

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЛОЕНИЯ БИМАТЕРИАЛА ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ СДВИГЕ¹

Астапов Н.С., Кургузов В.Д., Корнев В.М.

*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

АННОТАЦИЯ

Рассматривается распространение трещины по линии раздела сред в составной кусочно-однородной квадратной пластине со структурой. Под действием касательного (сдвигового) напряжения, приложенного по краям пластины, реализуется вторая мода разрушения. Подробно анализируется случай, когда упругие характеристики материалов совпадают, а прочностные существенно различаются. Выполнено численное моделирование распространения зон пластичности в квадратных пластинах из биметалла при квазистатическом нагружении. В численной модели использована лагранжева формулировка уравнений механики деформируемого твердого тела, наиболее предпочтительная для моделирования деформирования тел из упругопластического материала при больших деформациях. Обнаружено, что результаты численных экспериментов хорошо согласуются с результатами расчетов по аналитической модели разрушения материалов со структурой при поперечном сдвиге.

Ключевые слова: критерии разрушения; коэффициент интенсивности напряжений; поперечный сдвиг; квазихрупкое, квазивязкое разрушение; компьютерное моделирование

MODELING OF BI-MATERIAL DELAMINATION UNDER TRANSVERSE SHEAR

Kurguzov V.D., Kornev V.M., Astapov N.S.

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk

ABSTRACT

A propagation of an interface crack in a piecewise-homogenous composite square plate is considered. Under the action of tangential (shear) stress, applied at the edges of the plate, the mode II fracture occurs. The case when elastic properties of materials coincide and strength properties are substantially different is analyzed in detail. The spreading of plastic zones in square plates made of bimetal is simulated numerically for quasi-static loading. In the numerical model, the Lagrangian formulation of the solid mechanics is used, as the most preferable formulation, concerning the modeling of finite strain elasto-plasticity of solids. It is found that the results of the numerical simulation are in a good agreement with the predictions by the analytical model for fracture under transverse shear in structured materials.

Keywords: fracture criteria; stress intensity factor; transverse shear; quasi-brittle; quasi-ductile fracture; computer modeling

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 14-08-00113, 16-08-00483).

ВВЕДЕНИЕ

В экспериментальной работе [1] по исследованию распространения трещины нормального отрыва в биматериале керамика-алюминий показано, что зона предразрушения для трещины на границе раздела сред, как правило, расположена только в одном более слабом материале ([1], Fig.5) и локализована в окрестности этой границы. В работе [2] обосновывается актуальность создания феноменологических моделей для прогнозирования разрушения слоистых материалов при отсутствии трещин. Там же отмечается, что “разрушение по границе соединения – один из наиболее типичных видов повреждения слоистых материалов при деформации”.

Ниже исследуется распространение трещины вдоль линии раздела структурированных сред. При описании разрушения структурированных материалов используется модифицированная модель зоны предразрушения Леонова-Панасюка-Дагдейла (ЛПД) с привлечением необходимого и достаточного критериев разрушения (подход Нейбера-Новожилова). Модификация была выполнена в работах [3,4]. Главное отличие модифицированной аналитической модели от классической модели ЛПД заключается в появлении дополнительного параметра – ширины зоны предразрушения, моделирующего поперечник зоны пластичности. Этот параметр позволяет более полно оценить разрушение структуры зоны предразрушения, привлекая информацию о параметрах стандартных $\sigma - \varepsilon$ или $\tau - \gamma$ (напряжение-деформация) диаграмм материалов.

В данной работе с помощью аналитической модели прогнозируются размеры зоны предразрушения в вершине трещины при поперечном сдвиге. Результаты прогнозирования сравниваются с результатами численного моделирования зоны пластичности. Предполагается, что трещина расположена на плоской границе раздела материалов и расслоение при поперечном сдвиге в биматериале происходит по этой границе раздела. Такое расслоение в результате лабораторного эксперимента наблюдалось в работе ([5], p.801, Fig.7). В результате численного моделирования методом конечных элементов в работе [6] также показано притягивание продвигающейся трещины к границе раздела сред (см. Fig.3, Fig.7). Кроме того, представленные ниже результаты численного моделирования распространения зон пластичности в квадратных пластинах из биметалла при поперечном сдвиге подтверждают локализацию зон пластичности вдоль границы раздела сред.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Наиболее часто встречающиеся трещиноподобные дефекты располагаются в композитах по границе раздела сред. Поэтому представляет интерес изучение напряженно деформированного состояния в задаче о распространении трещины, схематично изображенной на рис.1. Пусть в составной кусочно-однородной структурированной биметаллической квадратной пластине размером $L \times L$ на плоской границе раздела двух сред имеется центральная внутренняя трещина конечной длины $2l_0$. На краях пластины задано сдвиговое напряжение τ_∞ , то есть может реализоваться вторая мода разрушения. В обозначениях рис.1 для материалов 1 и 2, составляющих композит, предполагается, что модули сдвига

материалов равны G , коэффициенты Пуассона равны ν и характерные линейные размеры структуры материалов равны r .

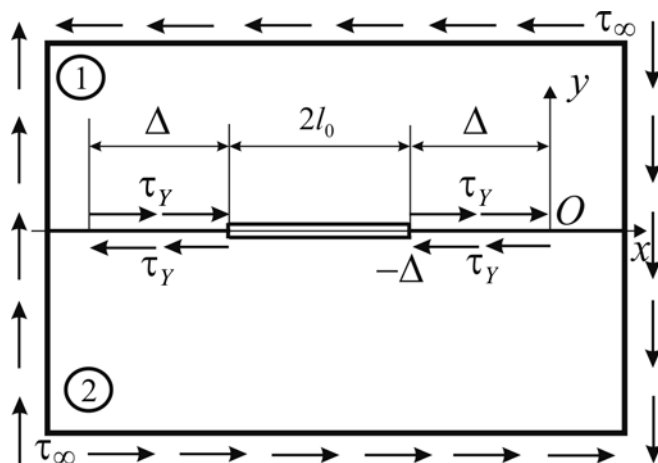


Рис.1. Трещина на границе раздела сред.

Пусть материалы 1 и 2 верхней и нижней половин квадратной пластины отличаются только разными пределами текучести при сдвиге $\tau_Y = \tau_{Y1} < \tau_{Y2}$. Построим модель для описания расслоения биматериала, предполагая, что трещина при продвижении не меняет свое первоначальное прямолинейное направление.

В предлагаемой модели распространения трещины использована простейшая аппроксимация классической τ - γ диаграммы более слабого материала 1, представленная на рис.3 в работе [7] двухзвенной ломаной. Существенными параметрами этой аппроксимации являются параметры γ_0 – максимальное упругое относительное смещение и γ_1 – максимальное относительное смещение. В дальнейшем для упрощения обозначений введем параметр $\bar{\gamma} = (\gamma_1 - \gamma_0) / \gamma_0$, который можно назвать показателем пластичности при сдвиге.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ

Данная работа является естественным продолжением работ [7-9]. В работе [8] численно (с помощью метода конечных элементов) и аналитически исследовалось распространение пластической зоны для трещины нормального отрыва, причем аналитическая модель не учитывала конечные размеры образцов. В работе [9] также для трещины нормального отрыва получены аналитические формулы для критической разрушающей нагрузки и длины зоны предразрушения, учитывающие конечные размеры образцов, и с помощью этих формул проведена обработка лабораторных экспериментов. Наконец, в работе [7] получены формулы для критической разрушающей нагрузки и длины зоны предразрушения для биматериала с трещиной при поперечном сдвиге. Причем в работе [7] впервые был явно введен поправочный коэффициент для ширины зоны предразрушения, так как границы реальных пластических зон в окрестности вершины трещины не похожи на конфигурации, получаемые в приближенной постановке в рамках линейной механики разрушения (ЛМР) [10]. Напомним постановку задачи и основные результаты. Рассмотрим квадратную

биметаллическую пластину размером $L \times L$ с центральной внутренней трещиной длиной $2l_0$, подвергнутую сдвиговыми напряжениями τ_∞ , заданными на кромках. Предположим, что плоская трещина поперечного сдвига распространяется прямолинейно по границе раздела сред. Кроме реальной внутренней прямолинейной трещины-разреза длиной $2l_0$ введем в рассмотрение модельную трещину-разрез длиной $2l = 2l_0 + 2\Delta$, где Δ – длина зон предразрушения, расположенных на продолжении реальной трещины (рис.1). На рис.2 изображена зона предразрушения на продолжении правого кончика реальной трещины (точка 2, обведенная кружком) в однородном материале. Начало O системы координат Oxy совпадает с концом модельной трещины, а конец реальной трещины имеет абсциссу $x = -\Delta$ (рис.2). Ось ординат Oy перпендикулярна плоскости распространения трещины.

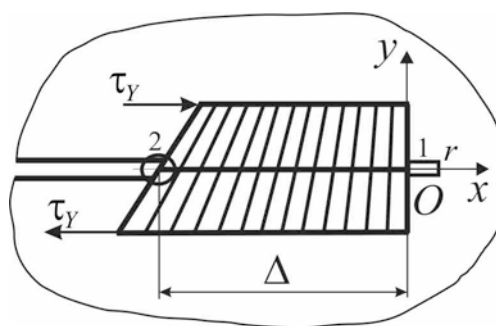


Рис.2. Зона предразрушения однородного материала.

Для построения модели расслоения при поперечном сдвиге предлагается использовать достаточный дискретно интегральный критерий [3,7,11]

$$\frac{1}{r} \int_0^r \tau(x,0) dx = \tau_y, \quad x \geq 0, \quad (1)$$

$$2u(-\Delta) = \gamma^*. \quad (2)$$

Здесь $\tau(x,0)$ – сдвиговое напряжение на продолжении трещины, τ_y – предел текучести при сдвиге, r – характерный линейный размер структуры материала, функция $u = u(x)$ – полусмещение берегов трещины. Через γ^* обозначено критическое смещение берегов модельной трещины для однородного материала; при этом смещении разрушается структура материала в вершине реальной трещины (граничной точке зоны предразрушения, то есть в точке 2, обозначенной на рис.2 кружком 2). Длина зоны предразрушения составляет только часть длины зоны пластичности, если учесть длину промежутка осреднения r так, как изображено на рис.2.

Для применения достаточного дискретно-интегрального критерия (1)-(2) к обработке результатов численных экспериментов с образцами конечных размеров используем аналитическое выражение сдвигового напряжения $\tau(x,0)$ на продолжении трещины в виде [9]

$$\tau(x,0) = K_{II} / \sqrt{2\pi x} + L\tau_\infty / (L - 2l), \quad x \geq 0, \quad (3)$$

В выражении (3) τ_∞ – напряжение, заданное на бесконечности; $K_{II} = K_{II\infty} + K_{II\Delta}$ – суммарный коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в обобщенной

модели ЛПД; $K_{II\infty}$ – КИН, порождаемый напряжением τ_∞ , $K_{II\infty} > 0$; $K_{II\Delta}$ – КИН, порождаемый напряжением τ_Y , действующим в окрестности носика модельной трещины в зоне предразрушения, $K_{II\Delta} < 0$. После интегрирования по промежутку, выделенному на рис.2 прямоугольником 1, уравнение (1) можно записать в виде

$$K_{II} = (\tau_Y - L\tau_\infty / (L - 2l)) \sqrt{\pi r / 2}. \quad (4)$$

Для полусмещения $u = u(x)$, $(-\Delta \leq x < 0)$ берегов модельной трещины используем в (2) представление [10]

$$u(x) = \frac{\kappa + 1}{2G} K_{II} \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} + O(|x|), \quad K_{II} = K_{II\infty} + K_{II\Delta} > 0, \quad x \leq 0, \quad (5)$$

в котором учтем лишь первый член разложения. В выражении (5) $\kappa = 3 - 4\nu$ для плоской деформации, $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ для плоского напряженного состояния, ν – коэффициент Пуассона; $G = \tau_Y / \gamma_0$ – модуль сдвига. Уравнение (2) с помощью представления (5) запишем в виде

$$\frac{\kappa + 1}{G} K_{II} \sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}} = \gamma^*. \quad (6)$$

Критическое смещение γ^* берегов модельной трещины вычислим по формуле

$$\gamma^* = (\gamma_1 - \gamma_0) m a_\tau, \quad (7)$$

где a_τ – поперечник зоны пластичности в вершине реальной трещины, вычисленный в рамках ЛМР на основании поля напряжений и критерия текучести Мизеса, m – поправочный коэффициент [7]. Так как предполагается, что в биматериале в условиях пластичности находится лишь один наиболее слабый материал, то в качестве поперечника зоны пластичности в биматериале приближенно выбирается полупоперечник зоны пластичности более слабого материала, то есть полагается $a_\tau = l Y^2 \lambda^2 (5 - 8\nu + 8\nu^2) / 24$ в условиях плоской деформации.

В равенствах (4) и (6) для КИН $K_{II\infty}$, обусловленного напряжением τ_∞ , будем использовать учитывающую конечные размеры образца аппроксимирующую формулу [12, с.74] для центральной трещины $K_{II\infty} = Y \tau_\infty \sqrt{\pi l}$, где $Y = \sqrt{1 / \cos(\pi l / L)}$. Для КИН $K_{II\Delta}$, порождаемого постоянным напряжением τ_Y , действующим согласно модели ЛПД, выберем из справочника [13, с.41] выражение

$$K_{II\Delta} = -\tau_Y \sqrt{\pi l} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{\Delta}{l} \right) \right]. \quad (8)$$

Теперь систему уравнений (4), (6), равносильную исходной системе уравнений (1), (2) при указанном выборе выражений для сдвигового напряжения $\tau(x, 0)$, полусмещения $u = u(x)$ и КИН, можно записать в виде

$$Y \sqrt{\pi l} \lambda - \sqrt{\pi l} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{\Delta}{l} \right) \right] - (1 - t \lambda) b = 0, \quad (9)$$

$$\left\{ Y\sqrt{\pi l}\lambda - \sqrt{\pi l} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{\Delta}{l} \right) \right] \right\} \sqrt{\Delta} - h\lambda^2 = 0, \quad (10)$$

где $\lambda = \tau_{\infty}/\tau_Y$ – безразмерная критическая разрушающая нагрузка, $t = L/(L-2l)$, $b = \sqrt{\pi r/2}$, $h = \sqrt{2\pi}\bar{\gamma}mY^2lc/96$ для биматериала. Величина $c = 5(1+\nu)$ для плоского напряженного состояния и $c = (5-8\nu+8\nu^2)/(1-\nu)$ для плоской деформации. Расчеты показывают, что для любого значения коэффициента Пуассона ν ($0 \leq \nu \leq 0,5$) выполняется неравенство $4,65 \leq c \leq 7,5$. Исключая выражение в фигурных скобках из системы уравнений (9), (10), находим точное выражение для критической длины зоны предразрушения

$$\sqrt{\Delta} = h\lambda^2 / (b(1-t\lambda)). \quad (11)$$

Используя приближение $\arcsin(1-\Delta/l) \approx \pi/2 - \sqrt{2\Delta/l}$, погрешность которого не превышает 6% при $0 \leq \Delta/l \leq 0,43$, запишем систему уравнений (9), (10) в приближенном виде

$$Y\sqrt{\pi l}\lambda - 2\sqrt{2\Delta/\pi} - (1-t\lambda)b \approx 0, \quad (12)$$

$$\left\{ Y\sqrt{\pi l}\lambda - 2\sqrt{2\Delta/\pi} \right\} \sqrt{\Delta} - h\lambda^2 \approx 0. \quad (13)$$

Подставляя в (12) для $\sqrt{\Delta}$ выражение (11) найдем приближенное выражение критической разрушающей нагрузки

$$\lambda_{+,-} \approx 2b / \left(2bt + f \pm \sqrt{f^2 + 4gh} \right), \quad (14)$$

где $f = Y\sqrt{\pi l}$, $g = -2\sqrt{2/\pi}$. Величина λ_+ , когда перед корнем выбирается знак “+”, соответствует квазихрупкому разрушению [7]. Формула (14) предлагаемой модели имеет смысл, если $\bar{\gamma} \leq 3\pi/(mc)$ для однородного материала. Учитывая диапазон изменения c для величины показателя пластичности материала $\bar{\gamma}$ при $m=1$, находим, что для любого ν при плоской деформации и плоском напряженном состоянии должно выполняться неравенство $\bar{\gamma} \leq 3\pi/4,65 \approx 2,03$. В частности, для однородного материала имеем неравенство $\bar{\gamma} \leq 3\pi/7,5 \approx 1,26$ при $\nu = 0,5$ для плоского напряженного состояния.

Из приближенного уравнения (12) получим приближенное выражение

$$\sqrt{\Delta} \approx (b - bt\lambda - f\lambda) / g, \quad (15)$$

а из уравнения (13) получим выражение

$$\sqrt{\Delta}_{+,-} \approx \lambda \left(-f \pm \sqrt{f^2 + 4gh} \right) / (2g), \quad (16)$$

причем квазихрупкому типу разрушения соответствует $\sqrt{\Delta}_+$, когда в равенстве (16) перед корнем выбирается знак “+”. Интересно отметить, что, выбирая любое из приближенных выражений (15) или (16), получим из системы уравнений (12), (13) точно такое же выражение для критической разрушающей нагрузки, какое дается формулой (14). А исключая выражение в фигурных скобках из приближенной системы уравнений (12), (13), получим для критической длины Δ зоны предразрушения такое же выражение (11), какое получено из точной системы уравнений (9), (10). Напомним, что уравнения (9), (12) так же, как исходное уравнение (1) выполняются для любых нагрузок λ вблизи

граничных точек зоны пластичности (см. прямоугольник 1 на рис.2). Поэтому для любых нагрузок λ справедлива и формула (15), которая является следствием равенства (12). Однако уравнения (10) и (13) так же, как уравнение (2), выполняются только для критических разрушающих нагрузок. Кроме того, приближенные выражения для полусмещения $u(-\Delta)$ и критического смещения γ^* (см. уравнения (6), (7)) вносят дополнительную погрешность в уравнения (10), (13), которые используются при выводе формул (11) и (16). Таким образом, получена формула (14) для критической разрушающей нагрузки, и три разные формулы (11), (15) и (16), выражающие критическую длину зоны предразрушения через критическую нагрузку. Результаты численного моделирования подтверждают применимость формулы (15) во всем диапазоне нагрузок.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Воспользуемся методом конечных элементов для численного моделирования реальной формы пластической зоны в окрестности вершины трещины, распространяющейся по границе раздела двух материалов. Рассмотрим биметаллическую квадратную пластину с центральной трещиной длиной $2l_0 = 10$ мм в условиях плоского деформированного состояния, подвергаемую поперечному сдвигу напряжениями τ_∞ , приложенными на кромке (рис.1). Геометрические размеры пластины: ширина $L = 100$ мм, высота $L = 100$ мм, толщина $T = 0,4$ мм. Характеристики материалов пластины: $E_1 = E_2 = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$, пределы текучести $\tau_{Y1} = 400 / \sqrt{3}$ МПа, $\tau_{Y2} = 800 / \sqrt{3}$ МПа.

При поперечном сдвиге пластины в окрестности вершины трещины возникают большие пластические деформации. Численное моделирование пластических зон, возникающих при растяжении пластины с центральной трещиной, подробно изложено в работе [8]. Отметим здесь лишь существенные отличия.

Расчетная область разбивается неравномерной сеткой из 500000 четырехугольных элементов. В окрестности вершины трещины производилось сгущение сетки до размера 0,025 мм. Внешняя нагрузка τ_∞ возрастала по линейному закону от нуля до τ_{Y1} за время $t = 1$. Под временем в квазистатических задачах понимается некоторый монотонно возрастающий параметр нагружения.

Результаты расчетов представлены на рис.3-5, где показано распределение эквивалентных пластических деформаций $\varepsilon^p = \sqrt{2\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p / 3}$ (ε_{ij}^p – компоненты тензора пластических деформаций). На рис.3 и рис.4 показаны пластические зоны перед вершиной трещины в моменты времени, соответствующие уровню нагружения $\lambda = \tau_\infty / \tau_{Y1} = 0,208$ и $\lambda = \tau_\infty / \tau_{Y1} = 0,338$. Для более детальной прорисовки распределения эквивалентных пластических деформаций контурные полосы на рис.3-5 ограничены диапазоном $10^{-4} \div 10^{-2}$. На рис.5 показана пластическая зона перед вершиной трещины в момент времени, соответствующий уровню нагружения $\lambda = \tau_\infty / \tau_{Y1} = 0,5$. Для этого уровня нагружения отчетливо видно, что зона интенсивных пластических деформаций величиной до 0,1 распространяется прямолинейно вдоль поверхности раздела материалов

и расположена, в основном, в материале 1 (более мягкий материал, $\tau_{Y1} = 400/\sqrt{3}$ МПа). Из рисунков видно, с увеличением нагрузки значительно возрастает длина пластической зоны, а ширина пластической зоны возрастает существенно медленнее.

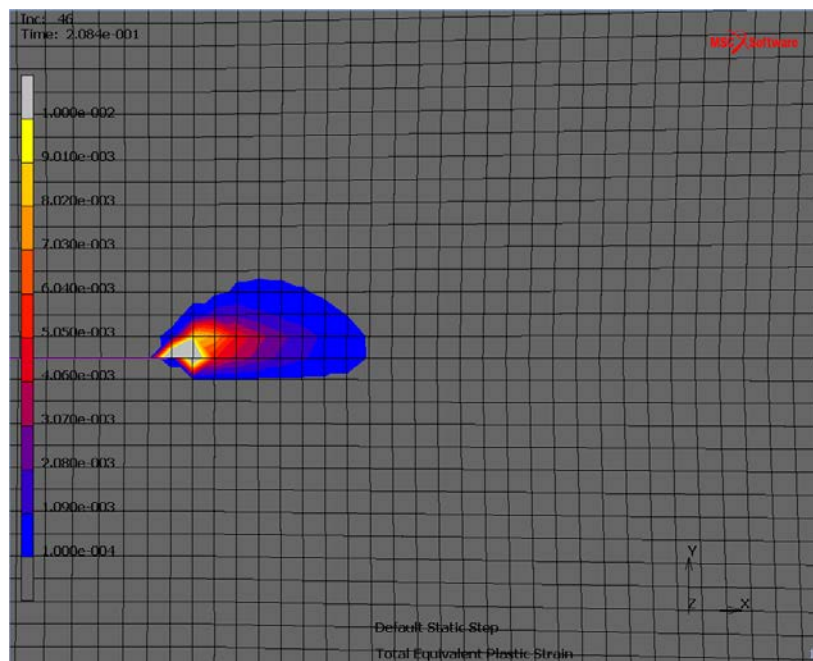


Рис.3. Пластическая зона перед вершиной трещины при нагрузке $\lambda = 0.208$.

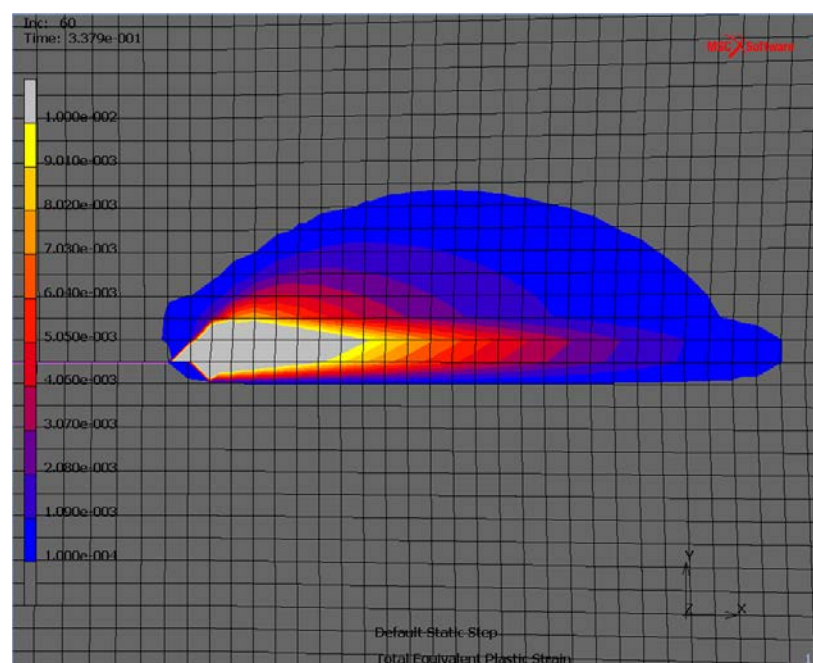


Рис.4. Пластическая зона перед вершиной трещины при нагрузке $\lambda = 0.338$.

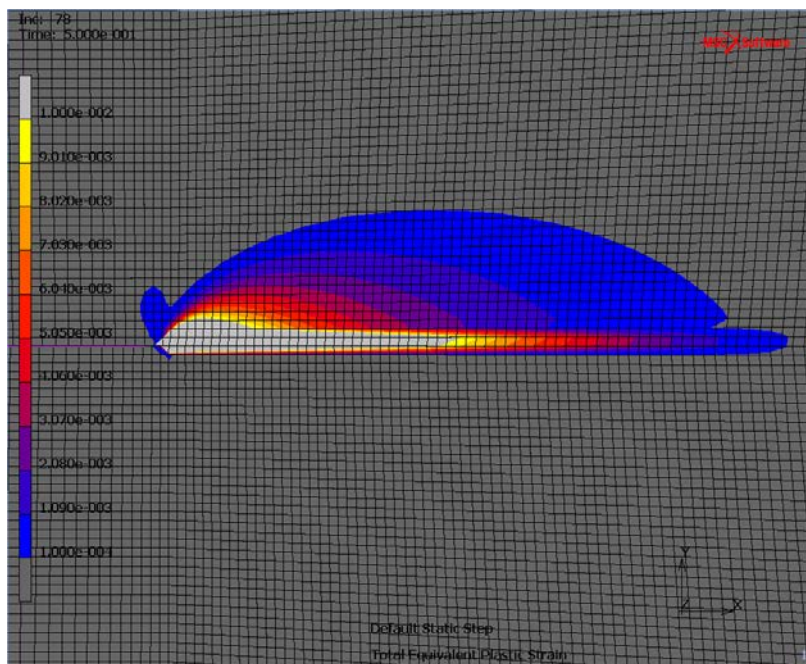


Рис.5. Пластическая зона перед вершиной трещины при нагрузке $\lambda = 0.5$.

В таблице 1 для различных значений нагрузки λ представлены значения смещений $2u_E$ узлов сетки в окрестности вершины трещины, а также поперечника a_E и длины Δ_E (мм) пластической зоны, полученные в результате численной обработки изолиний пластических зон. Во второй колонке таблицы дано смещение $2u_E$ узла сетки, расположенного на расстоянии поперечника a_E над вершиной трещины, относительно узла, соответствующего вершине трещины.

Таблица 1.

λ	$2u_E$, мм	a_E , мм	Δ_E , мм	γ_E^* , мм
0,098	0,000262	0,0675	0,023	0,000608
0,125	0,000285	0,0713	0,045	0,000641
0,153	0,000483	0,0725	0,089	0,000653
0,181	0,000677	0,0738	0,138	0,000664
0,208	0,00103	0,0863	0,201	0,000776
0,245	0,00122	0,0940	0,3	0,000846
0,292	0,00189	0,105	0,463	0,000945
0,338	0,00233	0,118	0,668	0,00106

По данной в таблице 1 величине a_E численного эксперимента вычислялась величина модельного смещения γ_E^* по формуле $\gamma_E^* = (\gamma_1 - \gamma_0) a_E = \bar{\gamma} \gamma_0 a_E$ при $\gamma_0 = 0,003$ для различных значений $\bar{\gamma}$. В пятой колонке таблицы 1 приведены значения γ_E^* , вычисленные при $\bar{\gamma} = 3$. На рис.6 для $\bar{\gamma} = 3$ представлена аппроксимирующая кривая $\gamma_E^* = (\gamma_1 - \gamma_0) a_E = 0,000555 + 0,00005\lambda + 0,00435\lambda^2$ (кривая 2), полученная методом наименьших квадратов по экспериментальным точкам пятой колонки таблицы 1, также отмеченным на рис.6. Для кривой, аппроксимирующей точки $2u_E$ второй колонки таблицы 1, получена формула

$2u_E = -0,0000913 + 0,00121\lambda + 0,018\lambda^2$ (кривая 1). Точка пересечения этих двух кривых имеет абсциссу $\lambda = 0,179$. Именно это значение λ считается значением критической разрушающей нагрузки при $\bar{\gamma} = 3$.

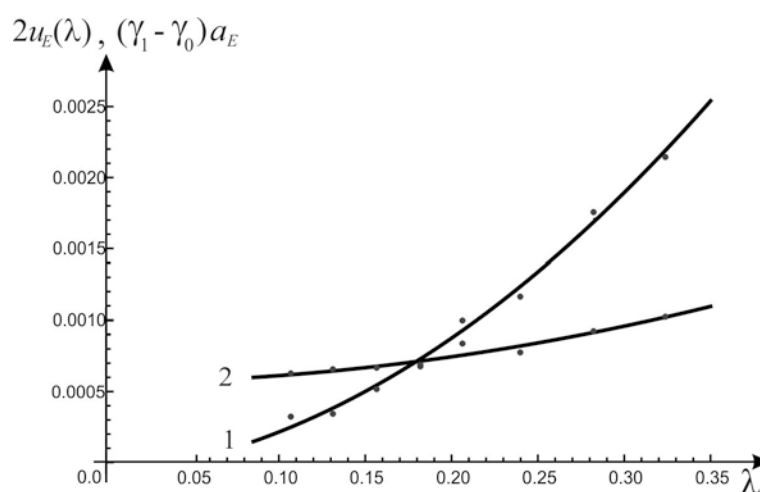


Рис.6. Критическая разрушающая нагрузка, как координата точки пересечения двух кривых, полученных в результате численного моделирования.

4. СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Заметим, что уравнения механики сплошной среды, используемые при численном моделировании методом конечных элементов, не содержат размер r элемента структуры материала. При дискретизации расчетной области вводится структурный параметр, совпадающий с характерным линейным размером конечного элемента. Если методом конечных элементов решаются уравнения механики деформируемого твердого тела для материалов со структурой, то размер конечного элемента не должен превышать характерного линейного размера элемента структуры материала. Кроме того, при численном моделировании остается неопределенным значение параметра γ_1 – максимальное относительное смещение. Наоборот, уравнения (9), (10) или приближенные уравнения (12), (13) аналитической модели содержат величины r и γ_1 , причем величина r входит только в уравнения (9) и (12), а величина γ_1 входит только в уравнения (10) и (13). Поэтому предлагается следующий алгоритм сравнения численных результатов, полученных в предыдущем пункте, и результатов, которые можно получить с помощью аналитической модели (9), (10).

1. Задаем значение показателя пластичности $\bar{\gamma} = (\gamma_1 - \gamma_0)/\gamma_0$, например: $\bar{\gamma} = 1, 3, 7$.

2. С помощью результатов численного моделирования с привлечением достаточного критерия аналитической модели вычисляем для заданного $\bar{\gamma}$ критическую нагрузку λ , как показано на рис.6 в предыдущем пункте.

3. По этому значению λ с помощью интерполяции данных в четвертой колонке табл.1 вычисляем значение экспериментальной критической длины Δ_E зоны пластичности.

4. Используя полученные значения λ и Δ_E , находим из уравнения (9) аналитической модели значение r характерного линейного размера элемента структуры материала.

5. Из уравнения (10) аналитической модели находим величину поправочного коэффициента m для поперечника зоны предразрушения.

6. По найденным значениям r и m вычисляем для различных нагрузок λ значения Δ по формулам (11), (15) и (16) аналитической модели и сравниваем эти значения с Δ_E численного эксперимента.

7. Переходим к пункту 1 алгоритма, то есть повторяем всю процедуру для другого значения $\bar{\gamma}$.

Для $\bar{\gamma} = 1$ последовательно получим $\lambda = 0,0983$; $\Delta_E = 0,024$; $r = 0,0168$; $m = 3,76$. Для $\bar{\gamma} = 3$ получим $\lambda = 0,179$; $\Delta_E = 0,132$; $r = 0,0175$; $m = 0,814$. Результаты вычислений по данному алгоритму при $\bar{\gamma} = 1$ и $\bar{\gamma} = 3$ приведены в таблицах 2 и 3 соответственно. Все величины Δ_{11} , Δ_{15} , Δ_{16} соответствуют квазивязкому типу разрушения, так, Δ_{16} вычислено по формуле (16), когда перед корнем выбирался знак “-”. Отметим, что квазихрупкому типу разрушения, когда в формуле (16) перед корнем выбирается знак “+” значению критической нагрузки $\lambda = 0,179$ при $\bar{\gamma} = 3$ соответствует значение $\Delta_+ = 0,007$, а квазивязкому типу разрушения соответствует значение $\Delta_- = 0,136$.

Таблица 2.

λ	Δ_{11} , мм	Δ_{15} , мм	Δ_{16} , мм	Δ_E , мм
0,098	0,0237	0,0238	0,0239	0,023
0,125	0,0671	0,0505	0,0389	0,045
0,153	0,162	0,0887	0,0583	0,089
0,181	0,343	0,138	0,0816	0,138
0,208	0,645	0,195	0,108	0,201
0,245	1,39	0,290	0,149	0,3
0,292	3,25	0,437	0,212	0,463
0,338	6,82	0,610	0,285	0,668

Таблица 3.

λ	Δ_{11} , мм	Δ_{15} , мм	Δ_{16} , мм	Δ_E , мм
0,098	0,0096	0,0232	0,0398	0,023
0,125	0,0272	0,0497	0,0647	0,045
0,153	0,0657	0,0877	0,0970	0,089
0,181	0,139	0,136	0,136	0,138
0,208	0,261	0,194	0,179	0,201
0,245	0,561	0,288	0,249	0,3
0,292	1,31	0,435	0,353	0,463
0,338	2,76	0,608	0,473	0,668

Анализ табличных данных показывает, что длина зоны предразрушения Δ_{15} , вычисленная по формуле (15), очень хорошо согласуется с длиной Δ_E зоны пластичности численного моделирования во всем диапазоне нагрузок.

Это совпадение объясняется тем, что при выводе формулы (15) не использовалось выражение модельного поперечника ma_τ зоны предразрушения. Длины зон предразрушения Δ_{11} и Δ_{16} почти совпадают с Δ_{15} только для критического значения нагрузки: в таблице 2 для $\lambda = 0,098$, а в таблице 3 для $\lambda = 0,181$. Так получается потому, что при выводе формул (11) и (16) использованы оба уравнения (9) и (10), а уравнение (10) содержит выражение модельного поперечника ma_τ зоны предразрушения. Однако величина ma_τ плохо согласуется с шириной a_E зоны пластичности при численном моделировании.

В таблице 4 приведены значения модельного поперечника ma_τ для различных нагрузок при $\bar{\gamma} = 1$ и $\bar{\gamma} = 3$. Анализ данных таблицы 4 показывает, что величина a_E возрастает пропорционально нагрузке λ , а величина модельного поперечника ma_τ пропорционально λ^2 (см. пояснение к формулам (6) и (7)).

Таблица 4.

λ	ma_τ для $\bar{\gamma} = 1$	ma_τ для $\bar{\gamma} = 3$	a_E , мм
0,098	0,0267	0,00577	0,0675
0,125	0,0434	0,00939	0,0713
0,153	0,065	0,0141	0,0725
0,181	0,0909	0,0197	0,0738
0,208	0,12	0,0260	0,0863
0,245	0,167	0,0360	0,0940
0,292	0,237	0,0512	0,105
0,338	0,317	0,0687	0,118

Для улучшения результатов прогнозирования величины ma_τ с помощью аналитической модели и согласования с результатами численного моделирования величины a_E предлагается ввести в левую и правую части уравнения (6) поправочные коэффициенты следующим образом. Положим для критических значений нагрузки λ и длины Δ_E зоны пластичности $2u(-\Delta_E)m_u = 2u_E$, $a_\tau m_a = a_E$, отсюда находим значение поправочного коэффициента $m = m_a/m_u$ формулы (7). Некоторые результаты вычислений с помощью такой поправки приведены в таблице 5. Очевидно, что для более полного согласования результатов во всем диапазоне нагрузок можно выбрать поправочный коэффициент m_a зависящим от нагрузки λ .

Таблица 5.

λ	$m_a a_\tau$ для $\bar{\gamma} = 1$	$m_a a_\tau$ для $\bar{\gamma} = 3$	a_E , мм
0,098	0,0665	0,0234	0,0675
0,181	0,227	0,0800	0,0738
0,338	0,791	0,279	0,118

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные структурные формулы (11), (14)-(16) могут оказаться полезными для прогнозирования критической разрушающей нагрузки $\lambda = \tau_\infty / \tau_Y$

и оценки длины зоны предразрушения Δ_c при нагружении по второй моде (при поперечном сдвиге) в квазивязких структурированных материалах при плоском напряженном состоянии и при плоской деформации. Указанные формулы выражают величину нагрузки λ и длины Δ_c через длину трещины $2l$ с использованием следующих четырех параметров: r – характерный линейный размер структуры материала, γ_0 и γ_1 – параметры аппроксимации классической τ – γ диаграммы, m – поправочный коэффициент. Эти четыре параметра подбираются по результатам лабораторного эксперимента или численного моделирования, например, так, как показано в данной работе.

Таким образом, рассматриваемая аналитическая модель может быть использована при исследовании деформирования и разрушения композитов из структурированных материалов. Это позволит уменьшить количество лабораторных или численных экспериментов, необходимых для оценки разрушающей нагрузки.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kruzic J.J., McNaney J.M., Cannon R.M., Ritchie R.O.* Effects of plastic constraint on the cyclic and static fatigue behavior of metal/ceramic layered structures // *Mechanics of materials*. – 2004. – Vol.36. – P.57-72.
2. *Смирнов С.В., Веретенникова И.А., Вичужанин Д.И.* Моделирование расслоения при пластической деформации биметаллического материала, полученного сваркой взрывом // *Вычислительная механика сплошных сред*. – 2014. – Т.7. – №4. – С.398-411.
3. *Корнев В.М., Кургузов В.Д.* Достаточный дискретно-интегральный критерий прочности при отрыве // *ПМТФ*. – 2001. – Т.42. – №2. – С.161-170.
4. *Корнев В.М.* Распределение напряжений и раскрытие трещин в зоне предразрушения (подход Нейбера-Новожилова) // *Физическая мезомеханика*. – 2004. – Т.7. – №3. – С.53-62.
5. *Pirondi A., Moroni F.* An investigation of fatigue failure prediction of adhesively bonded metal/metaljoints // *International Journal of Adhesion & Adhesives* – 2009. – Vol.29. – P.796-805.
6. *Aluru K., Wen F.-L., Shen Y.-L.* Direct simulation of fatigue failure in solder joints during cyclic shear // *Materials and Design* – 2011. – Vol.32. – P.1940-1947.
7. *Корнев В.М., Астанов И.С., Астанов Н.С.* Модель расслоения композита при поперечном сдвиге // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т.21. – №2. – С.149-161.
8. *Кургузов В.Д., Корнев В.М., Астанов Н.С.* Модель разрушения биматериала при расслоении. Численный эксперимент // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2011. – Т.17. – №4. – С.462-473.
9. *Демешкин А.Г., Корнев В.М., Астанов Н.С.* Прочность клееного композита при наличии трещиноподобных дефектов // *Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2013. – Т.19. – №3. – С.445-458.
10. *Керштейн И. М., Ключников В.Д., Ломакин Е.В., Шестериков С.А.* Основы экспериментальной механики разрушения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. – 140 с.
11. *Корнев В.М., Кургузов В.Д.* Достаточный критерий разрушения в случае сложного напряженного состояния при непропорциональном деформировании

- материала в зоне предразрушения // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т.51. – №6. – С.153-163.
12. Броек Д. Основы механики разрушения. – М.: Высш. школа, 1980. – 368 с.
13. Саврук М.П. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами // Механика разрушения и прочность материалов, Т.2. – Киев: Наук. думка, 1988. – 619 с.

Поступила в редакцию 21 июля 2015 года.

Сведения об авторах:

Астапов Николай Степанович – к.ф.-м.н., доц., с.н.с., ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: nika@hydro.nsc.ru

Кургузов Владимир Дмитриевич – к.ф.-м.н., доц., в.н.с., ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: kurguzovv@hydro.nsc.ru

Корнев Владимир Михайлович – д.ф.-м.н., проф., гл.н.с., ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: kornev@hydro.nsc.ru