

УДК 539.3: 537.633.9

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ПОЛИДИСПЕРСНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ПЬЕЗОМЕХАНИКИ ДЛЯ КОМПОЗИТОВ С РЕАЛЬНЫМИ СТРУКТУРАМИ¹

Паньков А.А.

*Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
г. Пермь, Россия*

РЕЗЮМЕ

Проведен сравнительный анализ коэффициентов корреляции, корреляционных функций реальной и различных модельных, как традиционных, так и новых многослойных полидисперсных волокнистых структур. Разработан метод корреляционных полидисперсных составляющих, которым получены новые аналитические решения для тензоров эффективных трансверсально-изотропных электромагнитоупругих свойств реальной однонаправлено волокнистой структуры в корреляционном приближении статистической механики композитов. Дан численный расчет коэффициента электромагнитной связи для волокнистого пьезокомпозита феррит/PVF.

Ключевые слова: пьезокомпозит; электромагнитоупругость; эффективные свойства; полидисперсная структура

CORRELATION POLYDISPERSE APPROXIMATIONS OF STATISTICAL PIEZOMECHANICS FOR COMPOSITES WITH REAL STRUCTURES

Pan'kov A.A.

State National Research Politechnical University of Perm, Perm, Russia

SUMMARY

The comparative analysis of coefficients of correlation, correlation functions real and various model both traditional, and new multilayered polydisperse fibrous structures is carried out. The method of correlation polydisperse components by which new analytical decisions for tensors effective are received is developed is transversal isotropic electro magneto elastic properties of real unidirectionally fibrous structure in correlation approach of statistical mechanics of composites. Numerical calculation of factor of electromagnetic relationship for fibrous piezocomposite ferrite/PVF is given.

Key words: piezocomposite; electro-magnetic elasticity; effective properties; polydisperse structure

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность исследования корреляционных функций [1-7] реальных [1] и модельных, например, квазипериодических [5,6,8] и полидисперсных [7,9-11]

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 14-01-96004 р_урал_a.

структур обусловлена тем, что через корреляционные функции структуры выражаются решения для макроскопических статистических характеристик электромагнитоупругих полей и тензоров эффективных свойств композита: эффективных упругих \mathbf{C}^* , пьезоэлектрических \mathbf{e}^* и пьезомагнитных \mathbf{h}^* свойств, диэлектрических λ^* и магнитных μ^* проницаемостей, электромагнитной связи χ^* , κ^* ; например, для двухфазных пьезоактивных сред [1,5-7] в корреляционном приближении

$$\mathbf{A}^* = \langle \mathbf{A} \rangle + \mathbf{F} \{k_{11}(\boldsymbol{\rho})\}, \quad (1)$$

где $\mathbf{A}^* \equiv \{\mathbf{C}^*, \dots, \mathbf{k}^*\}$ – искомые тензоры эффективных свойств; $\mathbf{F} \equiv \{\mathbf{F}^c, \dots, \mathbf{F}^k\}$ – интегро-дифференциальные операторы; $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}$ – вектор разности двух радиус-векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}_1 в представительной области \mathbf{V} композита.

На основе анализа корреляционных функций для различных модельных случайных структур методом периодических [5,6] или корреляционных [7] составляющих получено решение

$$\mathbf{A}^* = p\mathbf{A}^{p*} + (1-p)\mathbf{A}^{s*} \quad (2)$$

для тензоров \mathbf{A}^* эффективных свойств композита с «разупорядоченной» случайной структурой, образованной внесением случайных вариаций, например, во взаимном расположении, размерах включений в «неразупорядоченную», в общем случае, также случайную структуру.

Здесь искомое решение \mathbf{A}^* выражено через известные решения для неразупорядоченной \mathbf{A}^{p*} и полидисперсной структур, типа «статистическая смесь» \mathbf{A}^{s*} , где коэффициент корреляции p для случайных статистически однородных индикаторных функций заданной разупорядоченной с искомым решением \mathbf{A}^* и вспомогательной неразупорядоченной с известным решением \mathbf{A}^{p*} структур, например: квазипериодической и идеально периодической структур [5,6] или разупорядоченной и неразупорядоченной («традиционной» [9]) полидисперсных структур [7]. Отметим, что в [7] точность подхода продемонстрирована на решении тестовых задач в сравнении с известными решениями других авторов [9].

Цель работы – провести сравнительный анализ корреляционных функций реальной [1] и различных модельных традиционных [9] и новых многослойных полидисперсных волокнистых структур, разработать метод корреляционных полидисперсных составляющих и получить новые аналитические решения для структурных полей и тензоров эффективных трансверсально-изотропных электромагнитоупругих свойств реальной однонаправлено волокнистой структуры в корреляционном приближении [1,5] статистической механики композитов.

1. КОЭФФИЦИЕНТЫ КОРРЕЛЯЦИИ И КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ РЕАЛЬНОЙ И МОДЕЛЬНЫХ СТРУКТУР

1.1 Полидисперсные структуры.

На рис.1,а-г приведены фрагменты в поперечной плоскости $xу$ различных однонаправленных вдоль z волокнистых полидисперсных двухфазных традиционных (рис.1,а,б) [9,10] и обобщенных (рис.1,в [7,11], рис.1,г) моделей структур, черным цветом обозначена 1-я фаза, белым – 2-я фаза, r_0 - усредненный радиус поперечных сечений волокон реальной структуры (рис.1,з). Распределение размеров поперечных сечений однофазных (рис.1,б,в), слоистых двухфазных (рис.1,а,в,г) цилиндров или «ячеек» достаточно широко, включая и бесконечно малые, что обуславливает возможность заполнения такими полидисперсными ячейками всей представительной области V композита, допуская, в общем случае, как отсутствие, так и наличие ближних и (или) дальних корреляций в значениях размеров и типах (рис.1,б,в) различных ячеек. Считаем, что рассматриваемые модельные полидисперсные (рис.1,а-г) и реальная (рис.1,з) структуры обладают свойствами статистической однородности и эргодичности [1] в области V .

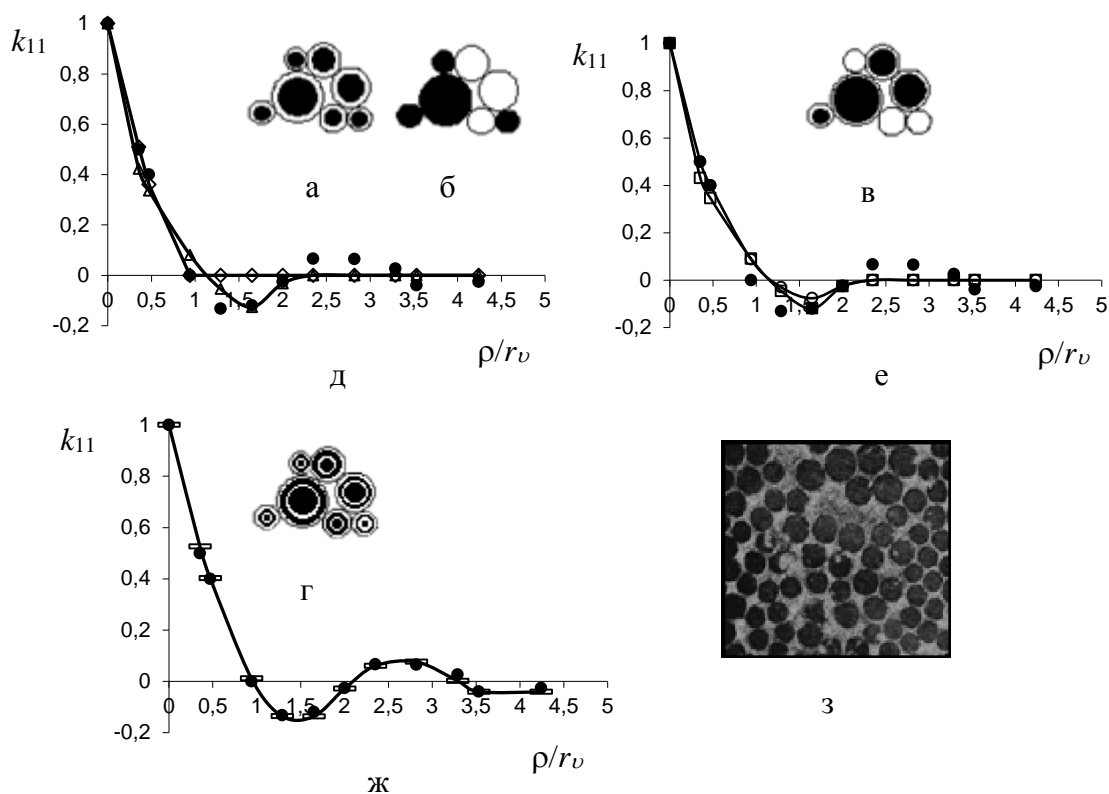


Рис.1. Полидисперсные (а-г) аппроксимации (д)-(ж) экспериментальных значений (\bullet) [1] нормированной корреляционной функции $k_{11}(\rho)$ однонаправленно волокнистого композита в плоскости изотропии (з).

Структура на рис.1,а состоит из однотипных составных ячеек – это волокно из 1-й фазы, окруженное слоем 2-й фазы композита. Такая структура сохраняет свойство непрерывности или «матричности» 2-й фазы при всех возможных

степенях заполнения области V 1-й фазой $v_1 \in (0;1)$, $v_1 = (a/b)^2$, где a , b - соответственно внутренний и наружный радиусы произвольной составной ячейки.

Во всех слоистых двухфазных полидисперсных ячейках (рис.1,а,г) чередование и толщина слоев 1-й и 2-й фаз по радиальной координате геометрически подобны, объемные доли 1-й и 2-й фаз во всех ячейках имеют постоянные значения v_1 и $v_2 = 1 - v_1$ соответственно. Свойства наружного слоя в ячейке определяют свойство матричности 1-й или 2-й фаз для всей полидисперсной структуры. Традиционная (рис.1,а) полидисперсная структура является частным случаем полидисперсной структуры со слоистыми ячейками (рис.1,г) при двух слоях в ячейке.

Структура на рис.1,б состоит из однородных полидисперсных ячеек со свойствами 1-й и 2-й фаз, объемная доля которых в структуре композита v_1 и $v_2 = 1 - v_1$ соответственно. Такая структура инвариантна к инверсии свойств 1-й и 2-й фаз при фиксированных объемных долях v_1 и v_2 фаз.

Структура на рис.1,в состоит из двухслойных (1-я фаза с прослойкой 2-й фазы) и однородных (2-я фаза) полидисперсных ячеек. Объемная доля 1-й фазы (волокна) во всех составных ячейках $v_{01} = (a/b)^2$, объемная доля 1-й фазы в полидисперсной структуре композита $v_1 = v_0 v_{01}$, где объемная доля составных ячеек в полидисперсной структуре v_0 , доля однородных ячеек $1 - v_0$, внутренний a и наружный b радиусы произвольной составной ячейки. Модель структуры (рис.1,в) позволяет варьировать толщину относительной прослойки $\delta \equiv (b - a)/a$ матрицы вокруг волокна и сохраняет свойство матричности 2-й фазы при всех возможных степенях заполнения $v_1 \in (0;1)$ и величине прослойки $\delta \in (0; \delta_{\max})$, где

$\delta_{\max} = \frac{1}{\sqrt{v_1}} - 1$. В предельных случаях, когда $\delta = 0$ или $\delta = \delta_{\max}$ полидисперсная структура (рис.1,в) вырождается в традиционные структуры на рис.1,б или рис.1,а, соответственно.

Структура на рис.1,г состоит из полидисперсных однотипных слоистых ячеек и позволяет варьировать относительные радиусы и толщины чередующихся слоев 1-й и 2-й фаз при неизменных значениях их объемных долей: v_1 , $v_2 = 1 - v_1$ в каждой ячейке. Принадлежность внешнего поверхностного слоя ячейки к 1-й или 2-й фазе определяет свойство матричности всей полидисперсной структуры по соответствующей фазе.

Эффективные пьезоэлектромагнитоупругие свойства композитов с полидисперсными структурами (рис.1,а-г), в общем, определяются из расчетной схемы самосогласования – одиночная составная цилиндрическая ячейка (рис.1,а,в,г) или волокно (рис.1,б) в эффективной среде с искомыми свойствами [5,9-11]. Отметим, что эффективные свойства структур на рис.1,а,г можно более просто найти из рассмотрения одиночных ячеек [9-11] без схемы самосогласования. Уникальность полидисперсных структур (рис.1,а,г) состоит в возможности получения точных аналитических решений для структуры полей в соответствующих однотипных полидисперсных составных ячейках и для констант эффективных свойств и инвариантность решений к особенностям, например: периодичности, квазипериодичности или статистической

независимости взаимного расположения ячеек в объеме композита, в частности, для осесимметричного электромагнитоупругого нагружения на макроуровне композита.

1.2. Коэффициенты корреляции периодической, квазипериодической и полидисперсных структур.

Определим коэффициенты корреляции различных пар: квазипериодических монодисперсной и полидисперсной, монодисперсных квазипериодической и периодической, периодических монодисперсной и полидисперсной случайных структур. Объемная доля волокон v_1 для всех рассматриваемых структур одна и та же, периодичность и квазипериодичность монодисперсных структур обусловлены расположением центров сечений волокон лишь в узлах идеальной гексагональной решетки. Для квазипериодической монодисперсной структуры вероятность расположения волокон в узлах решетки $p_0 \in (0;1)$; в предельном случае, когда $p_0 = 1$ эта квазипериодическая структура вырождается в монодисперсную периодическую. Для полидисперсных структур периодичность и квазипериодичность также обусловлены расположением центров сечений монодисперсных составных цилиндрических ячеек (волокон) во всех или с заданной вероятностью p_0 узлах идеальной гексагональной решетки с периодическим или произвольным заполнением пространства между этими монодисперсными ячейками, например, бесконечно малыми полидисперсными составными ячейками.

Коэффициент корреляции

$$p = \frac{\langle i'_{s1} i'_{p1} \rangle}{\sigma_{s1} \sigma_{p1}} \quad (3)$$

случайных статистически однородных индикаторных функций 1-й фазы (волокон) двухфазных монодисперсной квазипериодической $i_{p1}(\mathbf{r})$ и полидисперсной $i_{s1}(\mathbf{r})$ структур

$$i_{p1}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \mathbf{V}_{p1} \\ 0, & \mathbf{r} \notin \mathbf{V}_{p1} \end{cases} \quad i_{s1}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in \mathbf{V}_{s1} \\ 0, & \mathbf{r} \notin \mathbf{V}_{s1} \end{cases} \quad (4)$$

рассчитывается

$$p = \frac{v_{11} - v_1^2}{v_1(1 - v_1)}, \quad v_{11} = \langle i_{s1} i_{p1} \rangle \quad (5)$$

через одноточечный начальный смешанный момент v_{11} , где пульсации $i'_{s1}(\mathbf{r}) = i_{s1}(\mathbf{r}) - \langle i_{s1} \rangle$, $i'_{p1}(\mathbf{r}) = i_{p1}(\mathbf{r}) - \langle i_{p1} \rangle$, осредненные значения $\langle i_{s1} \rangle = \langle i_{p1} \rangle = v_1$, среднеквадратические отклонения $\sigma_{s1} = \sigma_{p1} = \sqrt{D_{11}}$, дисперсия

$$D_{11} = v_1(1 - v_1), \quad (6)$$

области 1-й \mathbf{V}_{p1} , \mathbf{V}_{s1} и 2-й \mathbf{V}_{p2} , \mathbf{V}_{s2} фаз обеих структур в представительной области $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cup \mathbf{V}_2$. Для тривиального случая, когда полидисперсная некоррелированная структура произвольным образом «накладывается» на монодисперсную квазипериодическую структуру имеем $v_{11} = v_1^2$, $p = 0$.

Рассмотрим случай с использованием квазипериодических полидисперсных структур с внесением взаимных корреляций или «привязок» в монодисперсную квазипериодическую и полидисперсную структуры. Считаем, что в поперечной плоскости изотропии над каждым круговым сечением волокна радиуса R_p квазипериодической структуры мысленно расположено концентрическое круговое сечение волокна радиуса R_s некоторой составной ячейки с внешним радиусом b_s полидисперсной структуры; центр каждой гексагональной ячейки с волокном квазипериодической структуры совпадает с центром соответствующей составной ячейки полидисперсной структуры. Так как в заданной квазипериодической структуре радиусы всех волокон одинаковые и равны R_p , поэтому в «привязанных» к ним волокнах полидисперсной структуры радиусы тоже считаем одинаковыми и равными R_s и, в общем, $R_p \neq R_s$. В полидисперсной структуре пространство между привязанными квазипериодическими монодисперсными составными ячейками заполнено такими же по строению, но полидисперсными, например, бесконечно малыми однотипными ячейками с волокном. Отметим, что из формулы для объемной доли волокон в монодисперсной квазипериодической структуре

$$v_1 = p_0 \left(R_p / R_{\max} \right)^2 v_{1\max} \quad (7)$$

следует, что радиус вписанной в гексагональную ячейку окружности

$$R_{\max} = R_p \sqrt{\frac{p_0 v_{1\max}}{v_1}} \quad (8)$$

Объемная доля волокон в монодисперсной квазипериодической структуре (7) равна объемной доле волокон в полидисперсной структуре и в каждой ее составной ячейке $v_1 = (R_s / b_s)^2$, где внутренний R_s и внешний b_s радиусы однотипной составной ячейки полидисперсной структуры. Минимальная гарантированная прослойка между волокнами в монодисперсной квазипериодической структуре

$$\delta = 2 \left(\sqrt{\frac{p_0 v_{1\max}}{v_1}} - 1 \right) R_p \quad (9)$$

Из условия статистической независимости реализаций структуры в различных и, в частности, соседних гексагональных ячейках квазипериодической структуры следует требование невыхода точек составной ячейки за границу своей привязанной гексагональной ячейки, т.е. внешний радиус соответствующей привязанной ячейки $b_s \leq R_{\max}$

$$0 < x \leq \sqrt{p_0 v_{1\max}} < 1 \quad (10)$$

с учетом (8) и неравенств: $p_0 \leq 1$, $v_{1\max} < 1$, где максимально возможная объемная доля волокон при гексагональной укладке $v_{1\max} = \pi \sqrt{3} / 6 \approx 0.906$, радиус составной ячейки $b_s = R_s / \sqrt{v_1}$, отношение радиусов связанных волокон $x = R_s / R_p$. Из (10) следует, что всегда $R_s < R_p$ при требовании $b_s \leq R_{\max}$.

В частных случаях (10)

1) если $b_s \leq R_p$ или $0 < x \leq \sqrt{v_1}$ имеем

$$v_{11} = p_0 \left(\frac{\pi R_s^2}{S} + \frac{\pi(R_p^2 - b_s^2)}{S} v_1 \right) = v_1^2, \quad p = 0;$$

2) если $b_s > R_p$ или $\sqrt{v_1} < x \leq \sqrt{v_{1\max}/p_0}$ имеем

$$v_{11} = p_0 \left(\frac{\pi R_s^2}{S} + 0 \right) = v_1 x^2, \quad p = \frac{x^2 - v_1}{1 - v_1}, \quad (11)$$

где площадь гексагональной ячейки S .

Из формулы (11) видно, что максимальное значение коэффициент корреляции p принимает при наибольшем допустимом значении параметра

$$x = \sqrt{p_0 v_{1\max}} \quad (12)$$

Например, при $v_1 \approx 0.65$ и $p_0 = v_{1\max} \approx 0.906$ из формулы (12) следует, что относительный радиус привязанного волокна полидисперсной структуры $x \approx 0.906$ и коэффициент корреляции квазипериодической и полидисперсной связанных структур

$$p \approx 0.49 \quad (13)$$

Отметим, что минимальная гарантированная прослойка между волокнами для квазипериодической монодисперсной структуры (9) в рассматриваемом случае $\delta \approx 0.248R_p$.

Для сравнения рассчитаем коэффициент корреляции связанных монодисперсных квазипериодической ($p_0 \in (0;1)$) и привязанной периодической ($p_0 = 1$) структур; центры и границы ячеек обеих структур совпадают. Радиусы круговых сечений волокон для квазипериодической структуры

$$R_p = R_{\max} \sqrt{\frac{v_1}{p_0 v_{1\max}}} \quad (14)$$

и для идеальной периодической структуры

$$R'_p = R_p \sqrt{p_0} \quad (15)$$

с учетом (7), (8) и равенства объемных долей волокон $v'_1 = v_1$ в обеих структурах

$$v_1 = \pi (R'_p)^2 / S = p_0 \pi R_p^2 / S \quad (16)$$

Далее, так как (15) всегда $R'_p < R_p$, поэтому $v_{11} = p_0 \pi (R'_p)^2 / S$. В результате

$$v_{11} = p_0 v_1, \quad p = \frac{p_0 - v_1}{1 - v_1} \quad (17)$$

и для рассматриваемого случая, когда $v_1 \approx 0.65$ и $p_0 = v_{1\max} \approx 0.906$ имеем

$$p \approx 0.73 \quad (18)$$

Аналогично (14)-(18) рассчитаем коэффициент корреляции связанных периодических монодисперсной и полидисперсной структур. Радиусы круговых сечений связанных волокон для периодических полидисперсной

$$R_s = R_{\max} \sqrt{v_1} \quad (19)$$

и монодисперсной

$$R'_p = R_{\max} \sqrt{v_1 / v_{1\max}} \quad (20)$$

структур с учетом (7), (8) и равенства объемных долей волокон $v_1' = v_1$ в обеих структурах

$$v_1 = (R_p'/R_{\max})^2 v_{1\max} = (R_s/R_{\max})^2 \quad (21)$$

Далее, так как из (19), (20) следует $R_s = R_p' \sqrt{v_{1\max}}$ и неравенство $R_s < R_p'$, поэтому $v_{11} = \pi R_s^2/S = x^2 \pi (R_p')^2/S$ и в результате

$$v_{11} = x^2 v_1, \quad p = \frac{x^2 - v_1}{1 - v_1}, \quad (22)$$

где $x \equiv R_s/R_p' = \sqrt{v_{1\max}}$ и для рассматриваемого случая, когда $v_1 \approx 0.65$ и $v_{1\max} \approx 0.906$ имеем коэффициент корреляции

$$p \approx 0.73 \quad (23)$$

Таким образом, для рассматриваемого случая, когда $v_1 \approx 0.65$, $p_0 = v_{1\max} \approx 0.906$ коэффициенты корреляции связанных структур имеют значения: $p_1 \approx 0.49$ для квазипериодических монодисперсной и полидисперсной (13), $p_2 \approx 0.73$ для монодисперсных квазипериодической и периодической (18), $p_3 \approx 0.73$ для периодических монодисперсной и полидисперсной (23).

1.3 Корреляционные функции реальной и полидисперсных структур.

Нормированная двухточечная $(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1 \in \mathbf{V})$ корреляционная функция

$$k_{11}(\rho) = \frac{1}{D_{11}} \langle i_1'(\mathbf{r}) i_1'(\mathbf{r}_1) \rangle \quad (24)$$

индикаторной функции 1-й фазы $i_1(\mathbf{r})$ (4) двухфазной структуры в представительной области \mathbf{V} , где вектор разности

$$\rho = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}, \quad (25)$$

дисперсия D_{11} (6), начальное значение $k_{11}(0) = 1$.

Для реальной структуры (рис.1,з) в плоскости изотропии однонаправленного волокнистого композита значения нормированной корреляционной функции $k_{11}(\rho)$ экспериментально определены в [1] и приведены (\bullet) на рис.1,д-ж, где расстояние $\rho = |\rho|$ между точками \mathbf{r}, \mathbf{r}_1 (25), осредненное значение радиуса r_0 волокон в структуре при объемной доле волокон $v_1 \approx 0.65$.

Для полидисперсных модельных структур (рис.1,а-г) считаем, что точка \mathbf{r} случайным образом лежит внутри некоторой фиксированной составной цилиндрической ячейки с внешним радиусом поперечного кругового сечения b , так как все составные ячейки с волокном в полидисперсных структурах (рис.1,а-г) геометрически подобны; отсутствуют как ближние, так и дальние корреляции в значениях размеров и типах различных ячеек. Отметим, что для случая, когда точка \mathbf{r} лежит внутри другой ячейки с меньшим радиусом $b' < b$, тогда происходит «сжатие» нормированных корреляционных функций по оси абсцисс, а в случае $b' > b$ - «растяжение».

На рис.1,д-ж представлены результаты различных аппроксимаций значений (\bullet) нормированной корреляционной функции $k_{11}(\rho)$ реальной структуры (рис.1,з)

функциями: $k_{11}^{(1)}(\rho)$ (Δ) и $k_{11}^{(2)}(\rho)$ (\diamond) (рис.1,д) для традиционных полидисперсных структур на рис.1,а и рис.1,б; $k_{11}^{(3)}(\rho)$ (\square) (рис.1,е) для полидисперсной структуры на рис.1,в; $k_{11}^{(5)}(\rho)$ (\equiv) (рис.1,ж) для полидисперсной структуры на рис.1,г.

На рис.1,д приведены однопараметрические аппроксимации (Δ), (\diamond)

$$k_{11}(\rho) \approx k_{11}^{(1)}(\alpha_1 \rho) \quad (26)$$

где $\alpha_1 \approx 0.941$, параметр аппроксимации $\alpha_1 \equiv a/r_0$ - это нормированный радиус a волокна в составной ячейке, внешний нормированный радиус ячейки рассчитывается $b/r_0 = \frac{\alpha_1}{\sqrt{v_1}}$ через заданную объемную долю v_1 волокна (1-й фазы)

в ячейке и варьируемый параметр аппроксимации α_1 (рис.1,а)

$$k_{11}(\rho) \approx k_{11}^{(2)}(\alpha_1 \rho) \quad (27)$$

где $\alpha_1 \approx 0.446$, параметр аппроксимации $\alpha_1 \equiv a/r_0$ - нормированный радиус одного из волокон в структуре на рис.1,б.

На рис.1,е приведена двухпараметрическая аппроксимация (\square)

$$k_{11}(\rho) \approx k_{11}^{(3)}(\alpha_1 \rho), \quad (28)$$

на основе полидисперсной структуры (рис.1,в) с вариациями нормированных радиусов волокна α_1 и составной ячейки α_2 ; нормированная толщина $\delta \equiv \alpha_2 - \alpha_1$ цилиндрической прослойки матрицы (2-фазы) вокруг волокна (1-й фазы) в ячейке

с учетом $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_{\max} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{v_1}}$, где $\alpha_1 \approx 0.938$, $\alpha_2 \approx 1.156$ ($\alpha_{\max} \approx 1.164$) и

трехпараметрическая аппроксимация (\circ)

$$k_{11}(\rho) \approx \alpha_3 k_{11}^{(1)}(\alpha_1 \rho) + (1 - \alpha_3) k_{11}^{(2)}(\alpha_2 \rho) \quad (29)$$

где $\alpha_1 \approx 0.91$, $\alpha_2 \approx 0.55$, $\alpha_3 \approx 0.5$ как линейная комбинация нормированных корреляционных функций $k_{11}^{(1)}(\rho)$, $k_{11}^{(2)}(\rho)$ традиционных полидисперсных структур на рис.1,а,б. Отметим, что коэффициент α_3 в (29), по сути, является коэффициентом корреляции

$$p \equiv \alpha_3 \approx 0.5 \quad (30)$$

структур на рис.1,а,з метода корреляционных составляющих [7].

На рис.1,ж приведена трехпараметрическая аппроксимация (\equiv)

$$k_{11}(\rho) \approx k_{11}^{(5)}(\alpha_1 \rho) \quad (31)$$

на основе полидисперсной структуры (рис.1,г) с вариациями нормированных радиусов α_1 , α_2 , α_3 межфазных цилиндрических границ слоистой двухфазной ячейки, где α_1 - радиус центрального волокна (1-й фазы), α_2 , α_3 , α_0 - внешние радиусы следующих за волокном прослоек 2-й, 1-й и снова 2-й (у поверхности ячейки) фаз. Внешний нормированный радиус ячейки рассчитывается

$$\alpha_0 = \sqrt{(\alpha_1^2 - \alpha_2^2 + \alpha_3^2)/v_1} \quad (32)$$

через заданную объемную долю v_1 1-й фазы в ячейке и варьируемые параметры аппроксимации α_1 , α_2 , α_3 с учетом $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_0$. Аппроксимация (31) практически точно описывает значения (\bullet) нормированной корреляционной функции для реальной структуры (рис.1,з).

2. ЭФФЕКТИВНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИЕ СВОЙСТВА ПЬЕЗОКОМПОЗИТА

Рассмотрим решения для тензоров \mathbf{C}^* , \mathbf{e}^* , \mathbf{h}^* , λ^* , μ^* , χ^* , \mathbf{k}^* эффективных свойств реальной структуры (рис.1,3) на примере тензора эффективной электромагнитной связи \mathbf{k}^* однонаправленно волокнистого пьезокомпозиата.

2.1. Решения метода корреляционных составляющих [7].

Коэффициенты корреляции (3)-(23) позволяют рассчитать тензоры эффективных свойств композита по формуле (2); например, для тензора эффективной электромагнитной связи композита с монодисперсной квазипериодической структурой

$$\mathbf{k}^* = p_1 \mathbf{k}^{*(1)} + (1 - p_1) \mathbf{k}^{*(2)} \quad (33)$$

или

$$\mathbf{k}^* = p_2 \mathbf{k}^{p*} + (1 - p_2) \mathbf{k}^{*(2)}, \quad (34)$$

где тензор эффективной электромагнитной связи композита с монодисперсной периодической структурой

$$\mathbf{k}^{p*} = p_3 \mathbf{k}^{*(1)} + (1 - p_3) \mathbf{k}^{*(2)} \quad (35)$$

Отметим, что подстановка (35) в (34) дает формулу

$$\mathbf{k}^* = p_{\bullet} \mathbf{k}^{*(1)} + (1 - p_{\bullet}) \mathbf{k}^{*(2)} \quad (36)$$

где приведенный коэффициент корреляции

$$p_{\bullet} = p_2 p_3 \approx 0.53 \quad (37)$$

имеет небольшое отличие от коэффициента $p_1 \approx 0.49$ (33), (13). Численное значение 0.5 коэффициента корреляции p (30) хорошо согласуется со значением 0.49, найденным из условия наилучшей полидисперсной аппроксимации корреляционной функции реальной структуры (13), и со значением 0.53 для приведенного коэффициента корреляции (37).

2.2. Корреляционные полидисперсные приближения.

Из общих соотношений статистической механики композитов для пьезоактивных сред (1) искомый тензор

$$\mathbf{k}^* = \langle \mathbf{k} \rangle + \mathbf{F}^{\mathbf{k}} \{k_{11}(\boldsymbol{\rho})\}, \quad (38)$$

где компоненты линейного интегро-дифференциального оператора в корреляционном приближении

$$\begin{aligned} F_{kn}^{\mathbf{k}} \{k_{11}(\boldsymbol{\rho})\} = & v_1 (1 - v_1) \int_{\mathbf{v}} \left[\bar{\mu}_{kp} \left(-\Psi_{j,p}(\boldsymbol{\rho}) \bar{e}_{njs} + \Psi_{,p}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \bar{\lambda}_{sn} \right) + \right. \\ & \left. + \bar{h}_{kpq} \left(-U_{qj,p}(\boldsymbol{\rho}) \bar{e}_{njs} + U_{q,p}^{(1)}(\boldsymbol{\rho}) \bar{\lambda}_{sn} \right) \right] \frac{\partial k_{11}(\boldsymbol{\rho})}{\partial \rho_{(1)s}} d\boldsymbol{\rho} \end{aligned}$$

нормированная корреляционная функция $k_{11}(\boldsymbol{\rho})$ учитывает особенности случайной структуры композита; функции Грина [5,12] для однородной трансверсально-изотропной пьезоэлектромагнитной среды: U_{ik} , $U_i^{(1)}$ - перемещения по оси r_i и Ψ_k , $\Psi^{(1)}$ - магнитные потенциалы в точке \mathbf{r} , обусловленные действием в точке \mathbf{r}_1 единичной объемной силы по оси r_k и

электрического источника соответственно, тензоры разностей электрических $\bar{\lambda} = \lambda_1 - \lambda_2$, $\bar{e} = e_1 - e_2$ и магнитных $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2$, $\bar{h} = h_1 - h_2$ свойств фаз. Отметим, что для рассматриваемых двухфазных структур (рис.1,а-г), которые различаются лишь функцией $k_{11}(\rho)$, т.е. взаимным расположением и вариациями размеров сечений однонаправленных волокон в плоскости изотропии, вид оператора $F^k \{ \dots \}$ одинаков.

В результате подстановки различных аппроксимаций (26)-(29), (31) нормированной корреляционной функции $k_{11}(\rho)$ реальной структуры (рис.1,з) в оператор $F^k \{ \dots \}$ получим соответствующие приближенные решения для тензора электромагнитной связи композита с реальной структурой (рис.1,з) $\kappa^* \approx \tilde{\kappa}_t^*$, $t = \overline{1,5}$, где

$$\tilde{\kappa}_1^* = \kappa^{*(1)}, \tilde{\kappa}_2^* = \kappa^{*(2)}, \tilde{\kappa}_3^* = \kappa^{*(3)}, \tilde{\kappa}_4^* = p\kappa^{*(1)} + (1-p)\kappa^{*(2)}, \tilde{\kappa}_5^* = \kappa^{*(5)} \quad (39)$$

Аналогичные κ^* (39) приближения можно записать для других тензоров: C^* , e^* , h^* , λ^* , μ^* , χ^* эффективных пьезоэлектромагнитных свойств волокнистого композита. Базовые решения для эффективных пьезоэлектромагнитных свойств полидисперсных структур (рис.1,а-г), например: $\kappa^{*(1)}$, $\kappa^{*(2)}$, $\kappa^{*(3)}$, $\kappa^{*(5)}$, в общем, могут быть получены на основе расчетной схемы самосогласования – одиночная ячейка в эффективной среде [5,9,11].

Отметим, что вместо традиционной структуры (рис.1,а) могут быть использованы другие полидисперсные структуры (рис.1,в,г) в качестве вспомогательных структур, относительно которых рассчитывается коэффициент корреляции p (2)-(5) или приведенный коэффициент корреляции p_\bullet [7]. В частности, имеем значение $p_\bullet \approx 1$ для корреляций реальной (рис.1,з) и модельной слоистой полидисперсной (рис.1,г) структур, что приводит к равенству $A^* \approx A^{*(5)}$ эффективных свойств этих двух структур в рамках метода корреляционных составляющих (2) [7].

2.3. Осесимметричное нагружение композита.

Рассмотрим случай осесимметричного нагружения трансверсально изотропного однонаправленного волокнистого пьезокомпозита, когда на макроуровне заданы, в общем, отличные от нуля значения напряженностей электрического \hat{E}_z^* и магнитного \hat{H}_z^* полей по оси симметрии z , осевой деформации ε_{zz}^* и относительного изменения объема $\varepsilon^* \equiv \varepsilon_{xx}^* + \varepsilon_{yy}^*$ при плоской деформации; остальные компоненты векторов напряженностей электрического \hat{E}^* и магнитного \hat{H}^* полей и тензора деформаций ε^* равны нулю. Для такого случая нагружения определяющие соотношения на макроуровне композита

$$\begin{aligned} \sigma^* &= k_{12}^* \varepsilon^* + C_{1133}^* \varepsilon_{zz}^* - e_{311}^* \hat{E}_z^* - h_{311}^* \hat{H}_z^* \\ \sigma_{zz}^* &= C_{1133}^* \varepsilon^* + C_{3333}^* \varepsilon_{zz}^* - e_{333}^* \hat{E}_z^* - h_{333}^* \hat{H}_z^* \\ \hat{D}_z^* &= e_{311}^* \varepsilon^* + e_{333}^* \varepsilon_{zz}^* + \lambda_{33}^* \hat{E}_z^* + \chi_{33}^* \hat{H}_z^*, \\ \hat{B}_z^* &= h_{311}^* \varepsilon^* + h_{333}^* \varepsilon_{zz}^* + \mu_{33}^* \hat{H}_z^* + \kappa_{33}^* \hat{E}_z^* \end{aligned} \quad (40)$$

Решения для тензоров эффективных свойств традиционных полидисперсных структур рассмотрены ранее в [5,9-11], поэтому здесь рассмотрим решение для

новой полидисперсной структуры на рис.1,г. Для такой однонаправленной волокнистой полидисперсной структуры (рис.1,г) искомые эффективные объемный модуль плоской деформации k_{12}^* , упругие C_{1133}^* , C_{3333}^* , пьезоэлектрические e_{311}^* , e_{333}^* , пьезомагнитные h_{311}^* , h_{333}^* константы, диэлектрическую λ_{33}^* и магнитную μ_{33}^* проницаемости трансверсально-изотропного композита с составными полидисперсными ячейками: F -слойными двухфазными волокнами с дополнительным внешним $(F+1)$ слоем 2-й фазы (матрицы) и ориентированными по оси r_3 можно точно определить традиционным подходом [9,10] из решения осесимметричной связанной задачи электромагнитоупругости для одиночной слоистой ячейки или методом последовательной гомогенизации [13].

Для рассматриваемой слоистой ячейки схему последовательной гомогенизации составной $(F+1)$ -слойной цилиндрической ячейки представим в виде рекуррентных последовательностей ($k = \overline{1, F}$)

$$\begin{aligned}
k_{(k+1)12}^* &= k_{(k+1)12} + v_{(k)} \bar{k}_{(k)12} a_{(k+1)11}, \\
C_{(k+1)1133}^* &= C_{(k+1)1133} + v_{(k)} (\bar{C}_{(k)1133} + \bar{k}_{(k)12} a_{(k+1)12}), \\
C_{(k+1)3333}^* &= C_{(k+1)3333} + v_{(k)} (\bar{C}_{(k)3333} + \bar{C}_{(k)1133} a_{(k+1)12}), \\
e_{(k+1)311}^* &= e_{(k+1)311} + v_{(k)} \bar{e}_{(k)311} a_{(k+1)11}, \\
e_{(k+1)333}^* &= e_{(k+1)333} + v_{(k)} (\bar{e}_{(k)333} + \bar{e}_{(k)311} a_{(k+1)12}), \\
h_{(k+1)311}^* &= h_{(k+1)311} + v_{(k)} \bar{h}_{(k)311} a_{(k+1)11}, \\
h_{(k+1)333}^* &= h_{(k+1)333} + v_{(k)} (\bar{h}_{(k)333} + \bar{h}_{(k)311} a_{(k+1)12}), \\
\lambda_{(k+1)33}^* &= \lambda_{(k+1)33} + v_{(k)} (\bar{\lambda}_{(k)33} + \bar{e}_{(k)311} a_{(k+1)13}), \\
\mu_{(k+1)33}^* &= \mu_{(k+1)33} + v_{(k)} (\bar{\mu}_{(k)33} + \bar{h}_{(k)311} a_{(k+1)14}), \\
\kappa_{(k+1)33}^* &= \kappa_{(k+1)33} + v_{(k)} (\bar{\kappa}_{(k)33} + \bar{h}_{(k)311} a_{(k+1)13}),
\end{aligned} \tag{41}$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned}
a_{(k+1)11} &= (k_{(k+1)12} + G_{(k+1)12}) / a_{(k+1)0}, \quad a_{(k+1)12} = -(1 - v_{(k)}) \bar{C}_{(k)1133} / a_{(k+1)0}, \\
a_{(k+1)13} &= (1 - v_{(k)}) \bar{e}_{(k)311} / a_{(k+1)0}, \quad a_{(k+1)14} = (1 - v_{(k)}) \bar{h}_{(k)311} / a_{(k+1)0}, \\
a_{(k+1)0} &= k_{(k)12}^* - v_{(k)} \bar{k}_{(k)12} + G_{(k+1)12},
\end{aligned}$$

разности

$$\begin{aligned}
\bar{k}_{(k)12} &= k_{(k)12}^* - k_{(k+1)12}, \\
\bar{C}_{(k)1133} &= C_{(k)1133}^* - C_{(k+1)1133}, \quad \bar{C}_{(k)3333} = C_{(k)3333}^* - C_{(k+1)3333}, \\
\bar{e}_{(k)311} &= e_{(k)311}^* - e_{(k+1)311}, \quad \bar{e}_{(k)333} = e_{(k)333}^* - e_{(k+1)333}, \\
\bar{h}_{(k)311} &= h_{(k)311}^* - h_{(k+1)311}, \quad \bar{h}_{(k)333} = h_{(k)333}^* - h_{(k+1)333}, \\
\bar{\lambda}_{(k)33} &= \lambda_{(k)33}^* - \lambda_{(k+1)33}, \quad \bar{\mu}_{(k)33} = \mu_{(k)33}^* - \mu_{(k+1)33}, \\
\bar{\kappa}_{(k)33} &= \kappa_{(k)33}^* - \kappa_{(k+1)33}
\end{aligned}$$

с учетом обозначений: $k_{(1)12}^* \equiv k_{(1)12}$, $C_{(1)1133}^* \equiv C_{(1)1133}$, $C_{(1)3333}^* \equiv C_{(1)3333}$, $e_{(1)311}^* \equiv e_{(1)311}$, $e_{(1)333}^* \equiv e_{(1)333}$, $h_{(1)311}^* \equiv h_{(1)311}$, $h_{(1)333}^* \equiv h_{(1)333}$, $\lambda_{(1)33}^* \equiv \lambda_{(1)33}$, $\mu_{(1)33}^* \equiv \mu_{(1)33}$, $\kappa_{(1)33}^* \equiv \kappa_{(1)33}$, нечетные слои ячейки имеют электромагнитоупругие свойства 1-й фазы: $C_k = C_1$, $e_k = e_1$, $h_k = h_1$, $\lambda_k = \lambda_1$, $\mu_k = \mu_1$, $\kappa_k = \kappa_1$ для всех $k = 1, 3, \dots, F$, четные слои - свойства 2-й фазы: $C_k = C_2$, $e_k = e_2$, $h_k = h_2$, $\lambda_k = \lambda_2$, $\mu_k = \mu_2$, $\kappa_k = \kappa_2$ для всех $k = 2, 4, \dots, F + 1$ и с учетом $k_{(k)12} = 1/2(C_{(k)1111} + C_{(k)1122})$, $G_{(k)12} = C_{(k)1212}$. Приведенные объемные доли $v_{(k)}$ для $k = \overline{1, F}$ гомогенизированных центральных слоев рассчитываются через заданные радиусы $r_{(k)}$ и $r_{(k+1)}$ концентрических окружностей, ограничивающих $(k+1)$ -й цилиндрический слой ячейки в плоскости изотропии

$$v_{(k)} = (r_{(k)}/r_{(k+1)})^2$$

предельные значения радиусов: $r_{(0)} = 0$, $r_{(F+1)} = \alpha_0$ (32).

Искомые эффективные модули (40) однонаправленно волокнистого композита

$$\begin{aligned} k_{12}^* &= k_{(F+1)12}^*, & C_{1133}^* &= C_{(F+1)1133}^*, & C_{3333}^* &= C_{(F+1)3333}^*, \\ e_{311}^* &= e_{(F+1)311}^*, & e_{333}^* &= e_{(F+1)333}^*, & h_{311}^* &= h_{(F+1)311}^*, & h_{333}^* &= h_{(F+1)333}^*, \\ \lambda_{33}^* &= \lambda_{(F+1)33}^*, & \mu_{33}^* &= \mu_{(F+1)33}^*, & \kappa_{33}^* &= \kappa_{(F+1)33}^* \end{aligned}$$

равны последним членам соответствующих последовательностей (41).

3. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ

Проведем численный расчет коэффициента электромагнитной связи κ_{33}^* (39) для полидисперсных моделей на рис.1,а-г в сравнении с известным асимптотическим решением [14] для однонаправленного волокнистого композита с периодической структурой из пьезоэлектрических волокон в пьезомагнитной ферритовой матрице. Необходимые для расчета упругие, диэлектрические и пьезомеханические постоянные трансверсально-изотропных электроупругих свойств волокон пьезоэлектрика PVF с осью симметрии r_3 и изотропные упругие свойства пьезомагнитной ферритовой матрицы приведены в [10,11,15,16].

На рис.2 представлены результаты расчета (39) эффективного коэффициента электромагнитной связи κ_{33}^* волокнистого пьезоэлектромагнетика в зависимости от объемной доли v_1 пьезоэлектрической фазы PVF в виде волокон (I) или матрицы (II) по известным решениям: $\tilde{\kappa}_{(1)33}^*$ (□), $\tilde{\kappa}_{(2)33}^*$ (△) для традиционных полидисперсных структур (рис.1,а,б) с $v_1 \in (0;1)$ и новым решениям: $\tilde{\kappa}_{(3)33}^*$ (≡), $\tilde{\kappa}_{(4)33}^*$ (≡), $\tilde{\kappa}_{(5)33}^*$ (●) с объемными долями волокон $v_1 \approx 0.65$ (I) и $v_1 \approx 0.35$ при инверсии фаз (II).

Решение $\tilde{\kappa}_{(2)33}^*$ (△) для полидисперсной структуры на рис.1,б инвариантно к инверсии свойств фаз. Решение $\tilde{\kappa}_{(1)33}^*$ (□) для полидисперсной структуры на рис.1,а

$$\tilde{\kappa}_{(1)33}^* = \frac{v_1(1-v_1)\bar{h}_{311}\bar{e}_{311}}{k_{(1)12} - v_1\bar{k}_{12} + G_{(2)12}}$$

для случая (I) композита с пьезоэлектрическими волокнами в ферритовой матрице в точности совпало с решением асимптотического метода усреднения [14] для идеальной периодической волокнистой структуры феррит/пьезоэлектрик, где разности объемных модулей плоской деформации $\bar{k}_{12} = k_{(1)12} - k_{(2)12}$, компонент тензоров электроупругих $\bar{e}_{311} = e_{(1)311} - e_{(2)311}$ и магнитоупругих $\bar{h}_{311} = h_{(1)311} - h_{(2)311}$ свойств фаз, модуль сдвига $G_{(2)12}$ 2-й фазы (матрицы) в плоскости изотропии r_1r_2 .

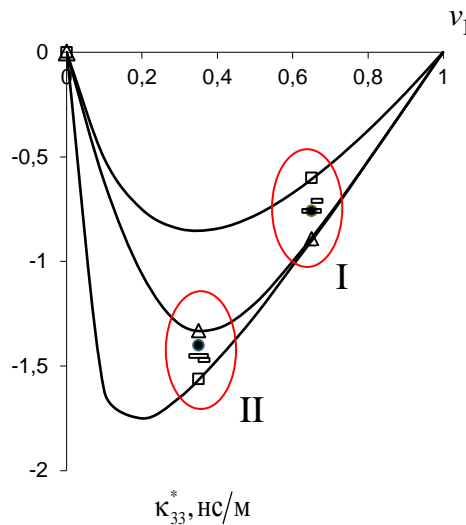


Рис.2. Коэффициент электромагнитной связи κ_{33}^* композита в зависимости от объемной доли пьезоэлектрической фазы v_1 в виде волокон (I) или матрицы (II).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе проведенного сравнительного анализа корреляционных функций реальной и модельных полидисперсных структур сделан вывод о возможности аппроксимации корреляционных функций и представлении решения для тензоров эффективных пьезоэлектромагнитоупругих свойств волокнистых композитов через точные аналитические решения для традиционных и предложенных новых полидисперсных структур. Результаты численных расчетов подтвердили, что корреляционную функцию реальной двухфазной однонаправленной волокнистой структуры в плоскости изотропии практически точно описывает полидисперсная структура из одностипных слоистых двухфазных цилиндрических ячеек. Эффективные свойства композита, в общем, находятся из расчетной схемы – одиночной слоистой ячейки в эффективной среде. Показано, что для осесимметричного электромагнитоупругого нагружения волокнистого двухфазного композита задача расчета эффективных свойств композита сводится к решению осесимметричной задачи для одиночной слоистой цилиндрической ячейки или к рекуррентной последовательности более простых задач на одиночных двухслойных ячейках. Отметим, что в расчетной схеме из одиночной слоистой ячейки в эффективной среде толщины и радиусы чередующихся слоев из обеих фаз вокруг центрального волокна из первой фазы учитывают

особенности взаимного расположения соседних волокон в реальной структуре композита. Можно провести аналогию с расчетной схемой обобщенного метода самосогласования [5] – одиночное включение (волокно) с непрерывно неоднородным переходным слоем в эффективной среде с искомыми эффективными свойствами, где переходный слой также учитывает особенности взаимного расположения элементов структуры в композите. Отличие этих двух подходов состоит в том, что в обобщенном методе самосогласования непрерывно неоднородные свойства переходного слоя вычисляются через свойства, специальные локально осредненные индикаторные функции фаз и искомые эффективные свойства композита, а в полидисперсной структуре из однотипных слоистых двухфазных ячеек толщины и радиусы чередующихся однородных слоев вокруг центрального волокна из первой фазы являются параметрами аппроксимации и вычисляются из условия наилучшего совпадения корреляционных функций модельной полидисперсной и данной реальной структур.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волков С.Д., Ставров В.П. Статистическая механика композитных материалов. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1978. – 208 с.
2. *Torquato S., Stell G.* Microstructure of two-phase random media. I. The n-point probability functions // *J. of Chemical Physics.* – 1982. - Vol.77. - N4. - P.2071-2077.
3. *Monetto I., Drugan W.J.* A micromechanics-based nonlocal constitutive equation for elastic composites containing randomly oriented spheroidal heterogeneities // *J. of the Mechanics and Physics of Solids.* - 2004. - Vol.52. – P.359-393.
4. *Иванов С.Г., Иванов Д.С.* Влияние объемной доли волокон на статистические характеристики композитов случайной структуры // *Механика композиционных материалов и конструкций.* - 2002. - Т.8. - №3. - С.344-350.
5. *Паньков А.А.* Статистическая механика пьезокомпозитов. - Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. - 480 с.
6. *Паньков А.А.* Электромагнитоупругие поля и эффективные свойства пьезокомпозитов с квазипериодическими структурами // *Механика композиционных материалов и конструкций.* - 2012. - Т.18. - №3. – С.345-358.
7. *Pan'kov A.A.* Correlation functions and piezoelectromagnetic properties of structures on the method of correlation components // *Mechanics of Composite Materials.* - 2014. - Vol.50. - N5. - P.681-694.
8. *Паньков А.А.* Влияние разупорядоченности и инверсии фаз на электромагнитную связанность пьезокомпозита с квазипериодической структурой // *Журнал радиоэлектроники: электронный журнал.* – 2014. - №1. - URL: <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/12/text.pdf>
9. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
10. *Pan'kov A.A.* Piezoactive unidirectionally fibrous polydisperse composite // *Mechanics of Composite Materials.* - 2012. - Vol.48. - N6. - P.603-610.
11. *Pankov A.A.* Self-consistent solutions for electromagnetic coupling coefficients of fibrous piezocomposite // *Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal.* – 2014. - Vol.5. - Iss.1. - P.77-88.
12. *Паньков А.А.* Коэффициенты электромагнитной связи композита с пьезоактивными фазами // *Физическая мезомеханика.* - 2011. - Т.14. - №2. – С.93-99.

13. *Pankov A.A.* Damping effect of the composite with piezoelectric inclusions in the shunt electroconductive shell // *Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal.* - 2014. - Vol.5. - Iss.2. - P.147-158.
14. *Гетман И.П.* О магнитоэлектрическом эффекте в пьезокомпозитах // *ДАН СССР.* - 1991. - Т.317. - №2. – С.341-343.
15. *Sessler G.M.* Piezoelectricity in polyvinylidene fluoride // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1981. - Vol.70. - N6. - P.1596-1608.
16. *Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Леценко П.В.* Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.

Поступила в редакцию 17 февраля 2015 года.

Сведения об авторе:

Паньков Андрей Анатольевич – д.ф.-м.н., проф., Кафедра механики композиционных материалов и конструкций, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия; e-mail: mkmk_pr@pstu.ru