

УДК 539.3

МЕТОД РАДИАЛЬНЫХ МНОЖИТЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ МЕХАНИКИ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД С МНОГОСЛОЙНЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Волков-Богородский Д.Б.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия***АННОТАЦИЯ**

Рассматриваются среды, образованные композицией однородной матрицы и периодически расположенных многослойных включений с дисперсным или волокнистым наполнителем в виде произвольным образом расположенных частиц сферической, сфероидальной или цилиндрической формы. Для моделирования физических процессов в этих средах применяется метод радиальных множителей, позволяющий для широкого класса задач, включающего уравнения теории упругости, теплопроводности и фильтрации построить в компактном виде с помощью представления Папковича-Нейбера системы базисных функций, аналитически точно удовлетворяющих исходному уравнению и контактными условиям на межфазных границах. Эти функции используются для решения с помощью блочного метода наименьших квадратов задач механики в неоднородных средах с многослойными включениями сферической, сфероидальной и цилиндрической формы; в частности, для оценки с высокой степенью точности эффективных характеристик и внутренних полей в структурно-неоднородных материалах методом асимптотического усреднения Бахвалова, а также непосредственно, для прямого моделирования физических процессов в структурно-неоднородных средах.

Ключевые слова: многослойные включения; структурный анализ уравнения Гельмгольца; радиальные множители; цилиндрическая, сферическая и сфероидальная система координат; точный учет межфазных взаимодействий; эффективные характеристики структурно-неоднородных материалов; блочный метод наименьших квадратов

RADIAL MULTIPLIERS METHOD IN MECHANICS OF INHOMOGENEOUS MEDIA WITH MULTI-LAYERED INCLUSIONS

Volkov-Bogorodskij D.B.

*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia***ABSTRACT**

We consider the materials formed by the homogeneous matrix and periodically arranged multi-layered inclusions with the dispersed or fibrous particles of spherical, spheroidal or cylindrical form. It applied the method of radial multipliers to simulate the physical processes in these materials, which allows to construct in compact form via Papkovich-Neuber representation, the system of basis functions for a wide range of problems, including the theory of elasticity, thermal conductivity and filtration. These systems analytically exactly satisfy the original equation and contact conditions on the interphase boundaries. These functions are used for solving the problems of mechanics of heterogeneous media with multi-layered inclusions of spherical, spheroidal and cylindrical form by the block method of least squares. In particular, they are used for estimation with a high degree of accuracy by asymptotic homogenization

method of effective characteristics and internal micro-fields in heterogeneous materials, as well as for direct modeling of physical processes in structurally inhomogeneous materials.

Keywords: layered inclusions; structural analysis of Helmholtz equation; radial multipliers; cylindrical, spherical and spheroidal coordinate system; analytical description of interphase interactions; effective characteristics of structurally inhomogeneous media; block least square method

ВВЕДЕНИЕ

Различные методы исследования эффективных свойств структурно-неоднородных материалов так или иначе опираются на решение вспомогательной задачи, описывающей физическое поведение материала вблизи неоднородных включений. В методе асимптотического усреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами [1-3] это задача для функций быстрых переменных (на ячейке периодичности), в методе трех (или более) сферических или цилиндрических тел [4,5] это задача Эшелби для составного тела в бесконечной матрице под действием однородного поля напряжений. Возможно также и прямое численное моделирование структурно-неоднородного материала, предполагающее включение в конечно-элементную схему реальной геометрии всех неоднородностей в матрице [6-9].

Однако, непосредственное конечно-элементное моделирование сложно организованных материалов является дорогостоящей процедурой, требующей значительных вычислительных ресурсов. Так, процедура параметрического усреднения [10], применяемая для нелинейных материалов, основана на вычислении функций быстрых переменных в параметрическом пространстве, что предполагает при проведении расчетов множественное варьирование дополнительного набора параметров и требует больших усилий по аппроксимации решения вблизи контакта области включения и матрицы.

В связи с этим приобретают актуальность аналитико-численные методы [11-15], основанные на аппроксимации решения специальными системами функций, точно удовлетворяющими определяющей системе уравнений и контактными условиям на границе между включением и матрицей (с учетом промежуточного межфазного слоя).

В настоящей работе предлагается конструктивный метод построения таких систем функций, удовлетворяющих уравнению и необходимым контактными условиям для включений цилиндрической, сферической и сфероидальной формы для уравнений теории упругости, теплопроводности и фильтрации. На основе этих систем решение соответствующих краевых задач для структурно-неоднородных материалов строится с помощью блочного варианта метода наименьших квадратов [16-19].

Рассматриваются два основных векторных уравнения, используемые в данной работе при моделировании процессов в структурно-неоднородных материалах, и для них выводятся однотипные представления, обобщающие известное представление Папковича-Нейбера в теории упругости [20,21]. Это уравнение Ламе (система уравнений изотропной теории упругости в перемещениях) с дополнительным свободным членом и уравнение Бринкмана [22,23] для медленного течения вязкой несжимаемой жидкости в пористой среде при фильтрации

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\mu + \lambda) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} - C \mathbf{u} + \mathbf{F} = 0, \quad (1)$$

$$\eta \nabla^2 \mathbf{V} - C \mathbf{V} - \nabla p + \mathbf{F} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}$ – вектор перемещений, λ, μ – параметры Ламе (μ – модуль сдвига), $\mathbf{V} = \{V_x, V_y, V_z\}$ – скорость движения жидкости в пористой среде при фильтрации, p – давление при фильтрации, η – коэффициент динамической вязкости, $\mathbf{F} = \{F_x, F_y, F_z\}$ – объемная плотность внешних сил, действующих в теле или в области фильтрации.

Частными случаями уравнения Бринкмана при $C = 0$ и при $\eta = 0$ являются, соответственно, уравнение Стокса и уравнение фильтрации Дарси [24]. Фильтрация в пористой среде с проницаемостью k описывается уравнением (2) при $C = k/\eta$ (см. [22]). Однако, уравнение (2) может также рассматриваться, как динамическое уравнение Стокса при экспоненциальном законе изменения по времени t скорости, давления и внешних сил: $\tilde{\mathbf{V}}(P, t) = \mathbf{V}(P) \exp(-kt)$, $\tilde{p}(P, t) = p(P) \exp(-kt)$, $\tilde{\mathbf{F}}(P, t) = \mathbf{F}(P) \exp(-kt)$, $P = \{x, y, z\}$. В этом случае $C < 0$; экспоненциальный закон изменения по времени соответствует интегральному преобразованию Лапласа для уравнения Стокса; \mathbf{V} и p трактуются в этом случае, как изображение решения при преобразовании Лапласа, а постоянная C может принимать комплексные значения.

Аналогично, уравнение (1) при $C < 0$ рассматривается как динамическое уравнение Ламе, соответствующее гармоническим колебаниям упругой области с некоторой постоянной частотой, или как уравнение для образа решения при преобразовании Фурье. Отметим, что уравнение (1) возникает также в градиентной теории упругости [25], при этом $C > 0$.

Основная теорема векторного анализа о разложении векторного поля на потенциальную и соленоидальную составляющие [26] может быть сформулирована для уравнения (1) в виде представления, учитывающего специфику структуры его решений.

Теорема 1 (обобщенное представление Папковича-Нейбера). Решение уравнения Ламе (1) может быть представлено в виде

$$\mathbf{u}(P) = \frac{1}{\mu} \mathbf{f}(P) + \frac{1}{C} \nabla \operatorname{div} [\mathbf{f}^*(P) - \mathbf{f}(P)] \quad (3)$$

через два векторных потенциала \mathbf{f} и \mathbf{f}^* , удовлетворяющих уравнениям Гельмгольца

$$\nabla^2 \mathbf{f} - \frac{C}{\mu} \mathbf{f} + \mathbf{F} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{f}^* - \frac{C}{k} \mathbf{f}^* + \mathbf{F} = 0, \quad k = 2\mu + \lambda. \quad (4)$$

Выполнение уравнений (4) является достаточным условием для того, чтобы векторное поле $\mathbf{u}(P)$ в форме (3) было решением (1). Это проверяется непосредственной подстановкой. Необходимость уравнений (4) для представления произвольного решения уравнения (1) в форме (3) обеспечивается дополнительными требованиями к векторному полю $\mathbf{u}(P)$, задающими или его асимптотику на бесконечности, или достаточную гладкость границы конечной области, в которой оно задано.

Представление (3) является полным аналогом основной теоремы векторного анализа с учетом дополнительных свойств векторного поля, удовлетворяющего уравнениям (1), (2), и решает задачу о построении векторного поля $\mathbf{u}(P)$ с заданной дивергенцией и ротором. Дивергенция $\mathbf{u}(P)$ определяется дивергенцией потенциала \mathbf{f}^* , вихревая составляющая – вихревой составляющей потенциала \mathbf{f}

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(P) = \frac{\operatorname{div} \mathbf{f}^*(P)}{k}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{u}(P) = \frac{\operatorname{rot} \mathbf{f}(P)}{\mu}. \quad (5)$$

Для уравнений фильтрации Бринкмана (2) обобщенное представление Папковича-Нейбера выводится из (3) с помощью предельного перехода по параметру $\nu \rightarrow 0.5$, что соответствует переходу к несжимаемой среде. Потенциал \mathbf{f}^* при этом будет удовлетворять уравнению Пуассона вместо уравнения Гельмгольца, поскольку $k = 2\mu + \lambda \rightarrow \infty$, и давление p будет определяться через потенциал \mathbf{f}^* по явной формуле, что следует из (5)

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(P) &= \frac{1}{\eta} \mathbf{f}(P) - \frac{1}{C} \nabla \operatorname{div} [\mathbf{f}^*(P) - \mathbf{f}(P)], \\ p &= -\operatorname{div} \mathbf{f}^*, \quad \nabla^2 \mathbf{f}^* + \mathbf{F} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

А для потенциала \mathbf{f} остается прежнее уравнение (4) (с заменой μ на η). Условие несжимаемости для скорости \mathbf{V} в представлении (6) выполняется автоматически.

Классическое уравнение теории упругости и уравнение Стокса соответствуют $C = 0$. Соответствующие представления получаются из (3) и (6) предельным переходом по $C \rightarrow 0$. Для уравнений теории упругости получаем классическое представление Папковича-Нейбера (см. [20, 21])

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(P) &= \frac{\mathbf{f}_0(P)}{\mu} + \frac{\nabla(\phi_0 - \mathbf{r} \mathbf{f}_0)}{4\mu(1-\nu)}, \\ \nabla^2 \mathbf{f}_0 + \mathbf{F} &= 0, \quad \nabla^2 \phi_0 + \mathbf{r} \mathbf{F} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

А для уравнения Стокса получаем представление, которое также следует из (7) при $\nu \rightarrow 0.5$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(P) &= \frac{\mathbf{f}_0(P)}{\eta} + \frac{\nabla(\phi_0 - \mathbf{r} \mathbf{f}_0)}{2\eta}, \quad p = -\operatorname{div} \mathbf{f}_0, \\ \nabla^2 \mathbf{f}_0 + \mathbf{F} &= 0, \quad \nabla^2 \phi_0 + \mathbf{r} \mathbf{F} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что (7) и (8) удовлетворяют (1) и (2) при $C = 0$; условие несжимаемости выполняется автоматически.

Операторы (3), (6)-(8) устанавливают соответствие между векторными полями $\mathbf{u}(P)$ и $\mathbf{V}(P)$, являющимися решениями уравнений теории упругости и фильтрации (1), (2), и векторными потенциалами \mathbf{f} и \mathbf{f}^* уравнений Гельмгольца, Лапласа и Пуассона. Тем самым они определяют общее решение уравнений теории упругости и фильтрации в однородной форме, на основе вспомогательных потенциалов.

Нормировка потенциалов в (3), (6)-(8) выбрана таким образом, чтобы уравнения (4) выполнялись с той же правой частью, что и уравнения (1), (2). В частности, операторы (3), (6)-(8) устанавливают соответствие между

фундаментальными решениями уравнений Гельмгольца и Лапласа (4) и уравнений теории упругости и фильтрации (1), (2).

Уравнения Гельмгольца и Лапласа возникают не только в обобщенных представлениях типа Папковича-Нейбера (3), (6)-(8) при описании общего решения уравнений (1), (2), но также и при описании общего решения уравнения теплопроводности [26,27]. Разделение пространственных переменных и временной координаты в однородном уравнении теплопроводности относительно температуры $T(P, t)$ для изотропного материала приводит к частному решению следующего вида

$$T(P, t) = \Phi(P) e^{-\kappa^2 \hat{t}}, \quad \nabla^2 \Phi(P) + \kappa^2 \Phi(P) = 0, \quad (9)$$

где $\hat{t} = \frac{\lambda}{\rho c} t$ – безразмерное время Фурье, λ – коэффициент теплопроводности изотропного материала, ρ – плотность, c – удельная теплоемкость; постоянная κ задает скорость установления температуры в представлении (9), в частности, она может принимать нулевое значение.

Аппроксимация тепловых процессов в структурно-неоднородных материалах обычно основана на представлении общего решения исходного уравнения в каждой из фаз материала в виде суперпозиции частных решений вида (9); т.е. она основана на фундаментальных решениях уравнения Гельмгольца. Решения вида (9) характерны для тепловых процессов, составляя в частности ядро интегрального преобразования Лапласа, являющегося эффективным аналитическим инструментом для получения решений уравнения теплопроводности [27].

1. ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА ЭШЕЛБИ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ АПРОКСИМИРУЮЩЕЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

Уравнения теории упругости и фильтрации (векторные уравнения) согласно технике асимптотического усреднения [10-15] приводят к матричным уравнениям для функций быстрых переменных, которые разбиваются на ряд однородных векторных задач того же типа, что и исходное уравнение. Для этих задач наиболее важным является строгое выполнение контактных условий на границе межфазных зон, которые, как мы предполагаем, имеют сферическую, сфероидальную или цилиндрическую форму. Аналогичная ситуация справедлива и для уравнений теплопроводности в структурно-неоднородной среде с многослойными включениями.

Для аппроксимации решений (на ячейке периодичности) в методе асимптотического усреднения строится аппроксимирующая система функций, удовлетворяющая аналитически точно контактным условиям на межфазных границах многослойного включения (рис.1). Для этого с помощью обобщенного представления Папковича-Нейбера (3), (6)-(8) (или представления (9) для уравнения теплопроводности) указывается такая форма представления вспомогательных потенциалов на основе гармонического полинома и специальных функций, зависящих только от радиуса в сферической или цилиндрической симметрии (радиальных множителей), что решение имеет полиномиальную асимптотику на бесконечности и аналитически точно удовлетворяет контактным условиям на межфазных границах. Такая задача для уединенного многослойного включения с полиномиальной асимптотикой

на бесконечности называется обобщенной задачей Эшелби по аналогии с задачей Эшелби в методе самосогласованного усреднения трех тел [4,5].

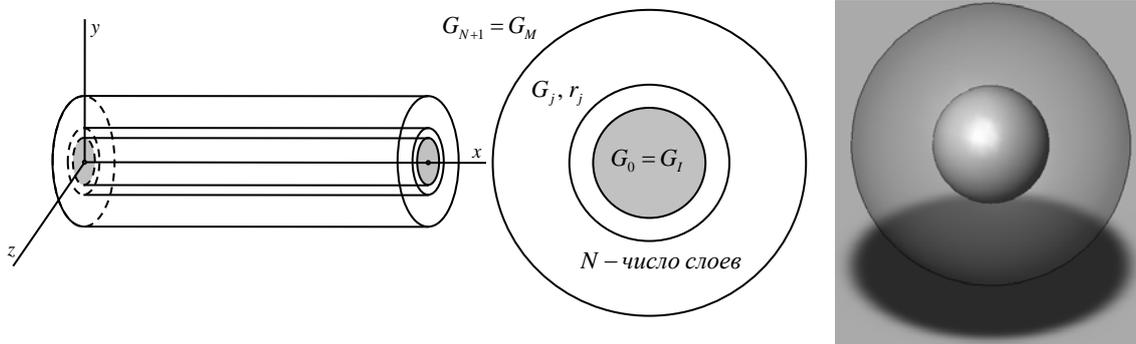


Рис.1. Модель многослойного включения (сферической или цилиндрической формы).

Необходимые фундаментальные системы уравнения Гельмгольца для аппроксимации вспомогательных потенциалов в представлениях (3), (6)-(9) в материале с включениями сферической, цилиндрической и сфероидальной формы строятся с помощью произвольного гармонического полинома и радиальных множителей – функций $\chi(r)$, где r – радиальная координата (сферическая, цилиндрическая или сфероидальная), обеспечивающих при умножении на гармонический полином необходимые аналитические свойства: полноту аппроксимирующих систем и удовлетворение уравнению Лапласа или Гельмгольца.

2. АППРОКСИМИРУЮЩИЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ СФЕРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Сформулируем метод радиальных множителей для включений сферической формы. Для этого с каждым слоем (а также с включением и матрицей) свяжем набор базисных потенциалов из сформулированных представлений (3), (6)-(9), построенных с помощью однородного гармонического полинома $f_n^{(0)}$ степени n и набора регулярных $\chi_n(r)$ и сингулярных $\hat{\chi}_n(r)$ функций, зависящих от сферической радиальной координаты $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, т.е. набора радиальных функций.

Для стационарного уравнения теплопроводности ($\kappa = 0$) образуем два базисных потенциала Φ_1 и Φ_2 в представлении (9), первый из них регулярный, второй – сингулярный

$$\Phi_1(P) = f_n^{(0)}(P), \quad \Phi_2(P) = \hat{\chi}_n(r) f_n^{(0)}(P), \quad \hat{\chi}_n(r) = r^{-2n-1}. \quad (10)$$

Заметим, что второй потенциал (10) является гармоническим и может служить базисом для построения решения, поскольку получен из первого преобразованием инверсии (преобразованием Кельвина).

Соберем все потенциалы, определяющие решение уравнения теплопроводности в составной сферической области $G_I \cup G_j \cup G_M$, где $G_I = \{r < r_0\}$ ассоциируется с включением, $G_j = \{r_{j-1} < r < r_j\}$ ассоциируется

с промежуточным слоем и $G_M = \{r_N < r\}$ ассоциируется с матрицей в обобщенной задаче Эшелби, определяющей решение с полиномиальным поведением на бесконечности (в методе трех сферических тел [5] решение имеет линейное поведение на бесконечности)

$$\Phi(P) = A_0 f_n^{(0)}(P), \quad P \in G_I, \quad (11)$$

$$\Phi(P) = A_j f_n^{(0)}(P) + B_j \hat{\chi}_n(r) f_n^{(0)}(P), \quad P \in G_j, \quad (12)$$

$$\Phi(P) = f_n^{(0)}(P) + B_{N+1} \hat{\chi}_n(r) f_n^{(0)}(P), \quad P \in G_M. \quad (13)$$

На основе этих представлений получаем систему $2(N+1)$ уравнений для неизвестных коэффициентов A_0 , B_{N+1} , A_j , B_j , $j=1 \div N$, отвечающую необходимым контактными условиям на межфазных границах для уравнения теплопроводности; для условий идеального контакта эти уравнения имеют вид

$$A_0 = A_1 + B_1 \hat{\chi}_n(r_0), \quad A_N + B_N \hat{\chi}_n(r_N) = 1 + B_{N+1} \hat{\chi}_n(r_N),$$

$$A_j + B_j \hat{\chi}_n(r_j) = A_{j+1} + B_{j+1} \hat{\chi}_n(r_j), \quad j=1 \div (N-1);$$

$$\lambda_I A_0 = \lambda_L \left(A_1 - \frac{n+1}{n} B_1 \hat{\chi}_n(r_0) \right),$$

$$\lambda_N \left(A_N - \frac{n+1}{n} B_N \hat{\chi}_n(r_N) \right) = \lambda_M \left(1 - \frac{n+1}{n} B_{N+1} \hat{\chi}_n(r_N) \right),$$

$$\lambda_j \left(A_j - \frac{n+1}{n} B_j \hat{\chi}_n(r_j) \right) = \lambda_{j+1} \left(A_{j+1} - \frac{n+1}{n} B_{j+1} \hat{\chi}_n(r_j) \right), \quad j=1 \div (N-1).$$

Первая группа уравнений соответствует условию непрерывности температуры Φ , а вторая – непрерывности теплотокота $Q = -\lambda \partial \Phi / \partial n$ на межфазных границах, λ – модуль теплопроводности; отсюда получаем все коэффициенты.

Таким образом, соотношения (11)-(13) определяют некоторую систему функций, которая удовлетворяет условиям идеального контакта (непрерывность температуры и теплотокота) и определяется гармоническим полиномом $f_n^{(0)}(P)$, имеющим смысл асимптотики на бесконечности: $\Phi(P) \rightarrow f_n^{(0)}(P)$, $P \rightarrow \infty$. Эта система функций является полной в классе “функций с периодическим скачком”, и может быть использована для аппроксимации решений на ячейке периодичности в методе асимптотического усреднения уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами [1].

Отдельные степени свободы в (11)-(13) задаются системой гармонических полиномов $\Phi_n^m(P)$ (комплекснозначных), построенных с помощью метода квазиразделения переменных на основе функций $\psi_0(w) = w^m$ и $U_0(z) = z^{n-m}$, где $w = x + iy$ (см. [13])

$$\Phi_n^m(P) = \sum_p \frac{(-1)^p \bar{w}^p}{4^p p!} \psi_0^{(-p)}(w) U_0^{(2p)}(z), \quad \psi_0(w) = w^m, \quad U_0(z) = z^{n-m}. \quad (14)$$

Здесь n – общая степень однородного гармонического полинома, m – степень угловых осцилляций по координате $\varphi = \arctan(y/x)$. Общее число вещественных степеней свободы в (14) при фиксированном n равно $(n+1)^2$.

Для классического уравнения Ляме, соответствующего представлению (7), необходимо определить для каждой подобласти G_I , G_j и G_M систему четырех

базисных гармонических потенциалов на основе векторного гармонического полинома $f_n^{(0)}$

$$f_1(P) = f_n^{(0)}(P), \quad f_2(P) = \hat{\chi}_n(r) f_n^{(0)}(P), \quad \hat{\chi}_n(r) = r^{-2n-1}, \quad (15)$$

$$f_3(P) = \nabla \operatorname{div}(\hat{\chi}_n f_n^{(0)}), \quad f_4(P) = \chi_n(r) \nabla \operatorname{div}(\hat{\chi}_n f_n^{(0)}), \quad \chi_n(r) = r^{2n+5}. \quad (16)$$

Рассмотрим для простоты сферическое включение с одним межфазным слоем $G_L = G_1$.

Из линейных комбинаций потенциалов (15), (16) составляется решение классического уравнения Ляме в областях G_I , G_L и G_M , причем с каждой подобластью связывается свой гармонический полином (один или два), который в дальнейшем будет выражен через полином $f_n^{(M)}$, соответствующий полиномиальной асимптотике на бесконечности

$$f_0(P) = f_n^{(I)} + C_0 \hat{\chi}_n \nabla \operatorname{div}(\chi_n \hat{f}_n^{(L)}), \quad P \in B_I, \quad (17)$$

$$f_0(P) = f_n^{(L)} + A_j \chi_n \hat{f}_n^{(L)} + B_1 \nabla \operatorname{div}(\chi_n \hat{f}_n^{(L)}) + C_1 \hat{\chi}_n \nabla \operatorname{div}(\chi_n \hat{f}_n^{(L)}), \quad P \in G_j, \quad (18)$$

$$f_0(P) = f_n^{(M)} + A_2 \chi_n \hat{f}_n^{(M)} + B_2 \nabla \operatorname{div}(\chi_n \hat{f}_n^{(M)}) + C_2 \nabla \operatorname{div}(\chi_n \hat{f}_n^{(L)}), \quad P \in B_M; \quad (19)$$

потенциал $\phi_0(P)$ полагается равным нулю.

Полиномы $f_n^{(I)}$, $\hat{f}_n^{(L)}$, $f_n^{(L)}$, $\hat{f}_n^{(M)}$, $f_n^{(M)}$ вместе с коэффициентами C_0 , A_1 , B_1 , C_1 , A_2 , B_2 , C_2 используются для сшивки перемещений и напряжений на межфазных границах. Анализируя граничные уравнения контакта, запишем входящие в них перемещения и поверхностные силы на границе сферической области радиуса r с вектором нормали \mathbf{n} в следующем виде через векторный потенциал f_0 , определяемый в подобластях формулами (17)-(19)

$$U(P) = \frac{f_0}{\mu} - \frac{\nabla(\mathbf{r}f_0)}{4\mu(1-\nu)},$$

$$\mathbf{p}(U) = \frac{\partial f_0}{\partial n} + \mathbf{n} \nabla f_0 + \frac{\nu \mathbf{n} \operatorname{div} f_0}{1-\nu} - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial \nabla(\mathbf{r}f_0)}{\partial n}. \quad (20)$$

Здесь μ – модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона.

Производя дифференцирование для произведения радиального множителя и функции, получаем дифференциальные соотношения следующего вида, используемые при выводе контактных уравнений на межфазных границах

$$\operatorname{div}(\chi \mathbf{f}) = \chi \operatorname{div} \mathbf{f} + (\mathbf{r} \mathbf{f}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \chi(r),$$

$$\nabla(\chi \mathbf{r} \mathbf{f}) = \chi \nabla(\mathbf{r} \mathbf{f}) + \mathbf{r} (\mathbf{r} \mathbf{f}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \chi(r),$$

$$\nabla \operatorname{div}(\chi \mathbf{f}) = \left\{ \chi \nabla \operatorname{div} \mathbf{f} + [\nabla(\mathbf{r} \mathbf{f}) + \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{f}] \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \chi(r) + \mathbf{r} (\mathbf{r} \mathbf{f}) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \chi(r) \right\}$$

Анализируя представление (7) для потенциалов (15), (16), находим, что на поверхности сферы в граничных уравнениях контакта перемещения и поверхностные силы представляются в виде линейных комбинаций некоторых стандартных операторов от определяющего гармонического полинома $f_n^{(0)}$ с радиальными множителями $\chi_0(r)$, $\chi_1(r)$, $\chi_2(r)$, $\chi_3(r)$ и $\chi_4(r)$, принимающими постоянное значение на поверхности сферы

$$F(P) = \chi_0 f_n^{(0)} + \chi_1 r^2 \nabla \operatorname{div} f_n^{(0)} + \chi_2 \nabla (\mathbf{r} f_n^{(0)}) + \chi_3 \mathbf{r} \operatorname{div} f_n^{(0)} + \chi_4 \mathbf{r} (\mathbf{r} f_n^{(0)}). \quad (21)$$

Здесь $F(P)$ – любая из величин (20), а формула (21) задает вид граничного полинома в контактном уравнении в форме линейной комбинации полиномов $r^2 \nabla \operatorname{div} f_n^{(0)}$, $\nabla (\mathbf{r} f_n^{(0)})$, $\mathbf{r} \operatorname{div} f_n^{(0)}$ и $\mathbf{r} (\mathbf{r} f_n^{(0)})$. Из них первый, второй и третий имеют порядок n , а последний – порядок $n+2$. Форма представления потенциала (17)-(19) позволяет скомпенсировать слагаемые порядка $n+2$ в граничных уравнениях для скачка перемещений и напряжений за счет коэффициентов C_0 , A_1 , B_1 , C_1 , A_2 , B_2 , C_2 . В результате в граничных уравнениях остаются полиномы порядка n , которые обнуляются за счет выбора функций $f_n^{(I)}$, $f_n^{(L)}$, $\hat{f}_n^{(L)}$ и $\hat{f}_n^{(M)}$ (четыре векторных условия – четыре векторных функции).

Ниже приводится вид радиальных функций в разложении (21) для базисных потенциалов (15), (16). Потенциал $f_1(P)$ из (15) порождает следующие компоненты в (21)

$$U = \frac{f_n^{(0)}}{\mu} - \frac{\nabla (\mathbf{r} f_n^{(0)})}{4\mu(1-\nu)}, \quad \mathbf{p} = r^{-1} \left[(n-1) f_n^{(0)} - \frac{n-2(1-\nu)}{2(1-\nu)} \nabla (\mathbf{r} f_n^{(0)}) + \frac{\nu}{1-\nu} \mathbf{r} \operatorname{div} f_n^{(0)} \right].$$

Потенциал $f_2(P)$

$$U = r^{-2n-1} \left[\frac{f_n^{(0)}}{\mu} - \frac{\nabla (\mathbf{r} f_n^{(0)})}{4\mu(1-\nu)} + \frac{2n+1}{4\mu(1-\nu)} \frac{\mathbf{r} (\mathbf{r} f_n^{(0)})}{r^2} \right],$$

$$\mathbf{p} = -r^{-2n-2} \left[(n+2) f_n^{(0)} - \frac{n+3-2\nu}{2(1-\nu)} \nabla (\mathbf{r} f_n^{(0)}) - \frac{\nu}{1-\nu} \mathbf{r} \operatorname{div} f_n^{(0)} + \frac{(2n+1)(n+3)}{2(1-\nu)} \frac{\mathbf{r} (\mathbf{r} f_n^{(0)})}{r^2} \right].$$

Потенциал $f_3(P)$

$$U = \frac{(2n+1)(n+6-4\nu)}{4\mu(1-\nu)} r^{-2n-3} \left[\frac{r^2 \nabla \operatorname{div} f_n^{(0)}}{2n+1} - \nabla (\mathbf{r} f_n^{(0)}) - \mathbf{r} \operatorname{div} f_n^{(0)} + (2n+3) \frac{\mathbf{r} (\mathbf{r} f_n^{(0)})}{r^2} \right],$$

$$\mathbf{p} = -\frac{(n+3)(2n+1)(n+6-4\nu)}{2(1-\nu)} r^{-2n-4} \left[\frac{r^2 \nabla \operatorname{div} f_n^{(0)}}{2n+1} - \nabla (\mathbf{r} f_n^{(0)}) - \mathbf{r} \operatorname{div} f_n^{(0)} + \right. \\ \left. + (2n+3) \frac{\mathbf{r} (\mathbf{r} f_n^{(0)})}{r^2} \right].$$

И наконец, потенциал $f_4(P)$

$$U = r^2 \left[\frac{(2n+1)(n+6-4\nu)}{4\mu(1-\nu)} \left(\frac{r^2 \nabla \operatorname{div} f_n^{(0)}}{2n+1} - \nabla (\mathbf{r} f_n^{(0)}) \right) + \frac{\nu+1-n(1-2\nu)}{\mu(1-\nu)} \mathbf{r} \operatorname{div} f_n^{(0)} \right] - \\ - \frac{(2n+1)[(n+2)-2(1-\nu)(2n+3)]}{2\mu(1-\nu)} \mathbf{r} (\mathbf{r} f_n^{(0)}),$$

$$\mathbf{p} = r \left[(2n+1) \left[\frac{(n+2)^2}{2(1-\nu)} - 1 \right] \left(\frac{r^2 \nabla \operatorname{div} \mathbf{f}_n^{(0)}}{2n+1} - \nabla (\mathbf{r} \mathbf{f}_n^{(0)}) \right) - \frac{\nu+1-n(1-2\nu)}{1-\nu} \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{f}_n^{(0)} \right] + \frac{(2n+1) [(n+2)(n+3) - (1-\nu)(2n+3)] \mathbf{r} (\mathbf{r} \mathbf{f}_n^{(0)})}{1-\nu r}.$$

На основе этих соотношений составляется невырожденная система линейных алгебраических уравнений для определения всех коэффициентов в полиномах $\mathbf{f}_n^{(I)}$, $\mathbf{f}_n^{(L)}$, $\hat{\mathbf{f}}_n^{(L)}$ и $\hat{\mathbf{f}}_n^{(M)}$ из (17)-(19) через коэффициенты полинома $\mathbf{f}_n^{(M)}$, задающего асимптотику на бесконечности для потенциала \mathbf{f}_0 в представлении (7).

Разрешая систему уравнений относительно коэффициентов C_0 , A_1 , B_1 , C_1 , A_2 , B_2 , C_2 , компенсирующую в контактных условиях на межфазных границах последнее слагаемое из (21), получаем явный вид для этих коэффициентов. Приведем его в случае условий идеального контакта, когда перемещения \mathbf{U} и поверхностные силы $\mathbf{p}(\mathbf{U})$ являются непрерывными функциями на межфазных границах ∂G_I и ∂G_M

$$C_0 = \frac{\mu_I}{\mu_M} \frac{(\mu_L - \mu_M)(n+3)}{(2n+1)(2n+3)(2(n+3)\mu_L - \mu_I)}, \quad C_1 = \frac{(\mu_L - \mu_M)(n+3)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)\mu_M},$$

$$A_1 = \frac{2(1-\nu_L)(z_1 r_1^{2n+5} - z_0 r_0^{2n+5})}{(2n+1)(r_1^2 - r_0^2)}, \quad B_1 = \frac{2(1-\nu_L)(z_0 r_0^{2n+5} r_1^2 - z_1 r_1^{2n+5} r_0^2)}{(2n+1)(2n+3)(n+6-4\nu_L)(r_1^2 - r_0^2)},$$

$$A_2 = -\frac{2(1-\nu_M) r_1^{2n+3}}{2n+1}, \quad B_2 = C_2 = \frac{2(1-\nu_M) r_1^{2n+5}}{(2n+1)(2n+3)(n+6-4\nu_M)},$$

где

$$z_1 = \frac{\mu_L}{\mu_M} + \frac{(\mu_L - \mu_M)(n+3)}{(1-\nu_L)(2n+3)(2n+5)\mu_M},$$

$$z_0 = \frac{(\mu_L - \mu_M)(n+3)}{2n+3} \left[\frac{n+2-2(1-\nu_L)(2n+3)}{(1-\nu_L)(2n+5)\mu_M} - \frac{\mu_L}{\mu_M} \frac{n+2-2(1-\nu_L)(2n+3)}{(1-\nu_L)(2n+3)\mu_L - \mu_I} \right].$$

Здесь r_0 и r_1 – радиусы сферических поверхностей ∂G_I и ∂G_M , являющихся межфазными границами.

Для неклассического уравнения теории упругости (1), возникающего в градиентной теории упругости [25] и соответствующего представлению (3), (4), необходимо определить систему базисных потенциалов на основе векторного гармонического полинома $\mathbf{f}_n^{(0)}$ для аппроксимации решений уравнений Гельмгольца

$$\mathbf{f}_5 = h_n(r) \mathbf{f}_n^{(0)}(P), \quad \mathbf{f}_6 = \hat{h}_n(r) \mathbf{f}_n^{(0)}(P), \quad \mathbf{f}_7^* = \hat{h}_n^*(r) \mathbf{f}_n^{(0)}(P), \quad \mathbf{f}_8^* = \hat{h}_n^*(r) \mathbf{f}_n^{(0)}(P). \quad (22)$$

Радиальные функции $h_n(r)$ и $\hat{h}_n(r)$ определяются путем дифференцирования фундаментального решения уравнения Гельмгольца в 3D

$$h_n(r) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^n \left(\frac{\operatorname{sh}(\kappa r)}{r} \right), \quad \hat{h}_n(r) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^n \left(\frac{\operatorname{ch}(\kappa r)}{r} \right), \quad \kappa = \sqrt{C/\mu}. \quad (23)$$

Аналогично определяются $h_n^*(r)$ и $\hat{h}_n^*(r)$ с заменой κ на κ^* , где $\kappa^* = \sqrt{C/(2\mu + \lambda)}$.

Базисные потенциалы (22), (23) удовлетворяют первому (f_5, f_6) и второму (f_7^*, f_8^*) уравнению Гельмгольца (4) (см. [12]), и используются для аппроксимации потенциалов f и f^* из (3); при этом группа потенциалов f_5 и f_7^* является регулярной, а группа потенциалов f_6 и f_8^* является сингулярной в начале координат.

Заметим, что радиальные функции (23) связаны между собой следующими рекуррентными и дифференциальными соотношениями

$$r^2 h_{n+2} = \kappa^2 h_n - (2n+3)h_{n+1}, \quad h_n' = \frac{\kappa r(h_n - h_n'')}{2(n+1)} = r h_{n+1}. \quad (24)$$

Из линейных комбинаций потенциалов (22), (23) по аналогии с (17)-(19) составляется решение неклассического уравнения теории упругости. Это уравнение описывает когезионное поле в градиентной модели теории упругости (см. [25]). Алгоритм построения решения обобщенной задачи Эшелби аналогичен предыдущему случаю.

Уравнения фильтрации задействуют представления (8), (9), которые описывают законы фильтрационного течения Дарси, Стокса и Бринкмана. Эти представления аналогичны представлениям (6), (8), и описывают, в частности, модель фильтрационного течения в пористой "полупроницаемой" среде [14], когда вокруг каждой частицы G_i (или в каждом канале) имеется межфазный слой G_L , подчиняющийся закону фильтрации Дарси, а в области G_M происходит свободное течение по закону Стокса или Бринкмана.

Между областью G_L и областью свободного течения G_M устанавливаются контактные условия Биверса-Джозефа (условия скользящего контакта)

$$[V_n] = 0, \quad [p_n(\mathbf{V})] = 0, \quad p_s(\mathbf{V}^{(M)}) + \frac{c \eta}{\sqrt{k}} (\mathbf{V}_s^{(M)} - \mathbf{V}_s^{(L)}) = 0, \quad P \in \partial G_M, \quad (25)$$

где k – коэффициент проницаемости пористой среды, η – динамическая вязкость фильтрующейся жидкости. Условия контакта (25) в предельном случае непроницаемого межфазного слоя ($k=0$ в G_L) вырождаются в условия прилипания $\mathbf{V} = 0$.

Решение уравнений Стокса в "полупроницаемой" среде $G_L \cup G_M$ определяется потенциалами ϕ_0 и f_0 из (8), построенными на основе (15), (16)

$$\phi_0(P) = (A_1 + B_1 \chi_{n-1}) \operatorname{div}(\hat{\chi}_n f_n^{(M)}) + (C_1 + D_1 \chi_{n-1}) \operatorname{div}(\hat{\chi}_n \hat{f}_n^{(M)}), \quad P \in G_L, \quad (26)$$

$$f_0(P) = f_n^{(M)} + \hat{\chi}_n (A_2 f_n^{(M)} + B_2 \hat{f}_n^{(M)}) + C_2 \nabla \operatorname{div}(\hat{\chi}_n \hat{f}_n^{(M)}), \quad (27)$$

$$\phi_0(P) = D_2 \operatorname{div}(\hat{\chi}_n f_n^{(M)}) + E_2 \operatorname{div}(\hat{\chi}_n \hat{f}_n^{(M)}), \quad P \in G_M. \quad (28)$$

Коэффициенты $A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2, E_2$ и функция $\hat{f}_n^{(M)}$ определяются из контактных условий (25) при заданном гармоническом полиноме $f_n^{(M)}$, определяющем полиномиальную асимптотику решения на бесконечности.

В предельном случае $V = 0$ на ∂G_M соотношения (26)-(28) существенно упрощаются: $C_2 = -B_2 r_1^2 / [(2n+3)(n+4)]$, $A_1 = B_1 = C_1 = D_1 = 0$, $A_2 = D_2 = E_2 = 0$.

Уравнение Бринкмана в области G_M с условием прилипания $V = 0$ на ∂G_M , связано с представлением (6) и определяется следующим видом потенциалов f^* и f , построенных с помощью (15), (16), (22) при $\kappa = \sqrt{C/\eta}$ на основе гармонического полинома $f_n^{(M)}$

$$f^*(P) = (1 + A_2 \hat{\chi}_n) f_n^{(M)}, \quad f(P) = (B_2 h_n + C_2 \hat{h}_n) f_n^{(M)}, \quad \kappa = \sqrt{C/\eta}. \quad (29)$$

Для коэффициентов A_2 , B_2 , C_2 условие $V = 0$ на ∂G_M эквивалентно следующей системе уравнений при $r = r_1$

$$A_2 \chi_n + 1 = 0, \quad B_2 h_n + C_2 \hat{h}_n = 0, \quad A_2 \chi_n (2n+1) r_1^{-2} + B_2 h_{n+1} + C_2 \hat{h}_{n+1} = 0. \quad (30)$$

Соответствующее решение уравнения Бринкмана определяется одной гармонической функцией порядка n , задающей асимптотику на бесконечности.

Таким образом, для неоднородных сред с многослойными сферическими включениями построены с помощью базисных потенциалов (10), (15), (16), (23) аппроксимирующие системы функций для уравнений классической и градиентной теории упругости, фильтрации, теплопроводности при различных условиях контакта на межфазных границах.

3. АППРОКСИМИРУЮЩИЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Для цилиндрических включений метод радиальных множителей формулируется таким же образом, как и в предыдущем пункте, с учетом другого вида радиальных функций, соответствующих плоскому уравнению Лапласа или Гельмгольца.

Для стационарного уравнения теплопроводности с каждым слоем цилиндрической формы (а также с включением и матрицей) связывается набор базисных потенциалов, имеющих такой же вид (10), но построенных с помощью гармонического полинома на плоскости $f_n^{(0)}(x_1, x_2)$ и другой сингулярной функции $\hat{\chi}_n(r) = r^{-2n}$, $n \neq 0$, $\hat{\chi}_0(r) = \ln(r)$, $n = 0$, зависящей от цилиндрической радиальной координаты $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Заметим, что эти потенциалы являются гармоническими и могут служить базисом для построения решений, отвечающих необходимым условиям контакта на межфазных границах; степени свободы в полиномах $f_n^{(0)}(x_1, x_2)$ задаются подсистемой $\Phi_m^m(P)$ из (14).

Форма представления решения в составной цилиндрической области $G_I \cup G_j \cup G_M$ имеет тот же вид (11)-(13). Система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов A_0 , B_{N+1} , A_j , B_j , $j = 1 \div N$, отвечающая идеальным контактными условиям на межфазных границах имеет несколько иной вид

$$\begin{aligned} A_0 &= A_1 + B_1 \hat{\chi}_n(r_0), & A_N + B_N \hat{\chi}_n(r_N) &= 1 + B_{N+1} \hat{\chi}_n(r_N) \\ A_j + B_j \hat{\chi}_n(r_j) &= A_{j+1} + B_{j+1} \hat{\chi}_n(r_j), & j &= 1 \div (N-1); \\ \lambda_I A_0 &= \lambda_L (A_1 - B_1 \hat{\chi}_n(r_0)), & \lambda_N (A_N - B_N \hat{\chi}_n(r_N)) &= \lambda_M (1 - B_{N+1} \hat{\chi}_n(r_N)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda_j (A_j - B_j \hat{\chi}_n(r_j)) &= \lambda_{j+1} (A_{j+1} - B_{j+1} \hat{\chi}_n(r_j)), \quad j = 1 \div (N-1), \quad n \neq 0; \\ \lambda_L A_0 &= \lambda_L (A_1 - B_1), \quad \lambda_N (A_N - B_N) = \lambda_M (1 - B_{N+1}), \\ \lambda_j (A_j - B_j) &= \lambda_{j+1} (A_{j+1} - B_{j+1}), \quad j = 1 \div (N-1), \quad n = 0.\end{aligned}$$

Для уравнения Ляме (1) при $C = 0$ базисные потенциалы (15), (16) на основе представления Папковича-Нейбера (7) в случае включений цилиндрической формы определяются плоским векторным гармоническим полиномом $f_n^{(0)}$ и радиальными функциями: сингулярной $\hat{\chi}_n(r) = r^{-2n}$, $n \neq 0$, $\hat{\chi}_0(r) = \ln(r)$, $n = 0$, и регулярной $\chi_n(r) = r^{2n+4}$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Форма представления потенциалов, представляющих решение классического уравнения Ляме в областях G_I , G_j и G_M на основе представления (7) имеет тот же вид (17)-(19) на основе базисных гармонических потенциалов (15), (16).

Аналогично для неклассического уравнения теории упругости (1) при $C \neq 0$, соответствующего представлению (3), (4), система базисных потенциалов уравнения Гельмгольца имеет вид (22) с радиальными функциями $h_n(r)$ и $\hat{h}_n(r)$, которые определяются путем дифференцирования фундаментального решения уравнения Гельмгольца в 2D

$$h_n(r) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^n I_0(\kappa r), \quad \hat{h}_n = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^n K_0(\kappa r), \quad \kappa = \sqrt{C/\mu}; \quad (31)$$

Здесь $I_0(z)$ – модифицированная функция Бесселя первого рода нулевого порядка, $K_0(z)$ – функция Макдональда нулевого порядка [27]. Аналогично определяются $h_n^*(r)$ и $\hat{h}_n^*(r)$ с заменой κ на κ^* , где $\kappa^* = \sqrt{C/(2\mu + \lambda)}$.

В остальном алгоритм построения решения уравнений теории упругости (17)-(19) и фильтрации (26)-(29) с контактными условиями на межфазной границе, имеющей форму цилиндрической поверхности, полностью аналогичен предыдущему случаю многослойных сферических включений.

4. АППРОКСИМИРУЮЩИЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ ДЛЯ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

Метод радиальных множителей может быть применен также к включениям сфероидальной формы. Для этого вводится понятие сфероидального радиуса α (в сфероидальной системе координат), и в качестве радиального множителя $\chi(\alpha)$ рассматривается функция этого радиуса.

Сфероидальная система координат определяется тройкой (α, β, φ) , $0 \leq \alpha < \infty$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, связанной с декартовой тройкой координат (x, y, z) уравнениями (система координат вытянутого сфероида)

$$x = \text{sh } \alpha \sin \beta \cos \varphi, \quad y = \text{sh } \alpha \sin \beta \sin \varphi, \quad z = \text{ch } \alpha \cos \beta; \quad (32)$$

или (система координат сплюснутого сфероида)

$$x = \text{ch } \alpha \sin \beta \cos \varphi, \quad y = \text{ch } \alpha \sin \beta \sin \varphi, \quad z = \text{sh } \alpha \cos \beta. \quad (33)$$

Для состоятельности метода радиальных множителей необходимо обеспечить существование гармонического полинома (не обязательно

однородного) $\Phi(P)$, который представляется в разделенном виде $\Phi(P) = R(\alpha)\phi(\beta, \varphi)$ в сфероидальной системе координат. Для систем (32), (33) такой полином существует, и может быть построен рекуррентным образом по формуле, аналогичной формуле (14)

$$\Phi_n^m(P) = \frac{(2n-1)^2 z \Phi_{n-1}^m \pm (n-m-1)^2 \Phi_{n-2}^m - (2n-1)(n-m-1)\Phi_{n-1}^{(1)m}}{(n+m)^2}, \quad \Phi_m^m = w^m, \quad (34)$$

$$\Phi_n^{(1)m}(P) = \frac{2n-1}{n+m} (x^2 + y^2 + z^2 \pm 1) \Phi_{n-1}^m \mp \frac{n-m-1}{n+m} \Phi_{n-1}^{(2)m}, \quad (35)$$

$$\Phi_n^{(2)m}(P) = \frac{2n-1}{n+m} (2z) \Phi_{n-1}^m - \frac{n-m-1}{n+m} \Phi_{n-1}^{(1)m}, \quad \Phi_m^{(1)m} = \Phi_m^{(2)m} = 0. \quad (36)$$

Знак «+» относится к системе координат вытянутого сфероида, знак «-» относится к системе координат сплюснутого сфероида.

В разделенном виде в сфероидальной системе координат система гармонических полиномов (34)-(36) записывается следующим образом (верхняя строка относится к системе координат вытянутого сфероида, нижняя – сплюснутого)

$$\Phi_n^m(P) = \left\{ \begin{array}{l} (-i)^m P_n^m(\operatorname{ch} \alpha) \\ (-i)^{n-m} P_n^m(i \operatorname{sh} \alpha) \end{array} \right\} P_n^m(\cos \beta) e^{im\varphi}, \quad (37)$$

где $P_n^m(\zeta)$ представляет собой систему функций Лежандра первого рода (см. [27]), определяемую из рекуррентных соотношений

$$P_n^m(\zeta) = \frac{(2n-1)\zeta P_{n-1}^m - (n-m-1)P_{n-2}^m}{n+m}, \quad P_m^m(\zeta) = (1-\zeta^2)^{\frac{m}{2}}. \quad (38)$$

Дифференциальное уравнение для радиальных множителей $\chi_n^m(\alpha)$, определяющих сингулярную аппроксимирующую систему функций $\hat{\Phi}_n^m(P) = \chi_n^m(\alpha)\Phi_n^m(P)$ так, чтобы она удовлетворяла оператору Лапласа, выводится с помощью представления (37) и имеет вид

$$\left(\chi_n^m(\alpha)\right)' = \left[\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{sh} \alpha \\ \operatorname{ch} \alpha \end{array} \right\} \left(P_n^m(\alpha)\right)^2 \right]^{-1}, \quad P_n^m(\alpha) = \left\{ \begin{array}{l} (-i)^m P_n^m(\operatorname{ch} \alpha) \\ (-i)^{n-m} P_n^m(i \operatorname{sh} \alpha) \end{array} \right\}. \quad (39)$$

Решение дифференциального уравнения (39) выражается в координатах $\zeta = \operatorname{ch} \alpha$ (для вытянутых сфероидов) или $\zeta = i \operatorname{sh} \alpha$ (для сплюснутых сфероидов) через функции Лежандра (38) и дополнительный полином $h_n^m(\zeta)$ степени $n+m-1$

$$\chi_n^m(\zeta) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right) + \frac{h_n^m(\zeta)}{(1-\zeta)^{m/2} P_n^m(\zeta)},$$

$$P_n^m(\alpha) = \left\{ \begin{array}{l} (-i)^m P_n^m(\operatorname{ch} \alpha) \\ (-i)^{n-m} P_n^m(i \operatorname{sh} \alpha) \end{array} \right\}. \quad (40)$$

Для полиномов $h_n^m(\zeta)$ получены удобные для численной реализации рекуррентные формулы их вычисления

$$h_n^m(\zeta) = \frac{(2n-1)\zeta h_{n-1}^m(\zeta) - (n-m-1)h_{n-2}^m(\zeta)}{n+m}, \quad n > m+1, \quad (41)$$

$$h_m^m(\zeta) = (1-\zeta^2) h_m^{m-1}(\zeta) + 2(m-1)\zeta h_m^m(\zeta) + \zeta(1-\zeta^2)^{m-1}, \quad (42)$$

$$h_{m+1}^m(\zeta) = -\frac{(1-\zeta^2)h_m^m(\zeta) - \zeta h_m^m(\zeta) + (1-\zeta^2)^m}{2m+1}, \quad h_0^0(\zeta) = 0. \quad (43)$$

Алгоритм построения решений уравнений теплопроводности, теории упругости и фильтрации с контактными условиями на межфазной границе, имеющей форму сфероидальной поверхности, аналогичен предыдущим пунктам и основан на использовании двух систем функций $\{\Phi_n^m, \hat{\Phi}_n^m\}$.

5. БЛОЧНЫЙ МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Построенные в предыдущих пунктах базисные системы функций используется в блочном методе наименьших квадратов [12,16-19] для аппроксимации решения задач на ячейке периодичности с многослойным включением сферической, цилиндрической или сфероидальной формы. Для этого область решения разбивается на множество блоков в соответствии с фазами материала G_I, G_j, G_M (рис.2) или в соответствии с принципом: каждое включение помещается в отдельный блок; в результате рассматривается блочная структура подобластей, пересекающихся только по своей границе: $\bar{G} = \cup \bar{G}_k, G_k \cap G_l = \emptyset, k \neq l$.

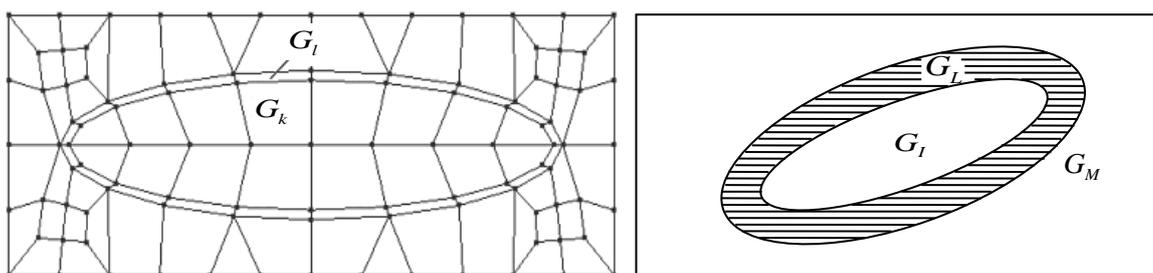


Рис.2. Разбиение исходной ячейки с включением на систему подобластей-блоков.

Аппроксимация условий периодического скачка для $u(P), V(P)$ или $\Phi(P)$, а также сшивка перемещений, поверхностных сил, скоростей, давлений, температур и теплотоков на границе между блоками осуществляется с помощью функционала F_k метода наименьших квадратов (см. [12-19]), что приводит к блочной системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов X_k в разложениях по базисной системе функций

$$F(u - u_0) \rightarrow \min, \quad F(u) = \max_k F_k, \quad (44)$$

$$T_k X_k + \sum_l T_{kl} X_l = H_k, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (45)$$

При этом рассматривается два типа функционалов, которые приводят к симметричной и несимметричной системе уравнений (см. [16-19]).

Блочная система линейных алгебраических уравнений (45) для неизвестных коэффициентов в блоках X_k имеет разреженную структуру и плотно заполненные матрицы-блоки T_k и T_{kl} . Здесь T_k – матрица Грама аппроксимирующей системы функций, T_{kl} – матрицы, составленные из скалярных произведений аппроксимирующих функций смежных блоков, H_k – вектор,

соответствующий граничным условиям в блоке (сшивка функций или условия периодического скачка в методе асимптотического усреднения).

Основная трудность в этом методе заключается в необходимости решения системы линейных алгебраических уравнений, структура которой соответствует структуре блочного разбиения исходной области [18,19]. Но поскольку система линейных уравнений имеет блочно-разреженную структуру, то естественным образом возникает два уровня вычислений: интенсивные вычисления с плотными подматрицами-блоками на уровне общей памяти и относительно независимые вычисления между блоками на уровне распределенной памяти. Такая организация вычислений позволяет эффективно использовать неоднородную структуру памяти в современных кластерных системах. Интенсивные вычисления с плотными подматрицами распараллеливаются на основе потоков вычислений с использованием общей памяти, а относительно независимые вычисления с блочно-разреженной структурой распараллеливаются с помощью MPI (см. [19]).

6. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

6.1. Механические характеристики мерзлого грунта.

Рассматривается периодическая среда, образованная из ледяной матрицы с характеристиками $E_M = 6 \text{ GPa}$, $\nu_M = 0.3$ (модуль Юнга, коэффициент Пуассона), наполненная минеральными частицами сферической формы с характеристиками $E_L = 50 \text{ GPa}$, $\nu_L = 0.1$, A – расстояние между центрами. Около каждой частицы образован слой талой воды некоторой ширины l , предполагается, что он характеризуется объемным модулем $K_L = 1000 \text{ GPa}$ и коэффициентом Пуассона $\nu_L = 0.49999$, что соответствует модулю сдвига $\mu_L = 0.02 \text{ GPa}$. Эффективные характеристики такой среды рассчитываются методом асимптотического усреднения на основе точного решения задачи на ячейке периодичности с учетом контактных условий на межфазном слое. На рис.3 представлена зависимость эффективного модуля Юнга E_H от объемной концентрации включений c_0 при разной ширине межфазного слоя $l/A = 0.1$ и $l/A = 0.02$.

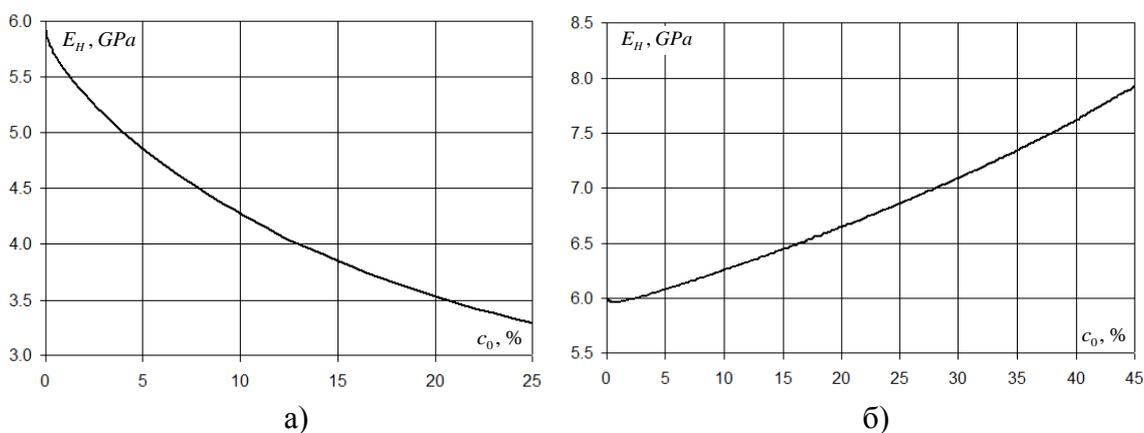


Рис.3. Эффективный модуль Юнга мерзлого грунта: а) $l/A = 0.1$; б) $l/A = 0.02$.

В зависимости от ширины слоя талой воды диаграмма зависимости качественно изменяется: при относительно большом слое талой воды модуль

Юнга падает с ростом концентрации минеральных частиц (рис.3а), а при относительно малом – растет (рис.3б).

На рис.4 приведено распределение напряжений σ_z в среднем сечении $\{y = 0\}$ в ячейке с включением при одноосном растяжении с единичной средней деформацией $\langle \varepsilon_z \rangle = 1$ при $r/A = 0.3$ и $r/A = 0.38$ (r – радиус частиц).

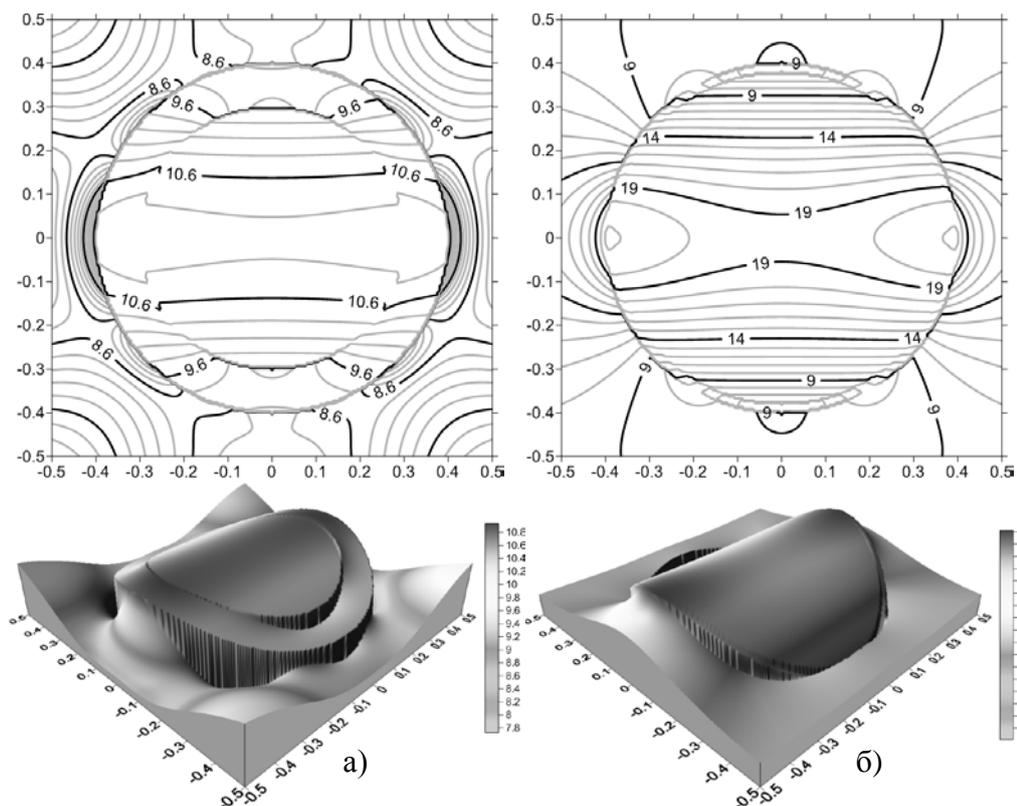


Рис.4. Напряжения σ_z в ячейке с включением: а) $l/A = 0.1$; б) $l/A = 0.02$.

На рис.5 приведено распределение компоненты перемещений u_z при той же деформации.

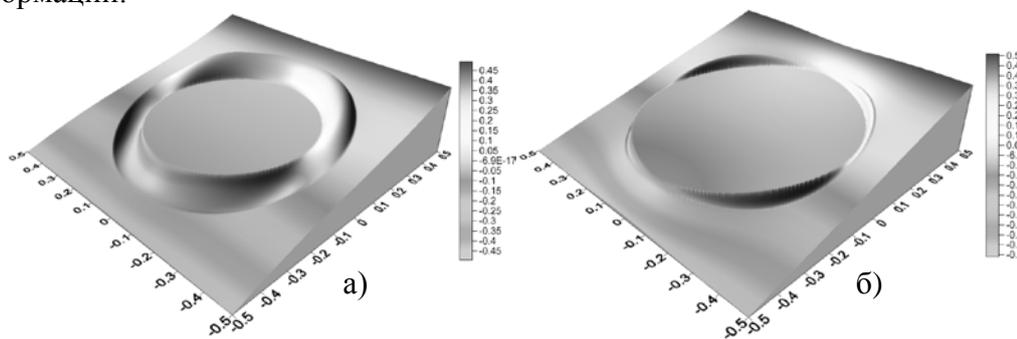


Рис.5. Перемещения u_z в ячейке с включением: а) $l/A = 0.1$; б) $l/A = 0.02$.

6.2. Моделирование масштабного эффекта усиления в нанокompозитах.

Используя решения, построенные с помощью систем функций для уединенного включения с точным учетом контактных условий на границе межфазного слоя, можем эффективно определить зависимости характеристик

композиционных материалов от параметров межфазного слоя. Следует отметить, что современные композиты обладают необычными свойствами аномального усиления прочностных характеристик при использовании наполнителей наномасштабного размера. Эти эффекты объясняются [29], помимо прочего, способностью нановключений модифицировать свойства матрицы с образованием дополнительного межфазного слоя около частиц, имеющего при гомогенном распределении частиц в композите значительное влияние на эффективные характеристики материала в целом. Однако гомогенное состояние трудно обеспечить технологически, и неизбежная агрегация частиц в более крупные агломераты (с ростом объемной концентрации) уменьшает усиливающий эффект.

В качестве примера, моделирующего масштабный эффект усиления при сверхмалых объемных долях нановключений, на рис.6 представлен результат вычисления эффективного модуля Юнга E_H для дисперсного композита при постоянной ширине межфазного слоя $l_1 = 0.2 \mu m$ и при условии изменения радиуса частиц в зависимости от объемной концентрации c_0 , что моделирует процесс их агломерации. Параметры матрицы, включений и межфазного слоя: $E_M = 18 GPa$, $\nu_M = 0.33$, $E_I = 380 GPa$, $\nu_I = 0.2$, $E_L = 57.5 GPa$, $\nu_L = 0.3$. На рис.6а представлена зависимость эффективного модуля Юнга и приведенного радиуса агрегированных частиц от концентрации. На рис. 6б представлено распределение растягивающих напряжений при единичной деформации в ячейке периодичности при максимальном значении эффективного модуля, достигаемого при $c_0 = 0.272\%$. В рассматриваемой модели наблюдается ярко выраженный масштабный эффект усиления модуля Юнга при малой концентрации включений.

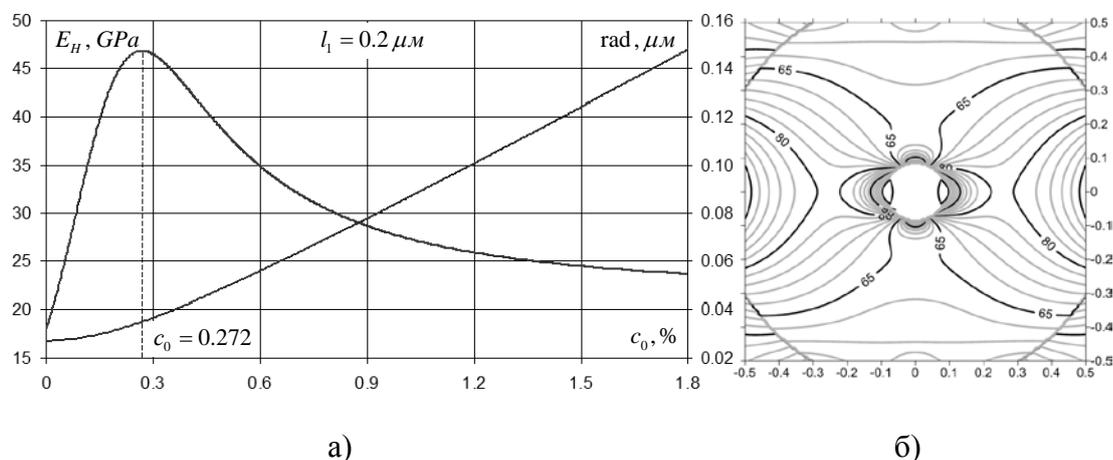


Рис.6. Масштабный эффект усиления модуля Юнга в модели структурно-неоднородного материала с межфазным слоем.

6.3. Сравнение метода асимптотического усреднения и самосогласованного метода трех сферических тел.

Метод Эшелби-Кристенсена [4,5] оценки эффективных характеристик неоднородных материалов (самосогласованный метод трех сферических тел) основан на точном аналитическом решении вспомогательной задачи для уединенного включения с дополнительным межфазным слоем в однородной матрице. Построенные в данной работе системы функций содержат это решение в качестве подсистемы первого порядка. Для материалов с малой объемной долей

включений решение задачи на ячейке периодичности в методе асимптотического усреднения определяется (в первом приближении) этой же подсистемой функций первого порядка. При вычислении модуля сдвига μ_H в методе Эшелби-Кристенсена принцип согласования энергии формулируется для деформации чистого сдвига, определяемого тензором $\varepsilon_{11} = -\varepsilon_{22} = 1$. Однако, некоторая неопределенность метода связана с тем, что сдвиговые характеристики можно было бы определять и при любой другой девиаторной деформации, например, при деформации простого сдвига $\varepsilon_{12} = 1$.

В связи с этим представляет интерес сопоставить результаты расчетов эффективного модуля разными методами: трех сферических тел и асимптотическим методом, имеющим строгое математическое обоснование и оценку [1]. Неоднозначность последнего в определении модуля сдвига связана с тем, что он, в отличие от метода Эшелби-Кристенсена, определяет усредненный материал как ортотропный с тремя независимыми компонентами тензора жесткости c_{1111} , c_{1122} и $c_{1212} = \mu_H$. На рис.7 представлены результаты расчета эффективного модуля сдвига для мерзлого грунта (смеси льда и песка) с характеристиками $E_M = 6 \text{ GPa}$, $\nu_M = 0.3$, $E_I = 50 \text{ GPa}$, $\nu_I = 0.1$ четырьмя способами: на основе чистого и простого сдвига в методе трех сферических тел, а также исходя из гипотезы изотропного материала на основе компонент тензора жесткости c_{1111} , c_{1122} , и для ортотропного материала $c_{1212} = \mu_H$ в методе асимптотического усреднения. Результаты расчетов показывают некорректность в определении μ_H на основе простого сдвига, а также сильное расхождение при больших концентрациях включений; при малых значениях $c_0 \leq 10\%$ погрешность усреднения представленными методами не превышает 3%.

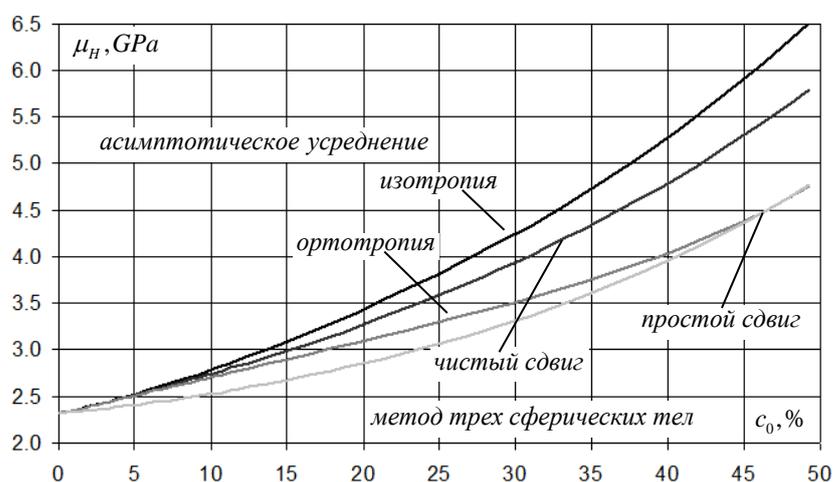


Рис.7. Эффективный модуль сдвига в методе асимптотического усреднения и трех сферических тел.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработан математический аппарат, позволяющий в достаточно простой форме представить точное аналитическое решение обобщенной задачи Эшелби для многослойного включения цилиндрической, сферической или сфероидальной формы в бесконечной матрице, и тем самым построить полные системы функций

для аппроксимации решений в структурно-неоднородных областях с многослойными включениями. Построенные системы функций для уравнений теории упругости, фильтрации и теплопроводности применяются в рамках блочного аналитико-численного метода для оценки эффективных характеристик структурно-неоднородных материалов и для моделирования масштабных эффектов усиления в нанокompозитах с промежуточным межфазным слоем.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.* Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
2. *Победря Б.Е.* Механика композиционных материалов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
3. *Bensoussan A., Lions J.L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. – Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1978. – 700 p.
4. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. – М.: ИЛ, 1963. – 248 с.
5. *Кристенсен Р.* Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
6. *Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б., Знаменский В.В., Мнушкин М.Г.* Конечно-элементное моделирование задач геомеханики и геофизики // Вестник МГСУ. – 2012. – №2. – С.52-65.
7. *Власов А.Н., Мерзляков В.П.* Усреднение деформационных и прочностных свойств в механике скальных пород. – М.: Изд-во Ассоциации строительных вузов, 2009. – 208 с.
8. *Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б., Мнушкин М.Г.* Программный комплекс «UWay» / Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. – № 2011611833, 28 февраля 2011 г.
9. *Власов А.Н., Потапов В.Н., Яновский Ю.Г.* Объектно-ориентированное программирование метода конечных элементов для задач механики неоднородных сред. Часть 1. Идеология объектно-ориентированного подхода и его приложение к методу конечных элементов. // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1996. – Т.2. – №1. – С.94-109.
10. *Власов А.Н., Волков-Богородский Д.Б.* Параметрический метод асимптотического усреднения для нелинейных уравнений термоупругости // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.491-505.
11. *Волков-Богородский Д.Б.* О вычислении эффективных характеристик композиционных материалов с помощью блочного аналитико-численного метода / XII Международ. Симп. “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред”. Избранные доклады. – М.: МАИ, 2006. – С.41-47.
12. *Волков-Богородский Д.Б.* Применение аналитических расчетов на основе метода блоков в связанных задачах механики сплошных сред / Всеросс. научно-практич. Конф. “Инженерные системы - 2008”. Сборник трудов. – М.: Изд-во РУДН, 2008. – С.123-138.
13. *Волков-Богородский Д.Б.* Аналитико-численный метод оценки эффективных характеристик структурно-неоднородных материалов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского. – 2011. – №4. – Ч.2. – С.407-409.

14. Волков-Богородский Д.Б., Власов А.Н. Асимптотическое усреднение уравнений фильтрации Бринкмана в многофазных средах с периодической структурой // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №1. – С.92-110.
15. Волков-Богородский Д.Б., Власов А.Н. Моделирование уравнений конвективного переноса тепла в структурно-неоднородных средах методом двухмасштабного усреднения / IV-й Всеросс. симп. «Механика композиционных материалов и конструкций». Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2012. – Т. II. – С.186-203.
16. Волков-Богородский Д.Б. Разработка блочного аналитико-численного метода решения задач механики и акустики / Школа-семинар “Композиционные материалы”. Сборник трудов. – М.: ИПРИМ РАН, 2000. – С.44-56.
17. Волков-Богородский Д.Б. Применение блочного аналитико-численного метода мультиполей к задачам акустики // Вестник МАИ. – 2005. – Т.12. – №3. – С.51-60.
18. Волков-Богородский Д.Б., Харченко С.А. Параллельная версия аналитико-численного метода блоков для связанных задач волновой виброакустики // Вестник Нижегородского ун-та им. Н.И.Лобачевского. – 2009. – №5. – С.202-209.
19. Волков-Богородский Д.Б., Сушко Г.Б., Харченко С.А. Комбинированная MPI+threads параллельная реализация метода блоков для моделирования тепловых процессов в структурно-неоднородных средах // Вычислительные методы и программирование. – 2010. – Т.11. – С.127-136.
20. Папкович П.Ф. Теория упругости. – Ленинград: Оборонгиз, 1939. – 640 с.
21. Новацкий В. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 872 с.
22. Brinkman H.C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles // Appl. Scient. Res. A. – 1947. – Vol.1. – P.27-34.
23. Гольдштейн Р.В., Гордеев Ю.Н., Чижов Ю.Л. Задача Кармана для вращающегося проницаемого диска // Известия РАН. МЖГ. – 2012. – №1. – С.59-67.
24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.6. Гидродинамика. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
25. Lurie S., Belov P., Volkov-Bogorodsky D., Tuchkova N. Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials // J. Mat. Sci. – 2006. – Vol.41. – N20. – P.6693-6707.
26. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735 с.
27. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твёрдых тел. – М.: Наука, 1964. – 488 с.
28. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т.1. – М.: Наука, 1973. – 296с.; Т.2. – М.: Наука, 1974. – 296 с.
29. Lurie S., Volkov-Bogorodskiy D., Solyaev Yu., Rizahanov R., Agureev L. Multiscale modelling of aluminium-based metal–matrix composites with oxide nano-inclusions // Comp. Mater. Sci. – 2016. DOI: 10.1016/j.commatsci.2015.12.034.

Поступила в редакцию 10 ноября 2015 года.

Сведения об авторе:

Волков-Богородский Дмитрий Борисович – к.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: v-b1957@yandex.ru