy under axial-torsional proportional and nonproportional loading // *J. of Engineering Materials and Technology.* – 1999. – Vol.21. – N1. – P.9-18.
21. *Sun Q-P., Li Z-Q.* Phase transformation in superelastic NiTi polycrystalline microtubes under tension and torsion – from localization to homogeneous deformation // *Intern. J. of Solids and Structures.* – 2002. – Vol.39. – N13-14. – P.3797-3809.
22. *Lexcellent C., Rogueda C.* Some experimental results on proportional and nonproportional tensile-torsional loading tests on CuZnAl shape memory alloys and modeling // *5<sup>th</sup> Intern. Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture. Proceedings.* – Poland. Cracow, 1997. – P.641-656.
23. *Adler Y., Pelton Z., Duering B.* On the tensile and torsional properties of pseudoelastic NiTi // *Scripta Metallurgica et Materialia.* – 1990. – Vol.24. – N5. – P.943-947.
24. *Predki W., Klonne M., Knopik A.* Cyclic torsional loading of pseudoelastic NiTi shape memory alloys: damping and fatigue failure // *Materials Science and Engineering.* – 2006. – Vol.417. – N1-2. – P.182-189.
25. *Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г.* Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // *Известия РАН. МТТ.* – 2010. – №3. – С.118-130.

26. *Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г.* Влияние структурного превращения и нелинейности процесса деформирования на устойчивость стержня из сплава с памятью формы // Известия РАН. МТТ. – 2010. – №6. – С.137-147.
27. *Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л.* Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы // Известия РАН. МТТ. – 2011. – №2. – С.44-56.
28. *Мишустин И.В., Мовчан А.А.* Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // Известия РАН. МТТ. – 2014. – №1. – С.37-53.
29. *Мишустин И.В., Мовчан А.А.* Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы // Известия РАН. МТТ. – 2015. – №2. – С.78-95.
30. *Мовчан А.А., Казарина С.А., Машихин А.Е., Мишустин И.В., Саганов Е.Б., Сафронов П.А.* Краевые задачи механики для сплавов с памятью формы // Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки. – 2015. – Т.157. – Кн.3. – С.97-110.
31. *Мовчан А.А., Машихин А.Е.* Деформации кругового цилиндра из сплава с памятью формы при структурном переходе или прямом фазовом превращении // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №2. – С.235-247.
32. *Машихин А.Е.* Задача о контакте цилиндра из сплава с памятью формы с упругой трубой при обратном фазовом превращении // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.624-635.
33. *Саганов Е.Б.* Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №3. – С.454-468.
34. *Саганов Е.Б.* Решение задачи об обратном мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.663-674.
35. *Мовчан А.А., Левин А.С.* Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенной сфере из сплава с памятью формы, находящейся под действием постоянного давления // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №2. – С.221-236.
36. *Мовчан А.А., Кузнецова Н.С.* Моделирование процесса развития реактивных напряжений при обратном превращении в стержне из сплава с памятью формы // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №3. – С.393-411.
37. *Мовчан А.А., Казарина С.А., Мишустин И.В., Мовчан И.А.* Термодинамическое обоснование модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Деформация и разрушение материалов. – 2009. – №8. – С.2-9.
38. *Мовчан А.А., Казарина С.А.* Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.

39. *А.А. Мовчан, Ньют Со.* Термодинамическое описание поведения сплавов с памятью формы с помощью аддитивного потенциала Гиббса // Журнал прикладной механики и технической физики. – 2006. – Т.47. – №4. – С.98-103.
40. *Сапожников С.З., Китанин Э.Л.* Техническая термодинамика и теплопередача: Учебник для вузов. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1999. – 319 с.
41. *Лихачев В.А., Малинин В.Г.* Структурно-аналитическая теория прочности. – С.-Петербург: Наука, 1993. – 471 с.
42. *Liang C., Rogers C.A.* One dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials // J. of Intelligent Material Systems and Structures. – 1990. – Vol.1. – N2. – P.207-234.
43. *Mirzaeifar R., DesRoches R., Yavari A.* Analysis of the rate-dependent coupled thermo-mechanical response of shape memory alloy bars and wires in tension // Continuum Mechanics and Thermodynamics. – 2011. – Vol.23. – N4. – P.363-385.

*Поступила в редакцию 16 октября 2015 года.*

---

Сведения об авторе:

Саганов Евгений Борисович – асп., Кафедра «Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций», Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: [saganoff@yandex.ru](mailto:saganoff@yandex.ru)