

УДК 539.9

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ С УЧЕТОМ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Фирсанов В.В.

*ФГБОУ Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет) г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Сущность математической модели состоит в построении основного напряженно-деформированного состояния, базирующегося на новой гипотезе вертикального элемента, и дополнительного напряженного состояния краевой плоской деформации (типа пограничный слой), возникающего вблизи жёстко защемленного края пластинки. Это дает возможность более точно оценить прочность таких авиационных конструкций, как крылья малого удлинения, оперение самолетов и ракет, а также вблизи соединений.

Применяется метод асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений трёхмерной теории упругости. С помощью специально введённой косоугольной системы координат получены соотношения для двух краевых задач. Решение задачи о краевой плоской деформации осуществляется вариационным методом Власова-Канторовича. На примере расчёта пластинки постоянной толщины показано, что существенный вклад в общее напряжённое состояние вносят поперечные нормальные и касательные напряжения, которыми в классической теории пластинок пренебрегают.

**Ключевые слова:** прямоугольная пластинка; напряженно-деформированное состояние; гипотеза вертикального элемента; пограничный слой; краевая задача; вариационный метод Власова-Канторовича; поперечные нормальные напряжения

## MATHEMATICAL MODEL OF THE STRESS-STRAIN STATE OF A RECTANGULAR PLATE OF VARIABLE WITH THE EFFECT OF BOUNDARY LAYER

Firsanov V.V.

*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

### ABSTRACT

The essence of this mathematical model consist in construction of the basic stress-strain state which is based on the a new hypothesis of vertical element, and an additional stress-strain state of the regional flat deformation arising of close rigidly jammed edge. It gives the chance more exactly to estimate of the strength aircraft structures near to irregularities of type of connections of the low aspect ratio triangular Delta wings, empennage, and rocket stabilize.

The method of asymptotic integration of differential equations of three-dimensional theory of elasticity is applied. By means of special oblique-angled system of the coordinate relationship for the two of fringe problems. The problems of additional, stress-strain state of the fringe flat deformation variational method of Vlasov-Kantorovich. For example, calculation of a plate of constant thickness showed that a significant contribution to the overall stress state

introduced transverse normal and shear stresses, which in the classical theory of plates and shells are neglected.

**Keywords:** rectangular plate; the stress-strain state; the hypothesis of vertical element; boundary layer; boundary value problem; variational method Vlasov-Kantorovich; transverse normal stresses

## ВВЕДЕНИЕ

Повышение показателей научно-технического уровня, в том числе весового совершенства, летательных аппаратов (ЛА) в результате применения перспективных конструктивных решений при его создании требует усовершенствования уже существующих и построения новых математических моделей для исследования прочности и долговечности ЛА.

Следует отметить, что хотя численные методы, типа метода конечных элементов и метода конечных разностей, связанные с подробной детализацией конструкции, использованием суперпрограмм для ЭВМ и значительными затратами на подготовку исходных данных, являются более точными и универсальными, но не потеряли своей значимости менее точные, но более оперативные методы, основанные на аналитических моделях элементов конструкций, в том числе на оболочках, пластинках, тонкостенных стержнях и пространственных брусках с существенно переменными массовыми и жесткостными характеристиками.

Построение уточненных теорий и методов определения напряженно-деформированного состояния (НДС) указанных типовых элементов строительной механики ЛА с переменной, в частности, несимметрично изменяющейся по длине толщиной, позволит решить проблему более достоверного расчета на прочность таких авиационных конструкций, как крылья малого удлинения, оперение самолетов и ракет.

К этой проблеме тесно примыкает задача определения краевого НДС в зонах соединений и стыков, в том числе разностенных и выполненных из разнородных материалов. Применение традиционных методов классической теории пластинок и оболочек типа Киргофа-Лява и Тимошенко-Рейсснера к определению трехмерного НДС в краевой зоне приводит к существенным погрешностям [1,2].

Один из возможных путей построения математически обоснованной теории пластинок и оболочек состоит в применении метода прямого асимптотического разложения компонентов НДС в ряды по малому параметру – относительной толщине трехмерного тела и в последующем интегрировании уравнений трехмерной теории упругости.

С помощью этого метода в работах А.Л.Гольденвейзера [3] были сформулированы варианты приближенных теорий, уточняющих результаты классической теории не только во внутренних областях пластинок и оболочек, но и в их узких краевых зонах. Однако, сформулированные краевые задачи, в силу сложности соответствующих им дифференциальных уравнений и различного типа граничных условий, напрямую решить затруднительно. В связи с этим, в работах [4,5] указанные краевые задачи с помощью вариационного метода Власова-Канторовича и специально подобранных аппроксимирующих полиномов решены и доведены до численных результатов, в том числе для ортотропной прямоугольной пластинки.

Отметим, что уточненные варианты расчета общего НДС тонкостенных пластинок и оболочек построены для частного случая постоянной толщины. Известны работы [6], где в рамках классической теории рассматриваются способы расчета круглых пластинок и цилиндрических оболочек переменной толщины, симметричных относительно оси, проходящей через центр масс поперечных сечений. В то же время известно, что многие элементы авиационных конструкций оформляются в виде пластинок и оболочек переменной толщины таким образом, что одно из их оснований наклонено под некоторым углом к другому основанию. В работах [7,8] метод прямого асимптотического интегрирования применён к расчету цилиндрических оболочек переменной толщины.

Для более полного анализа полученных эффектов и подтверждения их достоверности были проведены исследования статики [9-11] и динамики [11-13] (в части свободных колебаний) в рамках энергетически согласованного подхода, заключающегося в разложении перемещений в полиномиальные ряды по нормальной координате и последующем применении вариационного принципа Лагранжа. Установлено, что уже при повышении на один порядок аппроксимирующих полиномов при статических расчетах напряженного состояния в зонах его искажения имеют место значительные дополнительные локальные напряжения, соизмеримые с напряжениями, определяемыми по классической теории. Эти результаты хорошо согласуются с данными, полученными методом прямого асимптотического интегрирования. Очень важен также результат, полученный для свободных колебаний оболочки, позволяющий определить высокие тоны колебаний (до одиннадцатого включительно), не описываемые классической теорией. Следует отметить, что построенная в рамках энергетически согласованного подхода краевые задачи для цилиндрических оболочек [9-11] были обобщены [12,13] на случай произвольных ортотропных оболочек, а также оболочек переменной толщины.

Здесь также следует отметить работы [14-16], в которых рассматриваются методы уточненного расчета оболочек и пластинок переменной толщины. В работе [14] предлагается дедуктивный подход, согласно которому оболочка представляется в виде ограниченного трехмерного континуума специальной структуры, предположительно допускающего расчленение объекта на совокупность оболочечных элементов. Наряду со стандартными уравнениями равновесия, используется дополнительное уравнение равновесия элемента в направлении его толщины. В качестве примера исследуются свободные колебания линейно-упругой пластинки, в частности, упругие волны в направлении толщины элемента.

В работах [5,16] построены модели различной степени сложности для упругих призматических оболочек переменной толщины при температурном воздействии. Для понижения размерности задачи к фундаментальным уравнениям термоупругости для однородных изотропных тел применяется метод Векуа, основанный на преобразовании Фурье-Лежандра.

В предлагаемой работе применяется метод асимптотического интегрирования дифференциальных уравнений трёхмерной теории упругости. С помощью специально введенной косоугольной системы координат получены соотношения для двух краевых задач. Решение задачи о краевой плоской деформации осуществляется вариационным методом Власова-Канторовича.

На примере расчета пластинки постоянной толщины показано, что существенный вклад в общее напряженное состояние вносят поперечные

нормальные и касательные напряжения, которыми в классической теории пластинок и оболочек пренебрегают.

Применяя решение Фламана-Буссинеска для контактной задачи о пластинке с полупространством, проведен анализ результатов учёта податливости закрепленного края.

## 1. ОСНОВНОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ

Следуя работе [4], где рассматривалась ортотропная прямоугольная пластинка постоянной толщины, построим для прямоугольной пластинки переменной толщины итерационные процессы, соответствующие основному НДС и НДС краевой плоской деформации, ограничиваясь при написании основных соотношений только теми приближениями, которые необходимы для целей данной работы.

Пусть прямоугольная изотропная пластинка переменной несимметрично изменяющейся по длине толщины, нагруженная поперечной распределенной нагрузкой  $q(x, y)$ , отнесена к прямоугольной системе координат  $(x, y, z)$  (рис.1).

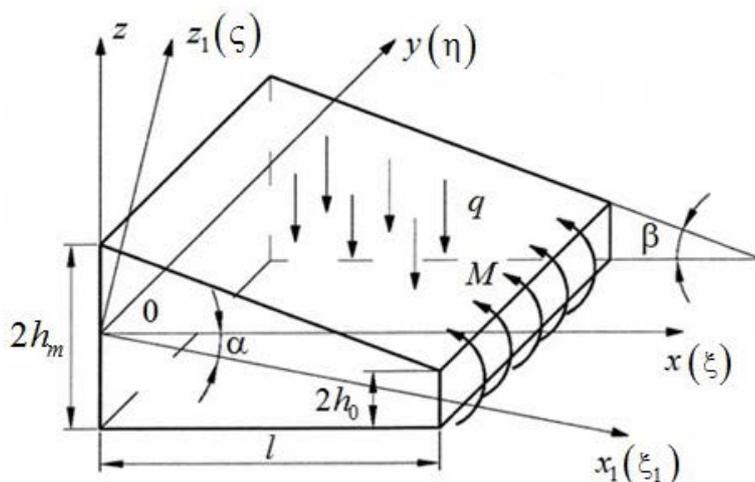


Рис.1. Прямоугольная пластинка переменной толщины.

Обозначим через  $l, b$  длину и ширину пластинки, а через  $2h$  – ее толщину, определяемую соотношением

$$h = h_m - \operatorname{tg} \alpha \cdot x$$

где  $\operatorname{tg} \alpha = (h_m - h_0)/l$ .

Наряду с системой координат  $(x, y, z)$ , будем рассматривать косоугольную систему координат  $(x_1, y_1, z_1)$ , для которой справедливы равенства

$$x_1 = x / \cos \alpha; \quad z_1 = z + x_1 \sin \alpha.$$

Для определенности, положим, что край пластинки жестко защемленный. Другой край пластинки может быть любым, в том числе и свободным, нагруженным краевыми усилиями типа изгибающих моментов и перерезывающих сил.

Применим метод асимптотического интегрирования и кратко изложим основные результаты, относящиеся к построению первых приближений двух итерационных процессов, отсылая за подробностями к работам [4,7].

Интегрируется система дифференциальных уравнений трехмерной задачи теории упругости в косоугольной системе координат. Она получается из соответствующих уравнений в декартовой системе координат путем перехода от производных  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}$  к производным  $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial z_1}$  по формулам

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial}{\partial x_1} + \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial}{\partial z_1}; \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_1}$$

и имеет следующий вид

$$\begin{cases} \left( \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial}{\partial x_1} + \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \sigma_x + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z_1} = 0; & (xy) \\ \left( \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial}{\partial x_1} + \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial}{\partial z_1} \right) \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z_1} = 0; \\ E \left( \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial}{\partial x_1} + \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial}{\partial z_1} \right) u = \sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z); & (xy) \\ E \frac{\partial w}{\partial z_1} = \sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y); \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}; & (xy) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь и в дальнейшем символ  $(xy)$  означает, что имеет место второе соотношение, получаемое из приведенного заменой  $x, u$  на  $y, v$  соответственно и наоборот.

При интегрировании уравнений (1) все напряжения и перемещения  $\theta$  задаем в соответствии с формулой

$$\theta = h_*^{-p} \sum_{s=1}^s h_*^{s-1} \theta^{(s)}, \quad (2)$$

в которой для рассматриваемого случая  $h_* = h/l$ .

На верхней и нижней плоскостях пластинки должны выполняться граничные условия

$$\begin{cases} \sigma_z + 2\operatorname{tg} \alpha \tau_{xz} = -q \\ \tau_{xz} + 2\operatorname{tg} \alpha \sigma_x = -2q\operatorname{tg} \alpha \end{cases} \quad \text{при } z_1 = h \quad (3)$$

$$\begin{cases} \tau_{xy} + 2\operatorname{tg} \alpha \cdot \tau_{xy} = 0 \\ \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \end{cases} \quad \text{при } z_1 = -h \quad (4)$$

При написании (3) учтено, что  $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta/2$ . Заменяем независимые переменные по формулам

$$x_1 = l\xi_1, \quad y = b\eta, \quad z_1 = h\zeta \quad (5)$$

и примем, что по переменным  $\xi_1, \eta, \zeta$  изменяемость искомого НДС не слишком велика. Выберем  $p$  в разложении (2) следующим образом:  $p = 2$  для  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, u, v$ ;  $p = 1$  для  $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ ;  $p = 0$  для  $\sigma_z$ ;  $p = 3$  для  $w$ .

Тогда система уравнений для определения величин  $\theta^{(1)}$  имеет вид

$$\begin{cases} \chi_1 \sigma_x^{(1)} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{xy}^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(1)}}{\partial \zeta} = 0; \quad \chi_1 \tau_{xy}^{(1)} + \varepsilon \frac{\partial \sigma_y^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tau_{yz}^{(1)}}{\partial \zeta} = 0; \\ \chi_1 \tau_{xz}^{(1)} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz}^{(1)}}{\partial \eta} + \frac{\partial \sigma_z^{(1)}}{\partial \zeta} = 0; \quad (E/l) \chi_1 u^{(1)} = \sigma_x^{(1)} - \nu \sigma_y^{(1)}; \end{cases}$$

$$(E/l) \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \eta} = \sigma_y^{(1)} - v \sigma_x^{(1)}; \quad (E/h) \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \zeta} = 0; \quad (6)$$

$$(E/l) \left( \varepsilon \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta} + \chi_1 v^{(1)} \right) = 2(1+v) \tau_{xy}^{(1)};$$

$$E \left( \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \zeta} + \chi_1 w^{(1)} \right) = 0; \quad E \left( (1/\varepsilon) \frac{\partial v^{(1)}}{\partial \zeta} + \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \eta} \right) = 0,$$

где через  $\chi_1$  обозначен дифференциальный оператор

$$\chi_1 = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \operatorname{tg} \alpha h_*^{-1} \left( p + \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \quad (7)$$

и  $\varepsilon = l/b$ . Область применимости уравнений (6) ограничена неравенством

$$h_*^2 < \operatorname{tg} \alpha < h_*^0. \quad (8)$$

Перейдем в (6) к величинам, стоящим в левой части разложения (2). Далее, интегрируя полученную систему, находим

$$\begin{aligned} w &= w(\xi, \eta); \quad u = \zeta u_1 + u_0(xy); \quad \sigma_x = \zeta \sigma_{x1} + \sigma_{x0}(xy); \\ \tau_{xy} &= \zeta \tau_{xy1} + \tau_{xy0}; \quad \tau_{xz} = \zeta^2 \tau_{xz2} + \zeta \tau_{xz1} + \tau_{xz0}(xy); \\ \sigma_z &= \zeta^3 \sigma_{z3} + \zeta^2 \sigma_{z2} + \zeta \sigma_{z1} + \sigma_0 \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь величины, отмеченные дополнительными числовыми индексами внизу, – функции переменных  $\xi, \eta$ , связанные следующими равенствами

$$\begin{aligned} u_1 &= -h_* \frac{\partial w}{\partial \xi}; \quad v_1 = -h_* \frac{\partial w}{\partial \eta}; \\ \sigma_{x1} &= -\left( E/(1-v^2) l \right) \left( h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + v \varepsilon^2 h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \right); \\ \sigma_{x0} &= \left( E/(1-v^2) l \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + v \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial \eta} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \right); \\ \sigma_{y1} &= -\left( v E/(1-v^2) l \right) \left( h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{v} \varepsilon^2 h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \right); \\ \sigma_{y0} &= \left( v E/(1-v^2) l \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \frac{1}{v} \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial \eta} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \right); \\ \tau_{xy1} &= -\left( E/(1+v) \right) \left( (h_*/b) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} - (1/2) \operatorname{tg} \alpha (1/b) \frac{\partial w}{\partial \eta} \right); \\ \tau_{xy0} &= \left( E/2(1+v) b \right) \left( \frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v_0}{\partial \xi} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial w}{\partial \eta} \right); \\ \tau_{xz2} &= \left( E/2(1-v^2) l \right) \left( h_*^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \varepsilon^2 h_*^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} - 2 \operatorname{tg} \alpha h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \right. \\ &\quad \left. - ((1+v)/2) \operatorname{tg} \alpha \varepsilon^2 h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right); \\ \tau_{xz1} &= -\left( E/(1-v^2) l \right) \left( h_* \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} + ((1+v)/2) \varepsilon^2 h_* \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + \right. \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
 & + \left( (1 + \nu) / 2 \right) \varepsilon h_* \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - 2 \operatorname{tg} \alpha h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \\
 & - \left( (1 + \nu) / 2 \right) \operatorname{tg} \alpha \varepsilon^2 h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \Big); \\
 \tau_{yz2} & = \left( E h_* / 2 (1 - \nu^2) b \right) \left( h_* \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \varepsilon^2 h_* \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^2} - \left( (3 - \nu) / 2 \right) \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right); \\
 \tau_{yz1} & = - \left( E / (1 - \nu^2) b \right) \left( \left( (1 + \nu) / 2 \right) h_* \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi \partial \eta} + \left( (1 - \nu) / 2 \right) \frac{h_*}{\varepsilon} \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} + \right. \\
 & \left. + \varepsilon h_* \frac{\partial^2 v_0}{\partial \eta^2} - \left( (3 - \nu) / 2 \right) \operatorname{tg} \alpha h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \left( (1 - \nu) / 2 \right) \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial w}{\partial \eta} \right). \\
 \sigma_{z3} & = - \frac{E h_*}{6 (1 - \nu^2) l} \left[ h_*^2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi \partial \eta^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} \right) - \right. \\
 & \left. - 4 \operatorname{tg} \alpha h_* \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2} (1 + \nu) \operatorname{tg}^2 \alpha \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right]; \\
 \sigma_{z2} & = - \frac{E h_*}{2 (1 - \nu^2) l} \left[ 3 \operatorname{tg} \alpha h_* \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} \right) - h_* \left( \frac{\partial^3 u_0}{\partial \xi^3} + \varepsilon \frac{\partial^3 v_0}{\partial \xi^2 \partial \eta} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u_0}{\partial \xi \partial \eta^2} + \varepsilon^3 \frac{\partial^3 v_0}{\partial \eta^3} \right) - 5 \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{1}{2} (3 + \nu) \operatorname{tg}^2 \alpha \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} (1 - \nu) \operatorname{tg} \alpha \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} (1 + \nu) \operatorname{tg} \alpha \varepsilon \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi \partial \eta} \right]; \\
 \sigma_{z1} & = - h_* \left( \frac{\partial \tau_{xz0}}{\partial \xi} + \varepsilon \frac{\partial \tau_{yz0}}{\partial \eta} \right) + \frac{E \operatorname{tg} \alpha h_*}{2 (1 - \nu^2) l} \left[ 2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} + (1 - \nu) \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + \right. \\
 & \left. + (1 + \nu) \varepsilon \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi \partial \eta} - 4 \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - (1 + \nu) \operatorname{tg} \alpha \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{1}{h_*} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right]; \\
 \sigma_{z0} & = \frac{E h_*}{2 (1 - \nu^2) l} \left\{ \frac{2}{3} h_*^2 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^4} + 2 \varepsilon^2 \frac{\partial^4 w}{\partial \xi^2 \partial \eta^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^4 w}{\partial \eta^4} \right) - \right. \\
 & - h_* \left[ \frac{11}{3} \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \frac{1}{12} (17 + 9 \nu) \operatorname{tg} \alpha \varepsilon^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} - \frac{\partial^3 u_0}{\partial \xi^3} - \right. \\
 & \left. - (1 + 2 \nu) \varepsilon^2 \frac{\partial^3 u_0}{\partial \xi \partial \eta^2} - \varepsilon^3 \frac{\partial^3 v_0}{\partial \eta^3} - \varepsilon \frac{\partial^3 v_0}{\partial \xi^2 \partial \eta} \right] - \\
 & - \operatorname{tg} \alpha \left[ \frac{5}{3} \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1}{6} (1 + 7 \nu) \operatorname{tg} \alpha \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} - \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} (1 - 5 \nu) \varepsilon^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} - \frac{1}{2} (1 + \nu) \varepsilon \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi \partial \eta} - 2 \operatorname{tg}^2 \alpha \frac{1}{h_*} \frac{\partial w}{\partial \xi} \right] \Big\}.
 \end{aligned}$$

В формулах (9), (10)  $\xi = \xi_1 \cos \alpha$ . Потребуем, чтобы напряжения, вычисляемые при помощи формул (9), (10), удовлетворяли граничным условиям (3), (4).

Тогда находим

$$\begin{aligned}\tau_{xz0} = & -\left(E/2(1-\nu^2)l\right)h_*\left(h_*\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^3} + \varepsilon^2 h_*\frac{\partial^3 w}{\partial\xi\partial\eta^2} - 6\text{tg}\alpha h_*\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} - (3(1+\nu)/2)\times\right. \\ & \left.\times \text{tg}\alpha\varepsilon^2\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2} + 2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\xi^2} + (1+\nu)\varepsilon^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\eta^2} + (1+\nu)\varepsilon\frac{\partial^2 v_0}{\partial\xi\partial\eta} + 2\text{tg}^2\alpha(1/h_*)\frac{\partial w}{\partial\xi}\right); \\ \tau_{yz0} = & -\left(E/2(1-\nu^2)l\right)h_*\left(\varepsilon^3 h_*\frac{\partial^3 w}{\partial\eta^3} + \varepsilon h_*\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^2\partial\eta} - (3(3-\nu)/4)\times\right. \\ & \left.\times \text{tg}\alpha\varepsilon\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta} + (1-\nu)\frac{\partial^2 v_0}{\partial\xi^2} + 2\varepsilon^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial\eta^2} + (1+\nu)\varepsilon\frac{\partial^2 u_0}{\partial\xi\partial\eta} +\right. \\ & \left.+ (1-\nu)\text{tg}^2\alpha\varepsilon(1/h_*)\frac{\partial w}{\partial\eta}\right),\end{aligned}$$

а также систему основных дифференциальных уравнений задачи в перемещениях

$$\begin{aligned}h_*^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\xi^2} + ((1+\nu)/2)\hat{h}_*^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\eta^2} + ((1+\nu)/2)h_*\hat{h}_*^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial\xi\partial\eta} - \text{tg}\alpha h_*^2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} \\ - ((1-\nu)/2)\text{tg}\alpha\hat{h}_*^2\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2} - \text{tg}\alpha h_*\frac{\partial u_0}{\partial\xi} - \nu\text{tg}\alpha\hat{h}_*\frac{\partial v_0}{\partial\eta} + \\ + \text{tg}\alpha h_*\frac{\partial w}{\partial\xi} - ((1-\nu^2)/E)\text{tg}\alpha\hat{h}_*q = 0; \\ h_*\hat{h}_*^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\xi\partial\eta} + ((1+\nu)/(1-\nu))h_*^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial\xi^2} + (2/(1+\nu))\hat{h}_*^2\frac{\partial^2 v_0}{\partial\eta^2} - \\ - \text{tg}\alpha h_*\hat{h}_*\frac{\partial^2 w}{\partial\xi\partial\eta} - ((1-\nu)/(1+\nu))\text{tg}\alpha\hat{h}_*\frac{\partial u_0}{\partial\eta} - \\ - ((1-\nu)/(1+\nu))\text{tg}\alpha h_*\frac{\partial v_0}{\partial\xi} + \\ + ((1-\nu)/(1+\nu))\text{tg}^2\alpha\hat{h}_*\frac{\partial w}{\partial\eta} = 0; \\ h_*^4\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4} + 2h_*^2\hat{h}_*^2\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\eta^2} + \hat{h}_*^4\frac{\partial^4 w}{\partial\eta^4} - 10\text{tg}\alpha h_*^3\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^3} - ((53+9\nu)/8)\times \\ \times \text{tg}\alpha h_*\hat{h}_*^2\frac{\partial^3 w}{\partial\xi\partial\eta^2} + 3h_*^3\frac{\partial^3 u_0}{\partial\xi^3} + 3(1+\nu)h_*\hat{h}_*^2\frac{\partial^3 u_0}{\partial\xi\partial\eta^2} + \\ + 3\hat{h}_*^3\frac{\partial^3 v_0}{\partial\eta^3} + 3h_*^2\hat{h}_*\frac{\partial^3 v_0}{\partial\xi^2\partial\eta} + 17\text{tg}^2\alpha h_*^2\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} + (5+2\nu)\text{tg}^2\alpha\hat{h}_*^2\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2} - \\ - 6\text{tg}\alpha h_*^2\frac{\partial^2 u_0}{\partial\xi^2} - 3(1+2\nu)\text{tg}\alpha\hat{h}_*\frac{\partial^2 u_0}{\partial\eta^2} - 3(1+\nu)\text{tg}\alpha h_*\hat{h}_*\frac{\partial^2 v_0}{\partial\xi\partial\eta} - \\ - 3\text{tg}\alpha h_*\frac{\partial w}{\partial\xi} + (3(1-\nu^2)/2E)\hat{h}_*q = 0,\end{aligned}\tag{11}$$

где  $\hat{h}_* = \frac{h}{b}$ .

Очевидно, что в случае пластинки переменной толщины изгиб и растяжение не отделяются друг от друга. Можно показать, что напряжения, соответствующие общему интегралу уравнений (11), дают следующие усилия и моменты

$$N_x = 2Eh_*/(1-\nu^2)\left(\frac{\partial u_0}{\partial\xi} - \text{tg}\alpha\frac{\partial w}{\partial\xi} + \nu\varepsilon\frac{\partial v_0}{\partial\eta}\right);$$

$$\begin{aligned}
N_y &= 2Eh_*/(1-\nu^2) \left( \varepsilon \frac{\partial v_0}{\partial \eta} + \nu \left( \frac{\partial u_0}{\partial \xi} - \operatorname{tg} \alpha \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right); \\
S_{xy} &= Eh_*/(1-\nu^2) \left( \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \frac{\partial v_0}{\partial \xi} - \operatorname{tg} \alpha \varepsilon \frac{\partial w}{\partial \xi} \right); \\
M_x &= -D_*/l^2 \left( \varepsilon \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} - \operatorname{tg} \alpha / h_* \frac{\partial w}{\partial \xi} \right); \\
M_y &= -D_*/l^2 \left( \varepsilon^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \operatorname{tg} \alpha / h_* \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right); \\
M_{xy} &= -((1-\nu)/bl) D_* \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} - \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{h_*} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right); \\
Q_x &= -D_*/l^3 \left( \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + \varepsilon^2 \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} - 8 \operatorname{tg} \alpha / h_* \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - ((1+\nu)/2) \times \right. \\
&\quad \times \operatorname{tg} \alpha \left( \varepsilon^2 / h_* \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + 3 / h_* \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi^2} + \frac{3}{2} (1+\nu) \left( \varepsilon^2 / h_* \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} + \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} (1+\nu) \left( \varepsilon^2 / h_* \right) \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi \partial \eta} + 3 \operatorname{tg} \alpha / h_* \frac{\partial w}{\partial \xi} \right); \\
Q_y &= -D_*/l^3 \left( \varepsilon^3 \frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} + \varepsilon \frac{\partial^3 w}{\partial \xi^2 \partial \eta} - \frac{7}{8} (3-\nu) \operatorname{tg} \alpha \left( \varepsilon / h_* \right) \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} (1-\nu) \left( 1 / h_* \right) \frac{\partial^2 v_0}{\partial \xi^2} + 3 \left( \varepsilon^2 / h_* \right) \frac{\partial^2 v_0}{\partial \eta^2} + \frac{3}{2} (1+\nu) \left( \varepsilon^2 / h_* \right) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \xi \partial \eta} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{3}{2} (1-\nu) \operatorname{tg}^2 \alpha \left( \varepsilon / h_*^2 \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} \right)
\end{aligned}$$

Граничные условия на боковых краях рассматриваемой пластинки формулируются точно так же, как и для пластинки постоянной толщины [6]. Сохраняется вид соотношений, связывающих внутренние силовые факторы и напряжения в пластинке.

Отметим, что полученные для пластинки переменной толщины уравнения (11), (12) при  $\alpha=0$ , т.е. для пластинки постоянной толщины, превращаются в известные уравнения классической теории тонких пластинок [6].

В некоторых частных случаях закрепления пластинки возможно упрощение уравнений равновесия (11) и получение их решения в рядах. Действительно, если края пластинки  $\xi=0$ ,  $\xi=1$  закреплены произвольным образом, а края  $\eta=0$ ,  $\eta=1$  опираются так, что должны выполняться однородные граничные условия

$$u_0 = w = 0; \quad N_y = M_y = 0, \quad (13)$$

то структура уравнения (11) такова, что возможно ее сведение к обыкновенным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами. Для этого искомые перемещения следует задавать в виде рядов, аналогичных ряду М.Леви [6] для пластинки постоянной толщины. При этом тригонометрические функции аргумента  $\eta$  (аппроксимирующие функции) подбирают таким образом, чтобы точно удовлетворялись граничные условия (13). Можно показать, что для этой цели достаточно взять перемещения  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w$  в виде одинарных тригонометрических рядов

$$u_0 = \sum_{m=1}^{m=\infty} f_m(\xi) \sin m\pi\eta; \quad v_0 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \varphi_n(\xi) \cos n\pi\eta;$$

$$w = \sum_{r=1}^{r=\infty} \psi_r(\xi) \sin r\pi\eta.$$

При других случаях опирания краев  $\eta=0$  и  $\eta=1$  можно использовать искусственные приемы [6], позволяющие решить сформулированную краевую задачу для пластинки, как угодно закрепленной.

Отметим, что, анализируя 6-е, 8-е и 9-е уравнения из системы уравнений (6), можно установить следующее: построенная модель определения НДС во внутренней области прямоугольной пластинки с несимметрично изменяющейся толщиной базируется на гипотезе о неизменяемости вертикального элемента, т.е. отрезка прямой, перпендикулярного нижней грани пластинки. Эта гипотеза является обобщением известных гипотез Кирхгофа-Лява о неизменяемости нормального к срединной плоскости пластинки элемента.

## 2. НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КРАЕВОЙ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ

Рассмотрим НДС, которое быстро меняется не только по переменной  $z$ , но и по переменной  $x_1$ . Для этого введем независимую переменную  $\xi_1$  по формуле и выберем  $p$  в (2) следующим образом

$$p = \mu - 1 \text{ для } \sigma_x, \sigma_y, \tau_{xz}, \sigma_z \quad p = \mu - 2 \text{ для } \tau_{xy}, \tau_{yz} \quad (14)$$

$$p = \mu - 2 \text{ для } u, w; \quad p = \mu - 3 \text{ для } v,$$

где  $\mu$  – пока произвольное число.

Тогда головная система уравнений для определения величин имеет  $\theta_{II}^{(1)}$  вид

$$\chi_1 \sigma_x^{(1)} + \frac{\partial \tau_{xz}^{(1)}}{\partial \zeta} = 0; \quad \chi_1 \tau_{xz}^{(1)} + \frac{\partial \sigma_{yz}^{(1)}}{\partial \zeta} = 0;$$

$$(E/l) \chi_2 u^{(1)} = \sigma_x^{(1)} - \nu(\sigma_y^{(1)} + \sigma_z^{(1)}); \quad 0 = \sigma_y^{(1)} - \nu(\sigma_x^{(1)} + \sigma_z^{(1)}); \quad (15)$$

$$(E/l) \frac{\partial w^{(1)}}{\partial \zeta} = \sigma_z^{(1)} - \nu(\sigma_x^{(1)} + \sigma_y^{(1)}); \quad (E/l) \left( \varepsilon \frac{\partial u^{(1)}}{\partial \zeta} + \chi_2 \cdot w^{(1)} \right) = 2(1 + \nu) \tau_{xz}^{(1)};$$

Здесь через  $\chi_2$  обозначен дифференциальный оператор

$$\chi_2 = \frac{1}{\cos \alpha} \frac{\partial}{\partial \xi_1} + \operatorname{tg} \alpha \left( p + \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \quad (16)$$

Система уравнений (15) имеет место, если угол  $\alpha$  изменяется в пределах

$$h_* < \operatorname{tg} \alpha < h_*^{-1} \quad (17)$$

Если в уравнениях (15) перейти к величинам, стоящим в правой части формул (2), то их можно выполнить, положив

$$\sigma_{xII} = \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \zeta^2}; \quad \sigma_{zII} = -\chi_2^2 \Phi^{(1)};$$

$$\tau_{xzII} = -\frac{\partial}{\partial \zeta} \chi_2 \Phi^{(1)}; \quad \sigma_{yII} = \nu \left( \chi_2^2 + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \right) \Phi^{(1)}; \quad (18)$$

$$u_{II} = -\frac{1+\nu}{E} l \left[ (2-\nu) \chi_2 \Phi^{(1)} + (1+\nu) \iint \chi_2^3 \Phi^{(1)} d\zeta d\zeta \right];$$

$$w_{II} = \frac{1+\nu}{E} l \left[ (1-\nu) \int \chi_2^2 \Phi^{(1)} d\zeta - \nu \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \zeta} \right];$$

где функция  $\Phi^{(1)}(\xi_1, \eta, \zeta)$  удовлетворяет уравнению

$$\chi_2^4 \Phi^{(1)} + 2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} \chi_2^2 \Phi^{(1)} + \frac{\partial^4 \Phi^{(1)}}{\partial \zeta^4} = 0. \quad (19)$$

Уравнение (19) в случае пластинки постоянной толщины, т.е. при  $\alpha=0$ , превращается в бигармоническое уравнение.

Пусть напряжения и перемещения рассматриваемой пластинки составятся как сумма двух слагаемых, соответствующих построенным НДС. В этом случае из неравенств (8) и (17) можно заключить, что для полного напряженного состояния угол  $\alpha$  должен изменяться в пределах

$$h_* < \operatorname{tg} \alpha < h_*^0.$$

Так как внешняя поверхностная нагрузка, в соответствии с уравнениями (3), уравновешена основным напряженным состоянием, то, очевидно, что на верхней и нижней плоскостях пластинки необходимо выполнение однородных граничных условий (3) и (4), для чего в соответствии с (18) достаточно потребовать

$$\Phi^{(1)} = \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \zeta} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial \zeta^2} = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1. \quad (20)$$

Помимо условий (20) функция  $\Phi^{(1)}$  должна убывать с возрастанием координаты  $\xi_1$  вместе с производными до 2-го порядка включительно, что обеспечивает затухание НДС (18) вглубь пластинки.

Полагая в (14)  $\mu = 3$  методом наложения граничных условий [3], можно получить следующее представление [7] для функции  $\Phi^{(1)}$

$$\Phi^{(1)} = m(\eta) \Phi(\xi_1, \zeta).$$

В последней формуле

$$m(\eta) = -(\nu/E) \left[ 1/2 (\sigma_{x1} + \sigma_{y1}) + (\sigma_{x0} + \sigma_{y0}) \right]_{\xi=0} \quad (21)$$

и функция  $\Phi$  удовлетворяет уравнению (19).

Решим краевую задачу по определению функции  $\Phi(\xi_1, \zeta)$  при помощи энергетического метода приведения к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КРАЕВОЙ ПЛОСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ В ВАРИАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Оставаясь в рамках общего вариационного метода, представим функцию  $\Phi$  в виде конечного ряда

$$\Phi = \sum_{i=1}^{i=n} F_i(\zeta) \psi_i(\xi_1), \quad (22)$$

в которой  $F_i(\zeta)$  – функции, аппроксимирующие функцию  $\Phi$  по толщине пластинки и удовлетворяющие граничным условиям

$$F_i = F_i' = 0, \quad (23)$$

$$F_i'' = 0 \quad \text{при } \zeta = \pm 1 \quad (24)$$

Применяя метод Власова-Канторовича, как и в случае цилиндрической оболочки [7], найдем систему уравнений для определения функций  $\psi_i(\zeta_i)$  и необходимое количество естественных граничных условий на жестко защемленном краю.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет вид

$$\sum_{i=0}^{i=n} (a_{ik} \psi_i^{(IV)} + b_{ik} \psi_i^{(III)} + c_{ik} \psi_i^{(II)} + d_{ik} \psi_i^{(I)} + e_{ik} \psi_i) = P_k \quad (k = \overline{1, n}), \quad (25)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} a_{ik} &= \int_{-1}^{+1} F_i F_k d\zeta; \quad b_{ik} = 4 \sin \alpha \int_{-1}^{+1} (F_i' F_k + F_i F_k') d\zeta; \\ c_{ik} &= -2 \int_{-1}^{+1} [(1 + 2 \sin^2 \alpha) F_i' F_k' - 2 \sin^2 \alpha (2 F_i' F_k + 3 F_i F_k')] d\zeta; \\ d_{ik} &= -4 \sin^3 \alpha \int_{-1}^{+1} [\csc^2 \alpha F_i'' F_k' + ((2 + \nu \operatorname{ctg}^2 \alpha) / (1 - \nu)) F_i' F_k' - 3 F_i' F_k + ((\operatorname{ctg}^2 \alpha / (1 - \nu)) - 6) F_i F_k'] d\zeta; \\ e_{ik} &= \sin^2 \alpha \int_{-1}^{+1} [\csc^2 \alpha F_i'' F_k'' - 2(1 + \cos^2 \alpha) / (1 - \nu) F_i'' F_k' + \\ &+ 2((4\nu \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \nu) / (1 - \nu)) F_i' F_k' + 8 \sin^2 \alpha (2 F_i' F_k + 3 F_i F_k')] d\zeta; \end{aligned} \quad (26)$$

$$P_k(\xi_1) = \sin^2 2\alpha N h_*^2 \int_{-1}^{+1} \int_0^1 \{m(\eta) [\sigma_{x1} + (\nu / (1 - \nu)) \sigma_{y1}] (\zeta - 1) + (\sigma_{x0} + (\nu / (1 - \nu)) \sigma_{y0})\} d\eta F_k d\zeta;$$

$$N = (\nu / (1 - \nu)) \left[ \int_0^1 m^2(\eta) d\eta \right]^{-1}$$

Граничные условия для определения произволов интегрирования системы (25) записываются в форме

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{i=n} (f_{ik} \psi_i^{(II)} + g_{ik} \psi_i^{(I)} + n_{ik} \psi_i) &= Q_k \\ \sum_{i=1}^{i=n} (m_{ik} \psi_i^{(III)} + n_{ik} \psi_i^{(II)} + p_{ik} \psi_i^{(I)} + r_{ik} \psi_i) &= R_k \end{aligned} \quad \text{при } \xi_1 = 0 \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} f_{ik} &= \int_{-1}^{+1} F_i F_k d\zeta; \quad g_{ik} = 2 \sin \alpha \int_{-1}^{+1} (F_i' F_k + 2 F_i F_k') d\zeta; \\ h_{ik} &= - \int_{-1}^{+1} [F_i' F_k' - 4 \sin^2 \alpha (F_i' F_k + F_i F_k')] d\zeta; \\ Q_k(\xi_1) &= \cos^2 \alpha N h_*^2 \int_{-1}^{+1} \int_0^1 \{m(\eta) [\sigma_{x1} + (\nu / (1 - \nu)) \sigma_{y1}] \zeta + (\sigma_{x0} + (\nu / (1 - \nu)) \sigma_{y0})\} d\eta F_k d\zeta; \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} m_{ik} &= - \int_{-1}^{+1} F_i F_k d\zeta; \quad n_{ik} = -2 \sin \alpha \int_{-1}^{+1} (2 F_i' F_k + F_i F_k') d\zeta; \\ p_{ik} &= \int_{-1}^{+1} [(1 + 4 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha / (1 - \nu)) F_i' F_k' - 4 \sin^2 \alpha (2 F_i' F_k - F_i F_k')] d\zeta; \\ r_{ik} &= 2 \sin \alpha \int_{-1}^{+1} [F_i'' F_k' + ((\sin^2 \alpha (5 - 4\nu) + 2 - \nu) / (1 - \nu)) F_i' F_k' + 4 \sin^2 \alpha (F_i' F_k + 2 F_i F_k')] d\zeta; \\ R_k(\xi_1) &= \sin 2\alpha \cos \alpha N h_*^2 \int_{-1}^{+1} \int_0^1 \{m(\eta) [(\sigma_{x1} + (\nu / (1 - \nu)) \sigma_{y1}) (2\zeta - 1) + 2(\sigma_{x0} + (\nu / (1 - \nu)) \sigma_{y0})]\} d\eta F_k d\zeta. \end{aligned}$$

Можно показать [4], что граничные условия (27) представляют собой работу касательных напряжений  $\tau_{xzn}$  на нормальных перемещениях  $w_n$  и работу краевых нормальных напряжений  $\sigma_{xn}$  на продольных перемещениях  $u_n$ .

Можно доказать [7], что расчетная асимптотическая погрешность полного НДС, допущенная от замены трехмерных уравнений теории упругости двумерными уравнениями элементарных НДС, а также при выполнении граничных условий, будет порядка  $h_*$ .

На этом основании введем упрощения в уравнения краевой плоской деформации. Действительно, в том частном случае, когда изменение угла  $\alpha$  ограничено неравенством  $h_* < \sin \alpha \leq h_*^{1/2}$ , величиной  $P_k$  в (25) можно пренебречь, как величиной порядка  $h_*$ , т.е. полагаем  $P_k = 0$ , благодаря чему отпадает необходимость в построении частного интеграла системы (25). Если значение  $\sin 2\alpha$  близко к  $h_*$ , то будем считать в (27)  $R_k = 0$ . Кроме того, в этом случае, согласно (16) и (18), достаточно потребовать, чтобы аппроксимирующие функция  $F_i(\zeta)$  удовлетворяли только граничным условиям (23). В обоих случаях также значительно упрощаются выражения для коэффициентов (26), (28).

Рассматривая прямоугольную пластинку постоянной толщины, как частный случай данной пластинки, можно получить [4] уравнения краевой задачи о плоской деформации из соотношений (25), (28), с (18) и (16), положив в них  $\alpha = 0$ .

В работе [4] показано, что при определении функции плоской деформации в ряду (22) можно ограничиться лишь первым членом ряда, взяв аппроксимирующую функцию в виде

$$F_1(\zeta) = \zeta - (7/6)\zeta^3 + (1/6)\zeta^{15} \quad (29)$$

#### 4. ПРИМЕР РАСЧЕТА ПОДАТЛИВОСТИ ЗАКРЕПЛЁННОГО КРАЯ

Рассмотрим пример расчета консольной стальной квадратной ( $\varepsilon = 1$ ) пластинки с относительной полутолщиной  $h_* = 0.01$ , нагруженной нормальным давлением, изменяющимся по закону  $q = q_0 \eta$ .

Используя аппроксимацию (29), по аналогии с круговой цилиндрической оболочкой [7], можно получить функцию  $\Phi$  в виде

$$\Phi = E \exp(-4.01\xi_1)(0.061 \cos 2.39\xi_1 - 0.149 \sin 2.39\xi_1)(\zeta - (7/6)\zeta^3 + (1/6)\zeta^{15}) \quad (30)$$

Компоненты напряжений плоской деформации найдем по формулам (18). В результате расчетов можно получить, что для рассматриваемой пластинки напряжение  $\sigma_{xII}$  составляет 35%, напряжение  $\sigma_{zII}$  – 25%, напряжение  $\tau_{xzII}$  – 14% от максимального напряжения изгиба. Таким образом, плоская деформация вносит существенный вклад в общее НДС и должна учитываться при расчетах на прочность.

Можно оценить влияние податливости закрепленного края на величины напряжений плоской деформации, считая, что изотропная пластинка крепится к полупространству с модулем упругости  $E_1$ , простирающемуся в направлении  $x < 0$ . Решая контактную задачу о пластинке с полупространством и обобщая с помощью функций влияния решение задачи Фламана-Буссинеска [17] на случай

распределенных по поверхности нагрузок, можно получить краевую задачу, модифицированную [4] по отношению к задаче (25)-(28). В этом случае функция  $\Phi$  вместо формулы (30) описывается выражением

$$\Phi = \frac{0.483E}{7.79 + (10.05 + 3.03 \ln \alpha_2^2)L + (0.72 + 0.24 \ln \alpha_2^2)L^2} \times \exp(-4.01\xi_1) [\cos 2.39\xi_1 - (2.55 + 0.33l) \sin 2.39\xi_1] \times (\zeta - (7/6)\zeta^3 + (1/6)\zeta^{15}) \quad (31)$$

В этой формуле  $L = E/E_1$ ;  $\alpha_2$  – расстояние от начала координат такой точки, лежащей на оси  $\xi_1$ , в которой контактные перемещения плоской деформации пренебрежимо малы. Для практических расчетов можно полагать [18], что

$$0 \ll \alpha_2 \leq 1.$$

Напряженное состояние краевой плоской деформации, в соответствии с (31), существенно зависит от параметров  $L$  и  $\alpha_2$ . Изменяя  $L$  в интервале, характерном для металлов, построим кривую зависимости напряжений  $\sigma_{xII}^0$  ( $\xi_1 = 0, \eta = 1, \zeta = 1$ ) от параметра  $L$ . Такие кривые при различных значениях  $\alpha_2$  представлены на рис.2, где через  $\sigma_{xk}^m$  обозначено максимальное напряжение, соответствующее классической теории. Они позволяют сделать вывод о том, что с увеличением податливости закрепления напряжения плоской деформации имеют тенденцию к снижению.

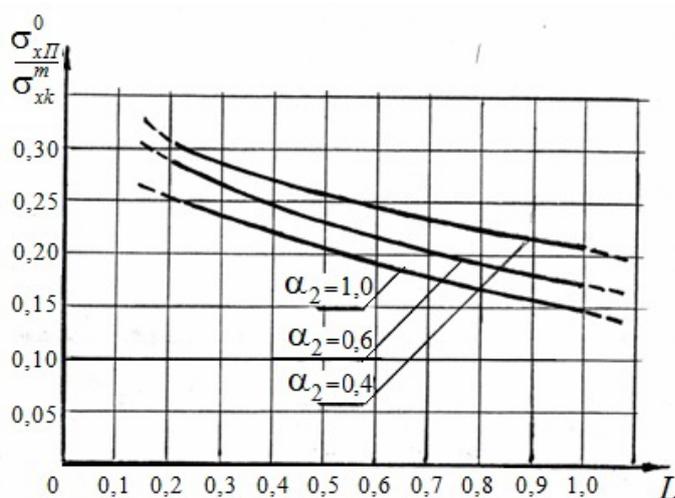


Рис.2. Влияние податливости края на напряжение пограничного слоя.

На основании результатов данной работы и [4] можно предположить, что дополнительные краевые напряжения пограничного слоя вблизи соединений пластинок и оболочек из композиционных материалов могут оказаться более значительными, чем для аналогичных элементов из изотропных материалов, в силу большего разброса упругих характеристик композиционных материалов и существенного влияния поперечных нормальных и касательных напряжений на их прочность.

Предварительные исследования некоторых видов пластинок из трех армированных композитов показали, что для материалов с невысоким

модулем упругости арматуры краевую плоскую деформацию необходимо учитывать при оценке прочности пластинок.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе принятой новой гипотезы вертикального элемента с помощью специально введенной косоугольной системы координат построены краевые задачи для определения полного напряженного состояния прямоугольной пластинки переменной толщины.

Показан существенный вклад поперечных нормальных и касательных напряжений «пограничного слоя» в общее напряженное состояние пластинки.

Установлено значительное влияние податливости края пластинки на напряженное состояние «пограничного слоя».

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Фирсанов В.В., Серпичева Е.В.* Прочность и трещиностойкость непрерывных соединений авиационных конструкций на основе неклассической теории оболочек // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2014. – Вып.11. – Ч.1. – С.267-278.
2. *Фирсанов В.В.* Математические модели уточненного расчета на прочность непрерывных авиационных соединений с учетом их податливости // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2015. – №3. – С.58-69.
3. *Гольденвейзер А.Л.* Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
4. *Фирсанов В.В.* Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2002. – Т.8. – №1. – С.28-64.
5. *Фирсанов В.В.* Локальное напряженно-деформированное состояние цилиндрической оболочки на основе трехмерных уравнений теории упругости. // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2013. – №2. – С.10-19.
6. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
7. *Фирсанов В.В.* Погранслои и его влияние на прочность цилиндрической оболочки переменной толщины. // Вестник Московского авиационного института. – 2010. – Т.17. – №5. – С.212-218.
8. *Фирсанов В.В.* Напряженно-деформированное состояние в краевой зоне цилиндрической оболочки переменной толщины // Известия ТулГУ. Технические науки. – 2015. – Вып.4. – С.20-30.
9. *Firsanov V.V., Doan C.N.* Energy consistent theory of cylindrical shells // J. of Machinery Manufacture and Reliability. – 2011. – Vol.40. – №6. – P.543-548.
10. *Фирсанов В.В., Доан Ч.Н., Ле Ч.Х.* Уточнённая теория расчёта напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки переменной толщины // Вестник Московского авиационного института. – 2013. – Т.20. – №4. – С.198-211.

11. *Firsanov V.V., Doan C.N.* Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory // *Composites: Mechanics, Computations, Applications*. – 2015. – Vol.6. – Iss.2. – P.135-166.
12. *Firsanov V.V., Doan C.N.* Natural Oscillations of General Shells Based on Nonclassical Theory // *J. of Machinery Manufacture and Reliability*. – 2014. – Vol.43. – N5. – P.349-357.
13. *Фирсанов В.В., Доан Ч.Н.* Исследование сходимости результатов расчёта свободных колебаний произвольных оболочек на основе неклассической теории // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2014. – Т.20. – №4. – С.506-518.
14. *DiCarlo A., Podio-Guidugli P., Williams W.O.* Shells with thickness distension // *Intern. J. of Solids and Structures*. – 2001. – Vol.38. – Iss.6-7. – P.1201-1225.
15. *Jaiani G., Kharibegashvili S., Natroshvili D., Wendland W.L.* Two-dimensional hierarchical models for prismatic shells with thickness vanishing at the boundary // *Journal of Elasticity* – 2004. – Vol.77. – Iss.2. – P.95-122.
16. *Jaiani G.* Differential hierarchical models for elastic prismatic shells with microtemperatures // *ZAMM (Journal of Applied Mathematics and Mechanics)*. – 2015. – Vol.95. – Iss.1. – P.77-90.
17. *Филоненко-Бородич М.М.* Теория упругости. – М.: Физматгиз, 1959. – 364 с.
18. *Филоненко-Бородич М.М.* Задача о равновесии упругого параллелепипеда при заданных нагрузках на его гранях // *Прикладная математика и механика*. – 1951. – Т.15. – Вып.2. – С.137-148.

*Поступила в редакцию 1 июля 2015 года.*

---

Сведения об авторе:

Фирсанов Валерий Васильевич – д.т.н., проф., заведующий кафедрой «Машиноведение и детали машин», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский Университет), г. Москва, Россия; e-mail: [k906@mai.ru](mailto:k906@mai.ru)