

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ С ЦИЛИНДРИЧЕСКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ МАСШТАБНЫХ ЭФФЕКТОВ¹

Волков-Богородский Д.Б., Лурье С.А., Соляев Ю.О., Нужных А.В.*

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

**Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия*

АННОТАЦИЯ

В работе приводится формулировка моделей для прогноза упругих характеристик дисперсных и волокнистых композиционных материалов с учетом масштабных эффектов. Для моделирования эффективных свойств привлекается модель градиентной теории упругости и метод Эшелби. Построение аналитических решений для определения эффективных модулей упругости композитов проводится с использованием обобщенного представления Папковича-Нейбера для функции перемещений и с помощью метода радиальных множителей. Проводятся тестовые расчеты, демонстрирующие характер влияния масштабных эффектов на эффективные характеристики исследуемых композитов.

Ключевые слова: моделирование; эффективные свойства; модули упругости; цилиндрические включения

MODELLING OF THE EFFECTIVE MODULUS OF THE COMPOSITE MATERIALS WITH CYLINDRICAL INCLUSIONS ACROSS THE LENGTH SCALES

Volkov-Bogorodsky D.B., Lurie S.A. Solyaev Y.O., Nuznyh A.V.*

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

**Voronezh State University, Voronezh, Russia*

ABSTRACT

The models for the forecast of elastic characteristics of fibrous composite materials taking into account scale effects is provided in work. For calculations models within the gradient theory of elasticity the method of radial multiplies and generalized Eshelby model is used for the multilayered cylindrical inclusions. To find the analytical solutions for the problem of definition of effective modules of elasticity of composites the generalized Papkovich-Neuber representation is used. The test calculations show significant influence of scale effects on effective characteristics of the studied composites.

Keywords: modeling; effective properties; gradient elasticity; modulus; cylindrical inclusions

¹ Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 15-38-51076 и 15-01-03649.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе для вычисления эффективных механических характеристик дисперсных композитов используются точные математические методы, основанные на точном аналитическом решении вспомогательных задач, рассмотренных в работах Лурье С.А., Волкова-Богородского Д.Б. и др. Используется интегральное равенство Эшелби, замыкающее систему уравнений в методе трех тел [1-3], задача на ячейке периодичности в методе асимптотического усреднения [4-6], и принцип эквивалентной гомогенности [2,4]. Решения проблемы усреднения для классической теории упругости строятся с привлечением классического представления Папковича-Нейбера [7,8] через вектор-потенциалы уравнения Лапласа.

В рамках градиентной теории упругости потенциальная энергия записывается как квадратичная форма от деформаций ε_{ij} и вторых производных от дисторсий, [9-11]

$$E = \frac{1}{2} \int (C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} + C_{ijklmn} R_{i,jk} R_{l,mm}) dV = \frac{1}{2} \int \left[2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + \lambda \theta^2 + \frac{(L_{ij} R_j)(L_{ij} R_j)}{C} \right] dV, \quad (1)$$

Свойства градиентного материала в каждой из фаз определяются помимо классических модулей μ , λ , еще масштабным параметром C , определяющим ширину межфазной зоны.

Перемещения $\mathbf{R} = \{R_i\}$ в рассматриваемой модели могут быть выражены через вспомогательные потенциалы ϕ_0 , f_0 , f и f^* , удовлетворяющие уравнениям Пуассона и Гельмгольца, с использованием обобщенного представления Папковича-Нейбера [12,13])

$$\mathbf{R}(P) = \frac{f_0(P) - f(P)}{\mu} + \nabla \left[\frac{\phi_0 - r f_0(P)}{4\mu(1-\nu)} - \frac{\text{div}(f^* - f)}{C} \right], \quad (2)$$

$$\nabla^2 f_0(P) + F(P) = 0, \quad \nabla^2 \phi_0(P) + r F(P) = 0, \quad 2\nu = \frac{\lambda}{\mu + \lambda}, \quad (3)$$

$$\nabla^2 f(P) - \frac{C}{\mu} f(P) = F(P), \quad \nabla^2 f^*(P) - \frac{C}{k} f^*(P) = F(P), \quad k = 2\mu + \lambda. \quad (4)$$

Сначала, для вычисления эффективных характеристик волокнистых сред, применяется классическая модель многослойного цилиндрического включения. Определение эффективных характеристик структурно-неоднородного тела здесь основано на аналитическом решении обобщенной задачи Эшелби (метод самосогласованных фаз) для многослойного цилиндра, погруженного в изотропный материал с эффективными характеристиками и подверженного однородному напряженно-деформированному состоянию [2,3]. Построение аналитического решения проблемы определения эффективных модулей упругости композита с многослойными цилиндрическими включениями в классической постановке проводится с использованием представления Папковича-Нейбера для функции перемещений [7,8]. Далее в статье впервые дается точное решение проблемы Эшелби для цилиндрических включений, обобщающее известное решение на случай градиентной теории упругости. Решение проблемы Кристенсена в данном случае реализуется для градиентной модели межфазного слоя (1). Отметим, что проблема определения эффективных свойств композитов

со сферическими включениями для градиентной теории упругости была рассмотрена в работах [12-15]. Особенности численной реализации в проблеме определения эффективных свойств композитов методом асимптотического усреднения в градиентной упругости рассмотрены в работах [16,17].

1. МОДЕЛЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВКЛЮЧЕНИЯ

Для вычисления эффективных характеристик волокнистых сред, которые являются в общем случае анизотропными средами, применяется аналогичная модель, основанная на аналитическом решении задачи Эшелби в многослойном цилиндре (рис.1), погруженном в эффективную матрицу. Эта модель позволяет учесть промежуточный межфазный слой (многослойное покрытие включений), и основывается на классическом уравнении теории упругости, в котором перемещения $U = \{U_i\}$ выражаются через вспомогательный вектор-потенциал f_0 , ($\nu \neq 0,25$), удовлетворяющие уравнению Лапласа [7,8],

$$U(P) = \frac{f_0(P)}{\mu} + \frac{\nabla(r f_0)}{4\mu(1-\nu)}, \quad \nabla^2 \phi_0(P) = \nabla^2 f_0(P) = 0.$$

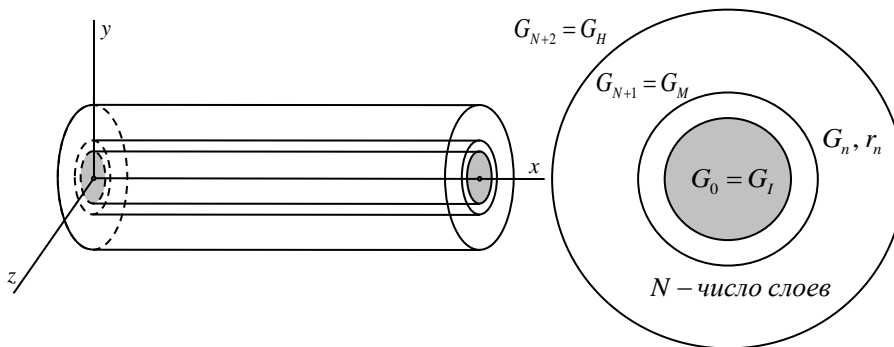


Рис.1. Модель многослойного цилиндра.

Анализируя граничные уравнения контакта: $[U_i] = [p_i(U)] = 0$, представим входящие в них величины (перемещения и поверхностные силы) на цилиндрической поверхности радиуса r с вектором нормали n в следующем виде

$$U_i(P) = \frac{f_i^{(0)}}{\mu} - \frac{1}{4\mu(1-\nu)} \frac{\partial(x_k f_k^{(0)})}{\partial x_i}, \quad (5)$$

$$p_i(U) = \frac{\partial f_i^{(0)}}{\partial n} + n_k \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial x_i} + \frac{\nu}{1-\nu} n_i \frac{\partial f_k^{(0)}}{\partial x_k} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2(x_k f_k^{(0)})}{\partial n \partial x_i}. \quad (6)$$

Сформулируем метод радиальных множителей для классического уравнения теории упругости с условиями идеального контакта на межфазных поверхностях. Для этого с каждым слоем (с включением G_I , матрицей G_M , промежуточными слоями G_n и окружающей эффективной средой G_H , (см. рис.1) свяжем набор базисных потенциалов, построенных с помощью однородного гармонического полинома $f_0^{(H)}(P) = \{f_i^{(H)}\}$ первой степени и функций $\chi_1(r)$ и $\hat{\chi}_1(r)$, зависящих от цилиндрической радиальной координаты $r = \sqrt{y^2 + z^2}$

$$f_1^{(0)}(P) = f_0^{(H)}(P), \quad f_2^{(0)}(P) = \hat{\chi}_1(r) f_0^{(H)}(P), \quad (7)$$

$$f_3^{(0)}(P) = \nabla \operatorname{div}(\hat{\chi}_1(r) f_0^{(H)}), \quad f_4^{(0)}(P) = \chi_1(r) \nabla \operatorname{div}(\hat{\chi}_1(r) f_0^{(H)}), \quad (8)$$

где $\chi_1(r) = r^6$, $\hat{\chi}_1(r) = r^{-2}$.

Составим комбинации гармонических потенциалов f_0 , определяющих решение $U(P)$ классического уравнения Ляме в областях G_I , G_n , G_M и G_H на основе представления (5)

$$f_0(P) = A_0 f_0^{(H)} + D_0 \chi_1 \nabla \operatorname{div}(\hat{\chi}_1 f_0^{(H)}), \quad P \in G_I, \quad (9)$$

$$f_0(P) = A_n f_0^{(H)} + B_n \hat{\chi}_1 f_0^{(H)} + C_n \nabla \operatorname{div}(\hat{\chi}_1 f_0^{(H)}) + D_n \chi_1 \nabla \operatorname{div}(\hat{\chi}_1 f_0^{(H)}), \quad P \in G_n, \quad (10)$$

$$f_0(P) = f_0^{(H)} + B_{N+2} \hat{\chi}_1 f_0^{(H)} + C_{N+2} \nabla \operatorname{div}(\hat{\chi}_1 f_0^{(H)}), \quad P \in G_H. \quad (11)$$

Для каждого из потенциалов (5), (6) величины (7), (8), входящие в контактные уравнения представляются в форме произведений с некоторыми коэффициентами $A(r)$ и $B(r)$ относительно $f_n^{(H)} = (\mathbf{n} f_0^{(H)})$ и $f_s^{(H)} = f_0^{(H)} - \mathbf{n}(\mathbf{n} f_0^{(H)})$. Следовательно, контактные уравнения могут быть представлены на межфазных границах в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов при базисных потенциалах (9)-(11).

Для "плоской" объемной деформации $f_0 = \{0, y, z\}$ потенциалы (8) автоматически равны нулю, поэтому часть констант, а именно: C_n , D_n , не участвует в контактных уравнениях. В случае девиаторной деформации одному векторному уравнению соответствует два алгебраических уравнения, соответственно для нормальной и касательной составляющей векторного поля. Поэтому общее число базисных потенциалов в представлениях (9)-(11) для каждой из подобластей G_I , G_n и G_H совпадает с общим числом контактных уравнений на межфазных границах (для объемной деформации это $4N + 7$ уравнений, для девиаторной деформации это $8N + 14$ уравнений).

Определение эффективных характеристик структурно-неоднородного тела по методу нескольких цилиндрических тел основывается на аналитическом решении обобщенной задачи Эшелби в многослойном цилиндре, погруженному в изотропный материал с эффективными характеристиками, и подверженному некоторому однородному напряженно-деформированному состоянию, соответствующему определяемой характеристике.

Для вычисления эффективного "плоского" объемного модуля $K_H = (C_{2222} + C_{3333})/2$ многослойная конструкция подвергается всестороннему растяжению в поперечной плоскости, определяемому функцией $f_0^{(H)} = \{0, y, z\}$; для вычисления эффективного модуля сдвига в поперечной плоскости $\mu_H^{(1)} = C_{1212}$ наша конструкция подвергается деформации чистого сдвига $f_0^{(H)} = \{0, -y, z\}$; а для вычисления продольного модуля растяжения/сжатия $k_H = C_{1111}$ и поперечного модуля Ляме $\lambda_H^{(2)} = C_{1122} = C_{1133}$ наша конструкция подвергается растяжению вдоль оси многослойного цилиндра $f_0^{(H)} = \{x, 0, 0\}$; и наконец, для вычисления модуля сдвига в продольной плоскости $\mu_H^{(2)} = C_{1212} = C_{1313}$

мы подвергаем нашу структуру деформации чистого сдвига вдоль образующей многослойного цилиндра $\mathbf{f}_0^{(H)} = \{x, -y/2, -z/2\}$.

Эффективные характеристики окружающего многослойный цилиндр материала определяются из энергетического равенства Эшелби, заключающегося в равенстве нулю приращения энергии при замене однородного тела с эффективными характеристиками на составное тело [2,3], состоящее из многослойного цилиндра, погруженному в бесконечное пространство, заполненное изотропным классическим материалом с эффективными модулями (рис.1). При этом неизвестные эффективные характеристики рассматриваются как дополнительные неизвестные переменные, а энергетическое уравнение Эшелби – как дополнительное уравнение к системе линейных алгебраических уравнений в задаче Эшелби.

Используя энергетическое равенство Эшелби во всех рассмотренных случаях, получаем дополнительное уравнение в единообразном виде $B_2 = 0$.

Дадим вид классических компонентов (5), (6) для потенциалов (7), (8) в разложении (4) в случае "плоской" объемной деформации. В этом случае для базисного гармонического полинома на поверхности цилиндра выполняется соотношение $\operatorname{div} \mathbf{f}_0^{(H)} = 2f_n^{(H)}/r$, а также используем соотношение $\nabla(\mathbf{r} \mathbf{f}_0^{(H)}) = 2\mathbf{f}_0^{(H)}$, справедливое для функций первого порядка.

Потенциал $f_1^{(0)}$ на поверхности цилиндра радиуса r порождает нормальные компоненты следующего вида

$$U_n = \frac{(1-2\nu)f_n^{(H)}}{2\mu(1-\nu)}, \quad \frac{\partial U_n}{\partial n} = \frac{U_n}{r}, \quad p_n = \frac{f_n^{(H)}}{(1-\nu)r}.$$

Потенциал $f_2^{(0)}$ на цилиндрической поверхности

$$U_n = \frac{f_n^{(H)}}{\mu r^2}, \quad \frac{\partial U_n}{\partial n} = -\frac{U_n}{r}, \quad p_n = -\frac{2f_n^{(H)}}{r^3}.$$

В случае девиаторной деформации (необходимой в дальнейшем для вычисления модуля сдвига в поперечной плоскости) компоненты (5), (6) в разложении (4) для потенциалов (7), (8) имеют следующий вид. При выводе соответствующих формул используются соотношения $\operatorname{div} \mathbf{f}_0^{(H)} = 0$, $\nabla(\mathbf{r} \mathbf{f}_0^{(H)}) = 2\mathbf{f}_0^{(H)}$.

Потенциал $f_1^{(0)}$ для цилиндрических включений порождает нормальные и касательные компоненты следующего вида

$$U_n = \frac{(1-2\nu)f_n^{(H)}}{2\mu(1-\nu)}, \quad U_s = \frac{(1-2\nu)f_s^{(H)}}{2\mu(1-\nu)}, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{U}{r},$$

$$p_n = \frac{(1-2\nu)f_n^{(H)}}{(1-\nu)r}, \quad p_s = \frac{(1-2\nu)f_s^{(H)}}{(1-\nu)r}.$$

Потенциал $f_2^{(0)}$ для цилиндрических включений

$$U_n = \frac{f_n^{(H)}}{\mu r^2}, \quad U_s = \frac{(1-2\nu)f_s^{(H)}}{2\mu(1-\nu)r^2}, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{U}{r},$$

$$p_n = -\frac{2 f_n^{(H)}}{(1-\nu) r^3} \mathbf{p}_s = \frac{f_s^{(H)}}{(1-\nu) r^3}.$$

Потенциал $f_3^{(0)}$ для цилиндрических включений

$$U_n = \frac{\beta_\nu f_n^{(H)}}{\mu(1-\nu) r^4}, \quad U_s = -\frac{\beta_\nu f_s^{(H)}}{\mu(1-\nu) r^4}, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{3U}{r},$$

$$p_n = -\frac{12\beta_\nu f_n^{(H)}}{(1-\nu) r^5}, \quad p_s = \frac{12\beta_\nu f_s^{(H)}}{(1-\nu) r^5}, \quad \beta_\nu = (3-2\nu).$$

Потенциал $f_4^{(0)}$ для цилиндрических включений

$$U_n = -\frac{4\nu r^2 f_n^{(H)}}{\mu(1-\nu)}, \quad U_s = -\frac{2(3-2\nu) r^2 f_s^{(H)}}{\mu(1-\nu)}, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = \frac{3U}{r},$$

$$p_n = 0, \quad p_s = -\frac{12r f_s^{(H)}}{1-\nu}.$$

Рассмотрим систему уравнений для определения эффективного "плоского" объемного модуля $K_H = (C_{2222} + C_{3333})/2$, соответствующую $f_0^{(H)} = \{0, y, z\}$. Собирая все коэффициенты при $f_n^{(H)}$ в граничных уравнениях получаем на стыке областей G_n и G_{n+1}

$$A_n \frac{(1-2\nu_n)}{2\mu_n(1-\nu_n)} + B_n \frac{1}{\mu_n r_n^2} = A_{n+1} \frac{(1-2\nu_{n+1})}{2\mu_{n+1}(1-\nu_{n+1})} + B_{n+1} \frac{1}{\mu_{n+1} r_n^2},$$

$$\frac{A_n}{1-\nu_n} - \frac{2B_n}{r_n^2} = \frac{A_{n+1}}{1-\nu_{n+1}} - \frac{2B_{n+1}}{r_n^2}.$$

Преобразуем эти уравнения, делая перенормировку коэффициентов с целью выделить в явном виде модуль $K_n = \mu_n + \lambda_n = \mu_n/(1-2\nu_n)$

$$A_n \frac{(1-2\nu_n)}{2\mu_n(1-\nu_n)} = \hat{A}_n, \quad \frac{B_n}{\mu_n r_n^2} = \hat{B}_n.$$

Запишем серию уравнений на границе G_n и G_{n+1} после нормировки (крышку над нормированной переменной убираем), где $s_n = (r_{n-1}/r_n)^2$

$$A_n + s_n B_n = A_{n+1} + B_{n+1},$$

$$K_n A_n - \mu_n s_n B_n = K_{n+1} A_{n+1} - \mu_{n+1} B_{n+1}.$$

Запишем также серию уравнений на границе включения $G_0 = G_I$

$$A_0 = A_1 + B_1, \quad K_I A_0 = K_1 A_1 - \mu_1 B_1.$$

и серию уравнений на границе эффективной среды $G_{N+2} = G_H$ с учетом неизвестного эффективного модуля K_H , входящего в систему уравнений в качестве дополнительной неизвестной переменной и равенства нулю константы B_{N+2}

$$A_{N+1} + c_0 B_{N+1} = 1, \quad K_M A_{N+1} - c_0 \mu_M B_{N+1} = K_H.$$

Здесь $c_0 = s_{N+1} = (r_N/r_{N+1})^2$ – объемная концентрация включений с учетом всех слоев; r_{N+1} – радиус области G_M в рассматриваемой многослойной модели.

Таким образом, мы получили систему линейных уравнений размерности $(2N+4) \times (2N+4)$ для $(2N+4)$ неизвестных A_n , $n = 0 \div (N+1)$, B_n , $n = 1 \div (N+1)$ и K_H . Разрешая эту систему относительно всех неизвестных, находим эффективный модуль K_H .

Задача определения эффективного модуля $\mu_H^{(1)} = C_{1212}$ в поперечной плоскости основывается на состоянии чистого сдвига $f_0^{(H)} = \{0, -y, z\}$, не сводящемся к одномерной задаче, и является полноценной векторной задачей. Собирая все коэффициенты при $f_n^{(H)}$ и $f_s^{(H)}$ в контактных уравнениях на границах фаз, получаем на стыке областей G_n и G_{n+1} следующие уравнения

$$\begin{aligned} & A_n \frac{(1-2\nu_n)}{2\mu_n(1-\nu_n)} + B_n \frac{1}{\mu_n r_n^2} + C_n \frac{(3-2\nu_n)}{\mu_n(1-\nu_n)r_n^4} - D_n \frac{4\nu_n r_n^2}{\mu_n(1-\nu_n)} = \\ & = A_{n+1} \frac{(1-2\nu_{n+1})}{2\mu_{n+1}(1-\nu_{n+1})} + B_{n+1} \frac{1}{\mu_{n+1} r_{n+1}^2} + C_{n+1} \frac{(3-2\nu_{n+1})}{\mu_{n+1}(1-\nu_{n+1})r_{n+1}^4} - D_{n+1} \frac{4\nu_{n+1} r_{n+1}^2}{\mu_{n+1}(1-\nu_{n+1})}, \\ & \frac{A_n(1-2\nu_n)}{2\mu_n(1-\nu_n)} + \frac{B_n(1-2\nu_n)}{2\mu_n(1-\nu_n)r_n^2} - \frac{C_n(3-2\nu_n)}{\mu_n(1-\nu_n)r_n^4} - D_n \frac{2(3-2\nu_n)r_n^2}{\mu_n(1-\nu_n)} = \\ & = \frac{A_{n+1}(1-2\nu_{n+1})}{2\mu_{n+1}(1-\nu_{n+1})} + \frac{B_{n+1}(1-2\nu_{n+1})}{2\mu_{n+1}(1-\nu_{n+1})r_{n+1}^2} - \frac{C_{n+1}(3-2\nu_{n+1})}{\mu_{n+1}(1-\nu_{n+1})r_{n+1}^4} - D_{n+1} \frac{2(3-2\nu_{n+1})r_{n+1}^2}{\mu_{n+1}(1-\nu_{n+1})}, \\ & A_n \frac{1-2\nu_n}{1-\nu_n} - \frac{2B_n}{(1-\nu_n)r_n^2} - C_n \frac{12(3-2\nu_n)}{(1-\nu_n)r_n^4} = A_{n+1} \frac{1-2\nu_{n+1}}{1-\nu_{n+1}} - \frac{2B_{n+1}}{(1-\nu_{n+1})r_{n+1}^2} - C_{n+1} \frac{12(3-2\nu_{n+1})}{(1-\nu_{n+1})r_{n+1}^4}, \\ & A_n \frac{1-2\nu_n}{1-\nu_n} + \frac{B_n}{(1-\nu_n)r_n^2} + C_n \frac{12(3-2\nu_n)}{(1-\nu_n)r_n^4} - D_n \frac{12r_n^2}{1-\nu_n} = \\ & = A_{n+1} \frac{1-2\nu_{n+1}}{1-\nu_{n+1}} + \frac{B_{n+1}}{(1-\nu_{n+1})r_{n+1}^2} + C_{n+1} \frac{12(3-2\nu_{n+1})}{(1-\nu_{n+1})r_{n+1}^4} - D_{n+1} \frac{12r_{n+1}^2}{1-\nu_{n+1}}. \end{aligned}$$

Преобразуем эти уравнения, делая перенормировку коэффициентов с целью выделить в явном виде модуль сдвига в поперечном направлении

$$\begin{aligned} \frac{A_n(1-2\nu_n)}{2\mu_n(1-\nu_n)} &= \hat{A}_n, & \frac{B_n}{\mu_n(1-\nu_n)r_{n-1}^2} &= \hat{B}_n, \\ \frac{C_n(3-2\nu_n)}{\mu_n(1-\nu_n)r_{n-1}^4} &= \hat{C}_n, & \frac{D_n}{\mu_n(1-\nu_n)} &= \hat{D}_n. \end{aligned}$$

Запишем серию уравнений на границе G_n и G_{n+1} после нормировки (крышку над нормированной переменной убираем), где $s_n = (r_{n-1}/r_n)^2$

$$A_n + s_n(1-\nu_n)B_n + s_n^2 C_n - 4r_n^2 \nu_n D_n = A_{n+1} + B_{n+1}(1-\nu_{n+1}) + C_{n+1} - 4r_n^2 \nu_{n+1} D_{n+1},$$

$$\begin{aligned} A_n + s_n B_n \frac{(1-2\nu_n)}{2} - s_n^2 C_n - 2r_n^2 D_n (3-2\nu_n) &= \\ &= A_{n+1} + B_{n+1} \frac{(1-2\nu_{n+1})}{2} - C_{n+1} - 2r_n^2 D_{n+1} (3-2\nu_{n+1}), \end{aligned}$$

$$\mu_n A_n - s_n \mu_n B_n - 6s_n^2 \mu_n C_n = \mu_{n+1} A_{n+1} - \mu_{n+1} B_{n+1} - 6\mu_{n+1} C_{n+1},$$

$$\mu_n A_n + \frac{s_n \mu_n B_n}{2} + 6s_n^2 \mu_n C_n - 6r_n^2 D_n \mu_n = \mu_{n+1} A_{n+1} + \frac{\mu_{n+1} B_{n+1}}{2} + 6\mu_{n+1} C_{n+1} - 6r_{n+1}^2 \mu_{n+1} D_{n+1}.$$

Серия уравнений на границе включения $G_0 = G_I$

$$\begin{aligned} A_0 - 4r_0^2 \nu_I D_0 &= A_1 + B_1(1 - \nu_I) + C_1 - 4r_0^2 \nu_I D_1, \\ A_0 - 2r_0^2 D_0(3 - 2\nu_I) &= A_1 + \frac{B_1(1 - 2\nu_I)}{2} - C_1 - 2r_0^2 D_1(3 - 2\nu_I), \\ \mu_I A_0 &= \mu_I A_1 - \mu_I B_1 - 6\mu_I C_1, \\ \mu_I A_0 - 6r_0^2 D_0 \mu_I &= \mu_I A_1 + \frac{\mu_I B_1}{2} + 6\mu_I C_1 - 6r_1^2 \mu_I D_1. \end{aligned}$$

И серия уравнений на границе эффективной среды $G_{N+2} = G_H$ с учетом неизвестного эффективного модуля $\mu_H^{(1)}$, входящего в систему уравнений в качестве дополнительной неизвестной

$$\begin{aligned} A_{N+1} + c_0 B_{N+1}(1 - \nu_M) - 4r_{N+1}^2 \nu_M D_{N+1} &= 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{\mu_H}{2K_H} \right) B_{N+2}, \\ A_{N+1} + c_0 B_{N+1} \frac{(1 - 2\nu_M)}{2} - c_0^2 C_{N+1} - 2r_{N+1}^2 D_{N+1}(3 - 2\nu_M) &= 1 + \frac{\mu_H}{2K_H} B_{N+2} - C_{N+2}, \\ \mu_M A_{N+1} - c_0 \mu_M B_{N+1} - 6c_0^2 \mu_M C_{N+1} &= \mu_H - \mu_H B_{N+2} - 6\mu_H C_{N+2}, \\ \mu_M A_{N+1} + \frac{c_0 \mu_M B_{N+1}}{2} + 6c_0^2 \mu_M C_{N+1} - 6r_{N+1}^2 \mu_M D_{N+1} &= \mu_H + \frac{\mu_H}{2} B_{N+2} + 6\mu_H C_{N+2}. \end{aligned}$$

Здесь $c_0 = s_{N+1} = (r_N / r_{N+1})^2$ – объемная концентрация включений с учетом всех слоев; r_{N+1} – радиус области G_M . Неопределенная константа ν_H была выражена через K_H и неизвестное $\mu_H^{(1)}$: $\nu_H = (1 - \mu_H^{(1)} / K_H) / 2$.

Таким образом, мы получили систему линейных уравнений размерности $(4N + 8) \times (4N + 8)$ для $(4N + 8)$ неизвестных $A_n, D_n, n = 0 \div (N + 1), B_n, C_n, n = 1 \div (N + 1)$ и B_{N+2}, C_{N+2} . Разрешая эту систему относительно всех неизвестных, находим коэффициент B_{N+2} , который должен равняться нулю по условиям самосогласования по энергии. Для выполнения этого условия устраиваем итерационный процесс, в котором изменяется эффективный модуль $\mu_H^{(1)}$ до тех пор, пока не будет выполнено условие $B_{N+2} = 0$. Зависимость коэффициента B_{N+2} от $\mu_H^{(1)}$ нелинейная. Здесь мы получаем трансцендентное уравнение, разрешаемое итерационным способом.

Рассмотрим задачу определения эффективных модулей $k_H = C_{1111}$ и $\lambda_H^{(2)} = C_{1122} = C_{1133}$ на основе деформации растяжения $f_0^{(H)} = \{x, 0, 0\}$. В направлении оси x нет межфазных границ, поэтому когезионное поле в этом направлении не действует, в каждой фазе материала перемещение $u_1(x)$ – линейная функция, и, следовательно, эффективный модуль k_H определяется по правилу смеси.

Однако в поперечном направлении действует поперечное "плоское" объемное напряжение $\{\sigma_{22}, \sigma_{33}\}$, которое определяет поперечный модуль $\lambda_H^{(2)}$. Общее напряженно-деформированное состояние определяется суммой двух состояний: линейного по x и всестороннего плоского, действующего

в поперечном направлении и компенсирующего поперечные напряжения при растяжении по оси x .

Таким образом, мы рассматриваем многослойный цилиндр, погруженный в эффективную матрицу с параметрами k_H и неизвестным λ_H , которое определяется из условия однородности напряженно-деформированного состояния во всей эффективной матрице.

Запишем уравнения в поперечном направлении на основе всесторонней плоской деформации, действующей на цилиндр в поперечном направлении и компенсирующей скачки напряжений на межфазных границах, вызванные линейным растяжением в направлении оси x . Нормируя коэффициенты A_n и B_n несколько по-другому, чтобы выделить модуль λ_n в явном виде, получаем

$$A_n \frac{(1-2\nu_n)}{2\mu_n \nu_n (1-\nu_n)} = \hat{A}_n, \quad \frac{B_n}{\mu_n r_{n-1}^2} = \hat{B}_n.$$

Запишем серию уравнений для поперечных напряжений на границе G_n и G_{n+1} после нормировки

$$\begin{aligned} \nu_n A_n + s_n B_n &= \nu_{n+1} A_{n+1} + B_{n+1}, \\ \lambda_n A_n - 2\mu_n s_n B_n + \lambda_n &= \lambda_{n+1} A_{n+1} - 2\mu_{n+1} B_{n+1} + \lambda_{n+1}. \end{aligned}$$

Серия уравнений на границе включения $G_0 = G_I$

$$\begin{aligned} \nu_I A_0 &= \nu_I A_1 + B_1, \\ \lambda_I A_0 + \lambda_I &= \lambda_I A_1 - 2\mu_I B_1 + \lambda_I. \end{aligned}$$

И серию уравнений на границе эффективной среды $G_{N+2} = G_H$ с учетом неизвестного эффективного модуля $\lambda_H^{(2)}$, входящего в систему уравнений в качестве дополнительной неизвестной переменной и равенства нулю константы B_{N+2}

$$\nu_M A_{N+1} + c_0 B_{N+1} = 0, \quad \lambda_M A_{N+1} - 2c_0 \mu_M B_{N+1} + \lambda_M = \lambda_H^{(2)}.$$

Здесь $c_0 = s_{N+1} = (r_N/r_{N+1})^2$ – объемная концентрация включений с учетом всех слоев; r_{N+1} – радиус области G_M в рассматриваемой многослойной модели, который зависит от выбора радиуса r_0 области G_I ; возможны разные нормировки в рассматриваемой модели: $r_0 = 1$ или $r_{N+1} = 1$.

Таким образом, мы получили систему линейных уравнений размерности $(2N+4) \times (2N+4)$ для $(2N+4)$ неизвестных A_n , $n = 0 \div (N+1)$, B_n , $n = 1 \div (N+1)$ и $\lambda_H^{(2)}$. Разрешая эту систему относительно всех неизвестных, находим эффективный модуль $\lambda_H^{(2)}$.

Задача определения эффективного модуля $\mu_H^{(2)} = C_{1212} = C_{1313}$ в плоскости вдоль образующей цилиндра определяется полностью аналогично предыдущему на основе деформации чистого сдвига в продольной плоскости $\mathbf{f}_0^{(H)} = \{x, -y/2, -z/2\}$, скачки напряжений в поперечном направлении от которого компенсируются всесторонним плоским растяжением, действующим в поперечном направлении.

Таким образом, мы рассматриваем многослойный цилиндр, погруженный в эффективную матрицу с неизвестным модулем сдвига $\mu_H^{(2)}$, которое определяется из условия однородности напряженно-деформированного состояния во всей эффективной матрице.

Запишем уравнения в поперечном направлении на основе всесторонней плоской деформации, действующей на цилиндр в направлении и компенсирующей скачки напряжений на межфазных границах, вызванные деформацией чистого сдвига в направлении оси x . Нормируя коэффициенты A_n и B_n таким образом, чтобы выделить модуль μ_n в явном виде, получаем

$$\frac{A_n}{2\mu_n(1-\nu_n)} = \hat{A}_n, \quad \frac{B_n}{\mu_n r_{n-1}^2} = \hat{B}_n.$$

Запишем систему уравнений для поперечных напряжений на границе G_n и G_{n+1} после нормировки под задачу сдвига

$$(1-2\nu_n)A_n + s_n B_n = (1-2\nu_{n+1})A_{n+1} + B_{n+1}$$

$$\mu_n A_n - \mu_n s_n B_n - \mu_n = \mu_{n+1} A_{n+1} - \mu_{n+1} B_{n+1} - \mu_{n+1}.$$

Запишем серию уравнений на границе включения $G_0 = G_I$

$$(1-2\nu_I)A_0 = (1-2\nu_1)A_1 + B_1, \quad \mu_I A_0 - \mu_I = \mu_1 A_1 - \mu_1 B_1 - \mu_1.$$

Запишем систему уравнений на границе эффективной среды $G_{N+2} = G_H$ с учетом неизвестного эффективного модуля $\mu_H^{(2)}$, входящего в систему уравнений в качестве дополнительной неизвестной переменной, и равенства нулю константы B_{N+2}

$$(1-2\nu_M)A_{N+1} + c_0 B_{N+1} = 0, \quad \mu_M A_{N+1} - c_0 \mu_M B_{N+1} - \mu_M = -\mu_H^{(2)}.$$

Здесь $c_0 = s_{N+1} = (r_N/r_{N+1})^2$ – объемная концентрация включений с учетом всех слоев; r_{N+1} – радиус области G_M в рассматриваемой многослойной модели, который зависит от выбора радиуса r_0 области G_I ; возможны разные нормировки в рассматриваемой модели: $r_0 = 1$ или $r_{N+1} = 1$.

Таким образом, мы получили систему линейных уравнений размерности $(2N+4) \times (2N+4)$ для $(2N+4)$ неизвестных A_n , $n = 0 \div (N+1)$, B_n , $n = 1 \div (N+1)$ и $\mu_H^{(2)}$. Разрешая эту систему относительно всех неизвестных, находим эффективный модуль $\mu_H^{(2)}$.

Изложенные в этом пункте алгоритмы позволяют определить эффективные механические характеристики структурно-неоднородного материала, армированного включениями, имеющими структуру однонаправленных волокон с множественным поверхностным слоем и трактуемого как трансверсально-изотропный материал, путем формирования (на основе механических и долевых характеристик каждого слоя и включения) системы линейных алгебраических уравнений небольшой размерности.

В итоге мы получаем все необходимые характеристики: K_H , $\mu_H^{(1)}$, k_H , $\lambda_H^{(2)}$ и $\mu_H^{(2)}$, в результате решения системы линейных алгебраических уравнений размерности $(4N+8) \times (4N+8)$ и $(2N+4) \times (2N+4)$, где N – число поверхностных слоев.

2. ГРАДИЕНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Для градиентной модели теории упругости (2)-(4) в решение добавляются дополнительные слагаемые, связанные с когезионным полем $\mathbf{u}(P)$ [12,13], входящим в общее решение $\mathbf{R}(P)$ теории упругости и определяемые гельмгольцевскими потенциалами $\mathbf{f}(P)$ и $\mathbf{f}^*(P)$ с масштабными параметрами $\kappa = \sqrt{C/\mu}$ и $\kappa^* = \sqrt{C/(2\mu + \lambda)}$, которые имеют размерность обратного расстояния

$$\mathbf{u}(P) = \frac{\mathbf{f}(P)}{\mu} - \frac{\nabla \operatorname{div}(\mathbf{f}^* - \mathbf{f})}{C}, \quad (12)$$

$$\nabla^2 \mathbf{f}(P) - \kappa^2 \mathbf{f}(P) = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{f}^*(P) - \kappa^* \mathbf{f}^*(P) = 0.$$

Метод радиальных множителей для однородного уравнения (12) для градиентной упругости [14,15] с контактными условиями

$$\begin{aligned} [U_i - u_i] &= \left[\frac{\partial U_i}{\partial n} - \frac{\partial u_i}{\partial n} \right] = 0, \quad [M_{i(n)}] = [p_i(\mathbf{U}) - \hat{p}_i(\mathbf{u})] = 0, \\ \hat{p}_i(\mathbf{u}) &= \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial M_{i(n)}}{\partial n}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} M_{ij} &= -\mu u_i n_j - \frac{\mu + \lambda}{2} (u_j n_i + u_k n_k \delta_{ij}), \\ M_{i(n)} &= -\mu u_i - (\mu + \lambda) u_k n_k n_i, \end{aligned} \quad (14)$$

формулируется аналогичным образом. Для этого с каждым слоем свяжем дополнительный набор базисных потенциалов, построенных с помощью однородного гармонического полинома $\mathbf{f}_0^{(H)}(P)$ и радиальных функций $h_1(r)$,

$\hat{h}_1(r)$, $h_1^*(r)$, $\hat{h}_1^*(r)$, зависящих от радиальной координаты $r = \sqrt{y^2 + z^2}$

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_5(P) &= h_1(r) \mathbf{f}_0^{(H)}, \quad \mathbf{f}_6(P) = \hat{h}_1(r) \mathbf{f}_0^{(H)}, \\ \mathbf{f}_7^*(P) &= h_1^*(r) \mathbf{f}_0^{(H)}, \quad \mathbf{f}_8^*(P) = \hat{h}_1^*(r) \mathbf{f}_0^{(H)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь $h_1(r) = r^{-1} I_1(\kappa r)$, $\hat{h}_1(r) = r^{-1} K_1(\kappa r)$, аналогично для $h_1^*(r)$ и $\hat{h}_1^*(r)$ с заменой κ на κ^* , $I_1(z)$ и $K_1(z)$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго рода первого порядка (см. [18]).

Радиальные функции h_1 и h_1^* являются регулярными, а \hat{h}_1 и \hat{h}_1^* – сингулярными в области определения. Более того, они определяются путем дифференцирования фундаментального решения уравнения Гельмгольца в 2D

$$h_1 = C_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) I_0(\kappa r), \quad \hat{h}_1 = C_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) K_0(\kappa r),$$

где $I_0(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $K_0(z)$ – функция Макдональда нулевого порядка [18]. Благодаря этим свойствам потенциалы (15) удовлетворяют необходимым уравнениям Гельмгольца.

Составим комбинации гельмгольцевских потенциалов \mathbf{f} и \mathbf{f}^* , определяющих когезионное поле $\mathbf{u}(P)$ в областях G_I и G_n , (в области G_H когезионное поле отсутствует)

$$\mathbf{f}(P) = A_0^* h_1(r) \mathbf{f}_0^{(H)}, \quad \mathbf{f}^*(P) = D_0^* h_1^*(r) \mathbf{f}_0^{(H)}, \quad P \in G_I, \quad (16)$$

$$\mathbf{f}(P) = \left[A_n^* h_1(r) + B_n^* \hat{h}_1(r) \right] \mathbf{f}_0^{(H)},$$

$$\mathbf{f}^*(P) = \left[C_n^* h_1^*(r) + D_n^* \hat{h}_1^*(r) \right] \mathbf{f}_0^{(H)}, \quad P \in G_n. \quad (17)$$

Прежде, чем записать разложения для когезионных компонент (13), (14), введем семейство радиальных функций при целом индексе $n \geq 0$

$$h_n(r) = C_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^n I_0(\kappa r),$$

$$\hat{h}_n(r) = C_1 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^n K_0(\kappa r), \quad r = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad (18)$$

связанных между собой рекуррентными соотношениями

$$r^2 h_{n+2} = \kappa^2 h_n - 2(n+1) h_{n+1}, \quad h'_n = \frac{\kappa r (h_n - h_n'')}{2n+1}. \quad (19)$$

Аналогично для $\{\hat{h}_n(r)\}$, $\{h_n^*(r)\}$ и $\{\hat{h}_n^*(r)\}$ с заменой масштабного параметра κ на κ^* .

Обозначая символами без звездочки величины, соответствующие $h_n(r)$, а символами со звездочкой – соответствующие $h_n^*(r)$, получаем для цилиндрических включений и для девiatorного поля деформаций $\varepsilon_{ii}^{(0)} = 0$

$$u_n = \frac{2h_2}{C} f_n^{(H)}, \quad \frac{\partial u_n}{\partial n} = \frac{2}{r} \left(\frac{h_1}{\mu} - \frac{3h_2}{C} \right) f_n^{(H)},$$

$$\hat{p}_n = \frac{1}{r} \left(\frac{(\mu + \lambda)h_1}{\mu} - \frac{(9\mu + 5\lambda)h_2}{C} \right) f_n^{(H)},$$

$$u_n^* = \left(\frac{h_1^*}{2\mu + \lambda} - \frac{2h_2^*}{C} \right) f_n^{(H)}, \quad \frac{\partial u_n^*}{\partial n} = \left(\frac{r^2 h_2^* - h_1^*}{2\mu + \lambda} + \frac{6h_2^*}{C} \right) \frac{f_n^{(H)}}{r},$$

$$\hat{p}_n^* = - \left(\frac{(7\mu + 3\lambda)h_1^*}{2(2\mu + \lambda)} - \frac{(9\mu + 5\lambda)h_2^*}{C} \right) \frac{f_n^{(H)}}{r},$$

$$u_s = \left(\frac{h_1}{\mu} - \frac{2h_2}{C} \right) f_s^{(H)}, \quad \frac{\partial u_s}{\partial n} = \left(\frac{r^2 h_2 - h_1}{\mu} + \frac{6h_2}{C} \right) \frac{f_s^{(H)}}{r},$$

$$\hat{p}_s = - \left(\frac{(5\mu + \lambda)h_1}{2\mu} - \frac{(3\mu - \lambda)h_2}{C} \right) \frac{f_s^{(H)}}{r},$$

$$u_s^* = \frac{2h_2^*}{C} f_s^{(H)}, \quad \frac{\partial u_s^*}{\partial n} = \frac{2}{r} \left(\frac{h_1^*}{2\mu + \lambda} - \frac{3h_2^*}{C} \right) f_s^{(H)},$$

$$\hat{p}_s^* = - \left(\frac{(\mu + \lambda)h_1^*}{2\mu + \lambda} + \frac{(3\mu - \lambda)h_2^*}{C} \right) \frac{f_s^{(H)}}{r}.$$

В случае всесторонней плоской деформации компоненты контактных условий (13), (14) имеют вид

$$u_n^* = \frac{h_1^*}{2\mu + \lambda} f_n^{(H)}, \quad \frac{\partial u_n^*}{\partial n} = \frac{r^2 h_2^* + h_1^*}{2\mu + \lambda} \frac{f_n^{(H)}}{r}, \quad \hat{p}_n^* = - \frac{(7\mu + 3\lambda)h_1^*}{2(2\mu + \lambda)} \frac{f_n^{(H)}}{r}.$$

Все остальные компоненты, необходимые для записи контактных условий, однозначно определяются через приведенные выше величины.

Таким образом, решение обобщенной задачи Эшелби для градиентной модели (2)-(4), (12) для многослойных цилиндрических включений сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений удвоенной размерности относительно коэффициентов в представлениях (9)-(11) и (16), (17), формируемых на основе радиальных множителей $\chi_1(r)$, $\hat{\chi}_1(r)$, $h_1(r)$, $\hat{h}_1(r)$, $h_1^*(r)$ и $\hat{h}_1^*(r)$ для величин, входящих в контактные уравнения (13), (14) на межфазных границах. В остальном алгоритм вычисления эффективных механических характеристик структурно-неоднородного материала, армированного многослойными волокнистыми включениями аналогичен предыдущему случаю.

3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ

На рис.2 представлен тестовый расчет эффективных характеристик в зависимости от концентрации c_0 для волокнистого композита без дополнительного поверхностного слоя ($N = 0$) для гипотетического материала с характеристиками матрицы и включения: $E_M = 1$ GPa, $E_I = 12$ GPa, $\nu_M = 0.40$, $\nu_I = 0.22$ (соотношение жесткостей матрицы и включения 1:12).

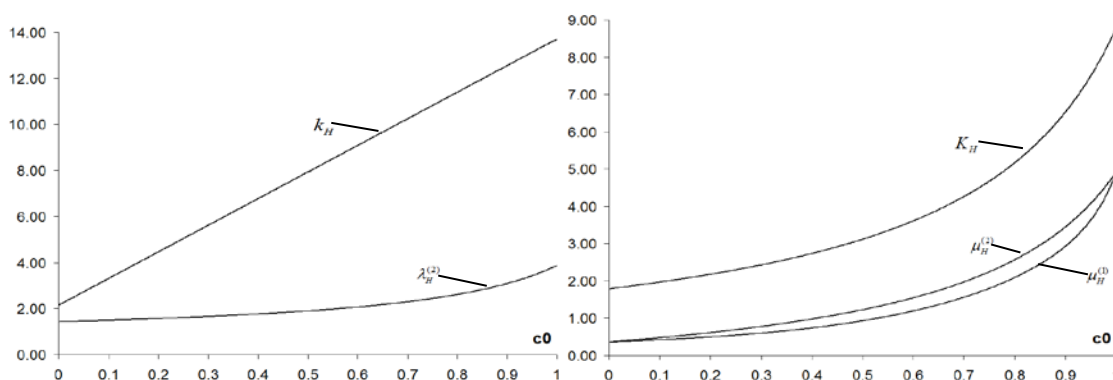


Рис.2. Тестовый расчет эффективных характеристик волокнистого материала.

Второй пример заключается в расчете эффективных характеристик в поперечном направлении: $E_H^{(1)}$, $\mu_H^{(1)}$, и в продольном направлении: $\mu_H^{(2)}$, $\lambda_H^{(2)}$, для материала с цилиндрическими включениями и промежуточным межфазным слоем при различной толщине межфазного слоя L_0 , который мы будем задавать по отношению к радиусу волокон R_I ; c_0 – объемное содержание включений.

Рассматривается матрица из титанового сплава ВТ-6 с параметрами $E_M = 125$ GPa, $\nu_M = 0.32$, наполненная однонаправленными волокнами из карбида кремния с параметрами $E_I = 390$ GPa, $\nu_I = 0.17$, и дополнительным слоем из карбида титана толщины L_0 с параметрами $E_L = 60$ GPa, $\nu_L = 0.30$. На рис.3 и 4 показана зависимость $E_H^{(1)}$, $\mu_H^{(1)}$ и $\mu_H^{(2)}$, $\lambda_H^{(2)}$ от c_0 для трех разных размеров межфазного слоя: а) $L_0 = 0$; б) $L_0/R_I = 0.3$; в) $L_0/R_I = 0.6$.

Третий пример относится к демонстрации зависимости эффективных характеристик от масштабных параметров в градиентной модели для материала с цилиндрическими включениями.

Рассматривается эпоксидная матрица с параметрами $E_M = 1.2 \text{ GPa}$, $\nu_M = 0.38$, наполненная однонаправленными углеродными нанотрубками радиуса $r = 15 \text{ нм}$ с параметрами $E_I = 800 \text{ GPa}$, $\nu_I = 0.2$.

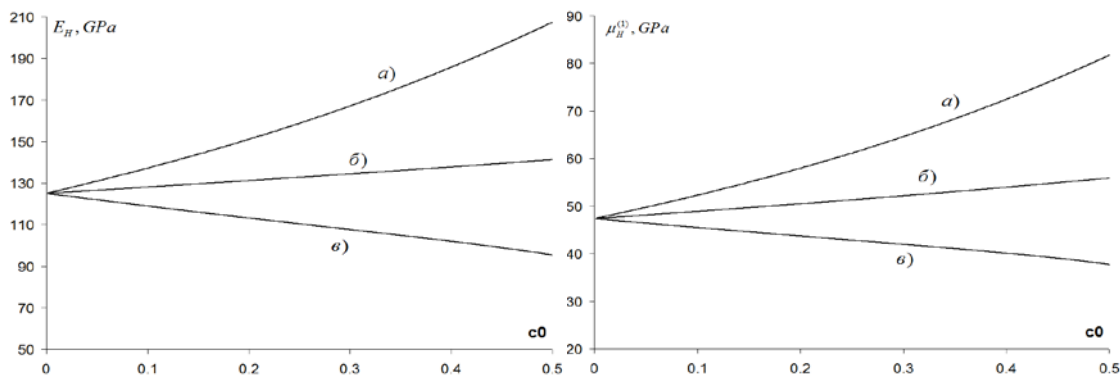


Рис.3. Эффективные характеристики в поперечном направлении; а) $L_0 = 0$; б) $L_0/R_I = 0.3$; в) $L_0/R_I = 0.6$.

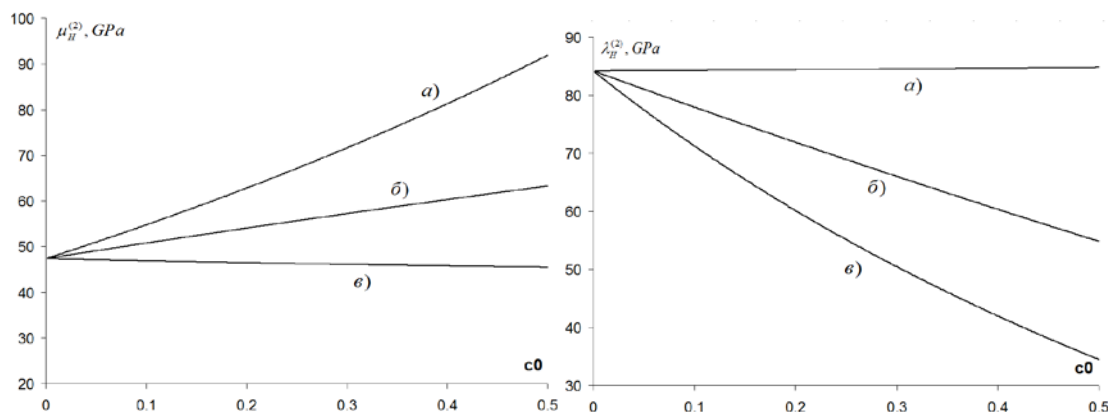


Рис.4. Эффективные характеристики в продольном направлении; а) $L_0 = 0$; б) $L_0/R_I = 0.3$; в) $L_0/R_I = 0.6$.

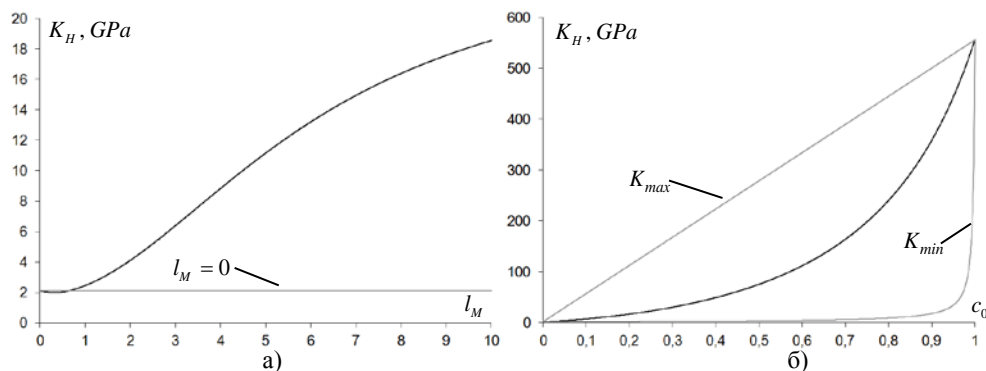


Рис.5. Эффективные характеристики в градиентной модели; а) $c_0 = 0.12$; б) $l_M = 4$.

На рис.5 представлена зависимость плоского модуля растяжения/сжатия $K_H = (C_{2222} + C_{3333})/2$ от масштабного параметра $l_M = 1/\kappa_M^*$, имеющего физический смысл относительной ширины межфазного слоя (по отношению к радиусу включения), и от объемной концентрации c_0 : а) $c_0 = 0.12$; б) $l_M = 4$. На рис.5а светлой линией представлено значение плоского модуля, соответствующее $l_M = 0$; на рис.5б светлой линией представлена вилка Фойгта-Рейсса для оценки плоского модуля K_H .

ВЫВОДЫ

Приведено описание методов вычисления эффективных упругих характеристик волокнистых композиционных материалов с учетом масштабных эффектов, обусловленных, наличием промежуточного межфазного слоя и использованием градиентной теории упругости. Для расчетов привлекаются модели в рамках градиентной и классической теории упругости: градиентная модель трех, модель многослойных цилиндрических включений, и градиентная модель многофазной слоистой среды. Для представленных моделей и методик расчета были разработаны соответствующие программные вычислительные модули. Показано, что сформулированные замкнутые аналитические решения позволяют учесть влияние масштабных эффектов на свойства композитов с различным размером включений цилиндрической формы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. – М.: ИЛ, 1963. – 248 с.
2. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
3. Christensen R.M., Lo K.H. Solutions for effective shear properties in three phase sphere and cylinder models // J. Mech. Phys. Solids. – 1979. – Vol.27. – P.315-330.
4. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
5. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
6. Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G. Asymptotic analysis for periodic structures. – Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1978. – 700 p.
7. Папкович П.Ф. Теория упругости. – М.-Л.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
8. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 872 с.
9. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials // J. Mater. Sci. – 2006. – Vol.41. – Iss.20. – P.6693-6707.
10. Volkov-Bogorodsky D.B., Evtushenko Yu.G., Zubov V.I., Lurie S.A. Calculation of deformations in nanocomposites using the block multipole method with the analytical-numerical account of the scale effects // Comp. Math. and Math. Phys. – 2006. – Vol.46. – N7. – P.1234-1253.
11. Lurie S., Volkov-Bogorodsky D., Zubov V., Tuchkova N. Advanced theoretical and numerical multiscale modeling of cohesion/adhesion interactions in continuum mechanics and its applications for filled nanocomposites // Comp. Mater. Sci. – 2009. – Vol.45. – Iss.3. – P.709-714.

12. Волков-Богородский Д.Б., Лурье С.А. Интегральные формулы Эшелби в градиентной теории упругости // Механика твердого тела. – 2010. – №4. – С.184-194.
13. Lurie S., Volkov-Bogorodsky D., Leontiev A., Aifantis E. Eshelby's inclusion problem in the gradient theory of elasticity. Applications to composite materials // Intern. J. of Engineering Science. – 2011. – Vol.49. – P.1517-1525.
14. Lurie S.A., Volkov-Bogorodskii D.B., Tuchkova N.P. Exact solution of Eshelby-Christensen problem in gradient elasticity for composites with spherical inclusions // Acta Mechanica. 2015. doi: 10.1007/s00707-015-1422-3.
15. Волков-Богородский Д.Б., Лурье С.А. Обобщенное решение проблемы Эшелби-Кристенсена для многослойных сферических включений в градиентной теории деформаций // Механика твердого тела. – 2016. – №2 (в печати)
16. Волков-Богородский Д.Б. Применение аналитических расчетов на основе метода блоков в связанных задачах механики сплошных сред / Всеросс. научно-практич. конф. "Инженерные системы-2008". Сборник трудов. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – С.123-138.
17. Волков-Богородский Д.Б. Аналитико-численный метод оценки эффективных характеристик структурно-неоднородных материалов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. – 2011. – №4. – Ч.2. – С.407-409.
18. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. – М.: Наука, 1973. – 296.

Поступила в редакцию 10 ноября 2015 года.

Сведения об авторах:

Волков-Богородский Дмитрий Борисович – к.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: v-b1957@yandex.ru

Лурье Сергей Альбертович – д.т.н., гл.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: salurie@mail.ru

Соляев Юрий Олегович – к.ф.-м.н., с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: yurysolyaev@yandex.ru

Нужных Александр Владимирович – н.с., Воронежский государственный университет, г. Воронеж, Россия