

## РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ТРЕХСЛОЙНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С УПРУГИМ НАПОЛНИТЕЛЕМ<sup>1</sup>

Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В.

*Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика  
Беларусь*

### АННОТАЦИЯ

Приведена постановка и решение задачи о вынужденных колебаниях трехслойной цилиндрической оболочки, заполненной упругой средой (наполнителем). Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Кирхгофа-Лява. В толстом наполнителе учитывается работа поперечного сдвига и обжатие по толщине. Изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Учтены радиальные и окружные силы инерции. Реакция упругого наполнителя описывается моделью Винклера. Получен ряд аналитических решений и проведен численный анализ зависимостей перемещений при действии резонансного нагружения.

**Ключевые слова:** резонансные колебания; трехслойная цилиндрическая оболочка; упругий наполнитель; перемещения.

## RESONANCE OSCILLATIONS OF A THREE-LAYERED CYLINDRICAL SHELL WITH AN ELASTIC FILLER

Starovoitov E.I., Leonenko D.V.

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

### ABSTRACT

The paper considers forced oscillations of the three-layered cylindrical shells filled by an elastic medium. The Kirchhoff-Love's hypotheses are accepted for the thin isotropic bearing layers. The work of the transverse shear and thickness reduction in the thick filler are taken into account. Variations in displacements in the transverse coordinate are accepted to be linear. The conditions of continuous displacements are used on the contact boundary. Take account of radial and circumferential inertia forces. The reaction of the inertia-free elastic filler is described in terms of the Winkler's model. A number of analytical solutions have been obtained and numerical analysis dependencies movements under the influence of the resonant load.

**Keywords:** resonance oscillations; three-layered cylindrical shell; elastic filler; displacement

### ВВЕДЕНИЕ

В последнее время значительное распространение получили трехслойные элементы конструкций, которые состоят из двух несущих слоев и наполнителя, обеспечивающего их совместную работу. В условиях деформации изгиба эти

---

<sup>1</sup> Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 14-49-00091).

конструкции оказываются наиболее рациональными, то есть близкими оптимальным с точки зрения обеспечения минимума весовых показателей при заданных ограничениях на прочность и жесткость. Они широко применяются в современных отраслях промышленности, что обуславливает необходимость разработки методов их расчета. В монографии [1] рассматриваются различные математические модели слоистых элементов конструкций, изложены методы их расчета. Монографии [2-5] и статьи [6-9] посвящены исследованию деформирования и динамического поведения однородных и композитных элементов конструкций, не связанных с упругими средами, включая трехслойные цилиндрические оболочки со слоями из функционально-градиентных материалов (FGM) при различных силовых и тепловых нагрузках, рассмотрены колебания, распространение нестационарных волн и ударное нагружение.

Монография [10] является одной из основополагающих при расчетах однородных элементов конструкций, связанных с упругим основанием. Осесимметричные задачи динамики подкрепленных оболочек вращения на упругом основании рассмотрены в статье [11]. Напряженно-деформированное состояние трехслойных стержней и пластин на упругом основании при статических, динамических и тепловых воздействиях исследовано в работах [12-16].

Далее рассмотрены вынужденные колебания трехслойной круговой цилиндрической оболочки, заполненной упругой безынерционной средой Винклера, в частности и в области резонанса. При решении задачи используются результаты исследования спектра собственных частот круговой трехслойной цилиндрической оболочки со сплошным упругим наполнителем Винклера, полученные в работе [17].

## 1. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В тонких изотропных несущих слоях цилиндрической оболочки радиуса  $R$  приняты гипотезы Кирхгофа-Лява. В толстом наполнителе учитывается работа поперечного сдвига и обжатие по толщине, изменение перемещений принято линейным по поперечной координате. На границах контакта приняты условия непрерывности перемещений. Деформации малые.

Через  $h_k$  обозначена толщина  $k$ -го слоя,  $h_3=2c$ . За независимые переменные принимаются  $u_\alpha^k, w^k$  – тангенциальные перемещения и прогибы точек срединных поверхностей несущих слоев ( $k=1,2$ ) в направлении осей  $x_\alpha, z$  правой системы координат, отнесенной к линиям главных кривизн срединной поверхности наполнителя и к внешней нормали, соответственно.

В этом случае перемещения в слоях оболочки можно выразить через независимые переменные  $u_\alpha^k, w^k$  – тангенциальные перемещения и прогибы точек срединных поверхностей несущих слоев в направлении осей  $x_\alpha, z$  правой системы координат, отнесенной к линиям главных кривизн срединной поверхности наполнителя и к внешней нормали, соответственно. К наружным поверхностям первого несущего слоя приложена распределенная нагрузка  $q_l^1$  ( $l=1,2$ ), второго несущего слоя – реакция упругой безынерционной среды Винклера  $q_{3r}^2$  (рис.1)

$$q_{3r}^2 = -\kappa_0 w^2, \quad (1)$$

где  $\kappa_0$  – коэффициент постели.

Уравнения свободных колебаний рассматриваемой оболочки и силовые граничные условия получены из вариационного принципа Лагранжа [15]. В случае вынужденных колебаний они принимают вид ( $m=1,2$ )

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^2 \left[ \left( a_{m11}^k \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a_{m13}^k \right) u_1^k + \left( a_{m15}^k \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{m16}^k \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \right) w^k \right] - \\ & - b_1^m \ddot{u}_1^m = -Rm_m q_1^m, \\ & \sum_{k=1}^2 \left[ \left( a_{m31}^{1k} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + a_{m33}^{1k} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + a_{m34}^k - \kappa_0 Rm_m \delta_{mk} \delta_{2m} \right) w^k + \right. \\ & \left. + \left( a_{m35}^{1k} \frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + a_{m36}^{1k} \frac{\partial}{\partial x_1} \right) u_1^k \right] - b_3^m \ddot{w}^m = -Rm_m [q_3^m \pm 0,5h_m q_1^m], \end{aligned} \quad (2)$$

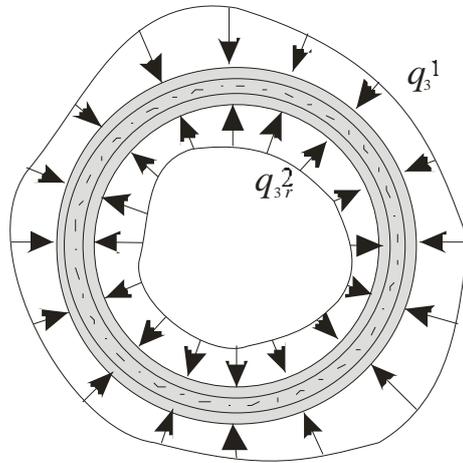


Рис.1. Поперечное сечение оболочки.

Здесь  $\delta_{mk}$  – символы Кронекера; частное дифференцирование обозначается соответствующим нижним координатным индексом, следующим после запятой; нижний знак в формулах соответствует индексу  $k=2$  (номеру слоя);  $a_{mnp}^k$  – 36 коэффициентов, выраженных через геометрические характеристики слоев, параметры упругости материалов слоев и жесткость внешней среды  $\kappa_0$ , например

$$\begin{aligned} a_{k11}^k &= K_k^+ h_k (1 \pm a_k) + K_3^+ c (2 \pm c) / 3, \quad a_{\alpha 11}^k = K_3^+ c / 3, \dots \\ a_{\alpha 36}^{1k} &= -K_3 (c / 6 \pm 0,5) - G_3 (c / 18 \pm h_{\alpha} / (4c) \pm 1 / 6), \\ m_m &= 1 \pm (c + h_m) R^{-1}, \quad b_1^m = 2R [\rho_m I_1^m + 0,25 \rho_3 I_2^{\pm}], \quad b_3^m = b_1^m, \\ I_1^k &= \int_{h_k} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) dz, \quad I_2^{\pm} = \int_{h_3} (1 \pm z / c)^2 \left( 1 + \frac{z}{R} \right) dz, \\ K_k^+ &= K_k + 4G_k / 3, \quad K_k^- = K_k - 2G_k / 3 \quad (k, \alpha=1,2; k \neq \alpha), \end{aligned}$$

где  $G_k, K_k$  – модули сдвиговой и объемной деформации,  $\rho_k$  – плотность материала  $k$ -го слоя.

Уравнения (2) не учитывают силы инерции, возникающие при закручивании оболочки вдоль собственной оси, т.е. соответствуют плоско-инерционной модели.

Кинематические условия свободного опирания торцами на жесткие неподвижные опоры будут

$$w^k = u_{,1}^k = w_{,11}^k = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (3)$$

В случае жесткой заделки должны выполняться требования

$$u_1^k = w^k = w_{,1}^k = 0 \quad (k = 1, 2). \quad (4)$$

Начально-краевая задача определения перемещений замыкается добавлением к уравнениям движения (2) профилей начальных перемещений и скоростей срединных поверхностей несущих слоев

$$\begin{aligned} u_1^k(x_\beta, 0) &= u_{10}^k(x_\beta), \quad \dot{u}_1^k(x_\beta, 0) = \dot{u}_{10}^k(x_\beta), \\ w^k(x_\beta, 0) &= w_0^k(x_\beta), \quad \dot{w}^k(x_\beta, 0) = \dot{w}_0^k(x_\beta) \quad (\beta, k = 1, 2). \end{aligned}$$

## 2. МЕТОД И ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Для получения решения воспользуемся методом Бубнова-Галеркина, который предполагает разложение внешних нагрузок и искомых перемещений в ряды по системам базисных функций

$$\begin{aligned} q_l^1 &= \sum_m \psi_{qlm}(x) q_{lm}(t), \quad u_1^1 = \sum_m \psi_{1m}^1(x) T_{1m}(t), \quad u_1^2 = \sum_m \psi_{1m}^2(x) T_{2m}(t), \\ w^1 &= \sum_m \psi_{2m}^1(x) T_{3m}(t), \quad w^2 = \sum_m \psi_{2m}^2(x) T_{4m}(t), \quad (l, k = 1, 2). \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\psi_{lm}^k, \psi_{qlm}$  – системы базисных ортогональных функций, за счет выбора которых должны удовлетворяться граничные условия.

Подставив выражения (5) в уравнения (2), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения функции времени  $T_{jm}(t)$

$$\sum_{j=1}^4 P_{ljm} T_{jm} + q_{lm}(t) = b_l \ddot{T}_{lm}, \quad (l=1...4). \quad (6)$$

Здесь коэффициенты  $P_{ljm}$  зависят от волнового параметра  $m$ ,  $q_{lm}$  – коэффициенты разложения компонент внешней нагрузки по системе базисных функций.

Кинематические условия свободного опирания торцами на жесткие неподвижные опоры (3) удовлетворяют перемещения

$$\begin{aligned} u_1^1 &= \sum_m \cos \frac{\pi m x}{L} T_{1m}(t), \quad u_1^2 = \sum_m \cos \frac{\pi m x}{L} T_{2m}(t), \\ w^1 &= \sum_m \sin \frac{\pi m x}{L} T_{3m}(t), \quad w^2 = \sum_m \sin \frac{\pi m x}{L} T_{4m}(t), \end{aligned}$$

где  $T_{lm}(t)$  – искомые функции времени, удовлетворяющие уравнениям (6).

## 3. РЕЗОНАНСНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Представим искомые функции времени  $T_{lm}(t)$  в виде разложения в конечный ряд по системе собственных ортонормированных функций времени  $\zeta_{mi}$

$$T_{lm} = \sum_{i=1}^4 \delta_{lmi} \zeta_{mi},$$

где  $\delta_{lmi}$  – нормированные коэффициенты форм.

Подставляя это выражение в (6) и используя свойство ортогональности собственных форм колебаний, приходим к четырем независимым уравнениям относительно неизвестных функций времени  $\zeta_{mi}$  (для каждого  $m$ )

$$\ddot{\zeta}_{mi} + \omega_{mi}^2 \zeta_{mi} = \tilde{q}_{mi}(t), \quad \tilde{q}_{mi} = \sum_{l=1}^4 q_{lm} \delta_{lmi} / \sum_{l=1}^4 b_l \delta_{lmi}^2, \quad (7)$$

где  $\tilde{q}_{mi}$  – компоненты приведенной нагрузки,  $\omega_{mi}$  – частота собственных колебаний.

После решения уравнений (7) искомые перемещения представляются в виде сумм произведений  $\zeta_{mi}$  на соответствующие коэффициенты и исходные координатные функции (5).

Рассмотрим вынужденные колебания упругой трехслойной оболочки в упругой безынерционной среде, под действием гармонических резонансных нагрузок. Пусть  $q_3^1$  – резонансная поперечная осесимметричная нагрузка

$$q_3^1(x, t) = q_{3a}^1(x) \sin(\omega_{kj} t), \quad (8)$$

где  $\omega_{kj}$  – частота внешней силы, совпадающая с одной из собственных частот оболочки.

Коэффициенты разложения нагрузки (8) в ряд при условии свободного опирания на жесткие опоры торцов оболочки

$$q_{3m}^1 = \frac{2 \sin(\omega_{kj} t)}{L} \int_0^L q_{3a}^1(x) \sin\left(\frac{\pi m}{L} x\right) dx. \quad (9)$$

Решение дифференциального уравнения (8) можно представить в виде

$$\zeta_{mi}(t) = A_{mi} \cos(\omega_{mi} t) + B_{mi} \sin(\omega_{mi} t) + y_{mi}(t)$$

где  $y_{mi}(t)$  – частное решение уравнения (7).

В случае параметров нагрузки (9)

$$y_{mi}(t) = \begin{cases} \frac{\tilde{q}_{mi}}{(\omega_{mi}^2 - \omega_{kj}^2)} \sin(\omega_{kj} t) & m \neq k \text{ или } i \neq j, \\ -\frac{\tilde{q}_{mi}}{2\omega_{mi}} t \cos(\omega_{mi} t) & m = k, i = j. \end{cases} \quad (10)$$

При нулевых начальных условиях константы интегрирования будут

$$A_{mi} = 0, \quad B_{mi} = -\frac{1}{\omega_{mi}} \left[ \begin{cases} \frac{\omega_{kj} \tilde{q}_{mi}}{(\omega_{mi}^2 - \omega_{kj}^2)} & m \neq k \text{ или } i \neq j, \\ -\frac{\tilde{q}_{mi}}{2\omega_{mi}} & m = k, i = j. \end{cases} \right].$$

Если нагрузка равномерно распределена по всей поверхности оболочки, то

$$q_{3m}^1 = \frac{4q_0}{\pi m} \quad (m = 1, 3, 5, \dots). \quad (11)$$

Здесь *ложный резонанс* возникает, если первый индекс  $k$  у частоты возмущающей силы  $\omega_{kj}$  четный. Это приводит к  $q_{3k}^1 = 0$  в (11) и нулевой резонансной составляющей в частном решении (10). В этом случае частота вынужденных колебаний совпадает с одной из собственных частот оболочки, но нарастания амплитуды колебаний не происходит.

#### 4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Проведено численное исследование резонансных колебаний круговой трехслойной цилиндрической оболочки (Д16Т-фторопласт-Д16Т,  $h_1=h_2=0,02 R$ ,

$c=0,025R$ ), свободно опертой торцами на жесткие неподвижные опоры в упругой винклеровской среде (1), при действии нагрузки интенсивностью  $q_3^1 = q_0 = 2 \cdot 10^5$  Па. Линейные перемещения отнесены к радиусу оболочки, время измеряется в секундах (с). Инерция вдоль оси оболочки не учитывается.

На рис.2 отражены колебательные процессы в срединном сечении внешнего слоя оболочки под действием резонансных нагрузок с частотами  $\omega_{n1}$  ( $n=1,2$ ) без учета жесткости окружающей среды ( $\kappa_0=0$ ,  $x=L/2$ ,  $L=10$ ):  $a - \omega_{11}=938$  с<sup>-1</sup>,  $b - \omega_{21}=1774$  с<sup>-1</sup>. Как видно из графиков, нарастание величины прогибов происходит при нечетных  $n$ , при четных – наблюдается ложный резонанс.

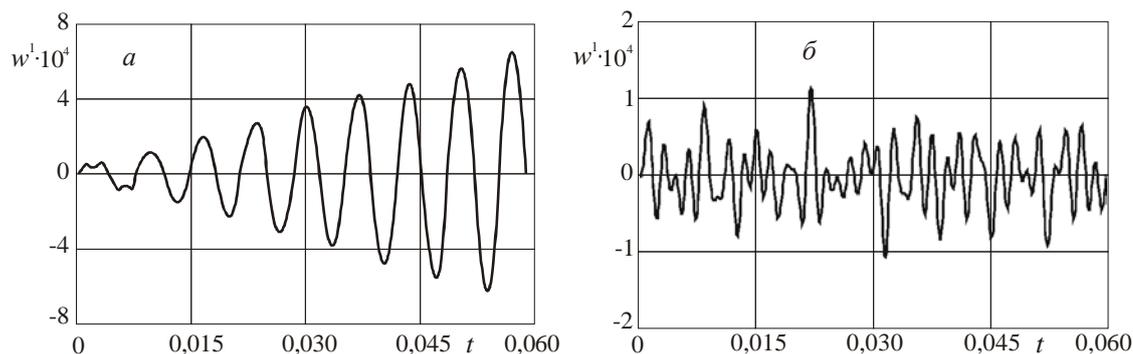


Рис.2 Изменение прогибов в оболочке во времени  $t$  (с) при отсутствии упругой среды ( $\kappa=0$ ) при резонансе по частоте  $\omega_{n1}$ :

Рис.3 иллюстрирует аналогичные колебания в среде средней жесткости ( $\kappa_0=10^9$  Па/м,  $x=L/2$ ,  $L=10R$ ):  $a - \omega_{11}=979$  с<sup>-1</sup>,  $b - \omega_{21}=1886$  с<sup>-1</sup>. Здесь существенно замедляется рост амплитуд колебаний. Величины собственных частот возросли за счет увеличения жесткости системы оболочка-среда.

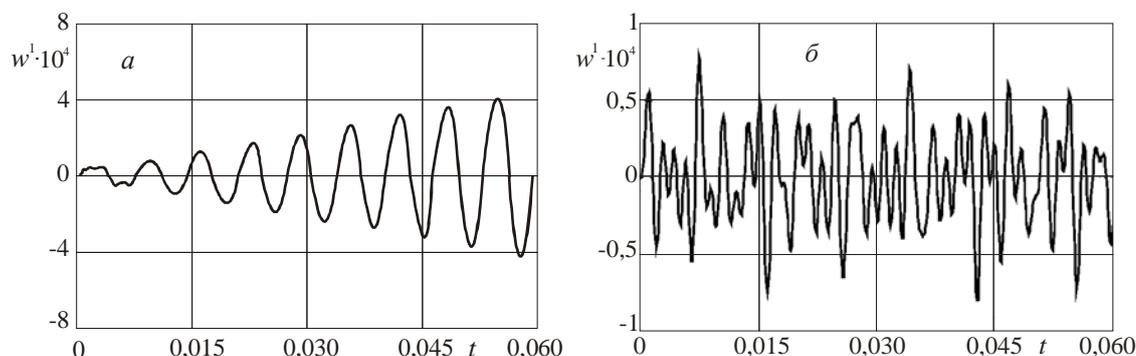


Рис.3. Изменение прогибов в оболочке во времени  $t$  (с) в среде средней жесткости ( $\kappa_0=10^9$  Па/м) при резонансе по частоте  $\omega_{n1}$ .

В среде высокой жесткости колебания в срединном сечении оболочки иллюстрирует рис.4 ( $\kappa_0=10^{11}$  Па/м,  $x=L/2$ ,  $L=10R$ ):  $a - \omega_{11}=1135$  с<sup>-1</sup>,  $b - \omega_{21}=2269$  с<sup>-1</sup>. Резонансные нагрузки с частотами  $\omega_{n1}$  ( $n=1,3,5$ ) вызывают рост амплитуд колебаний, при частотах  $\omega_{n1}$  ( $n=2,4$ ) наблюдается ложный резонанс. Здесь временной интервал действия нагрузок увеличен в 100 раз, т.к. среда существенно тормозит нарастание амплитуд.

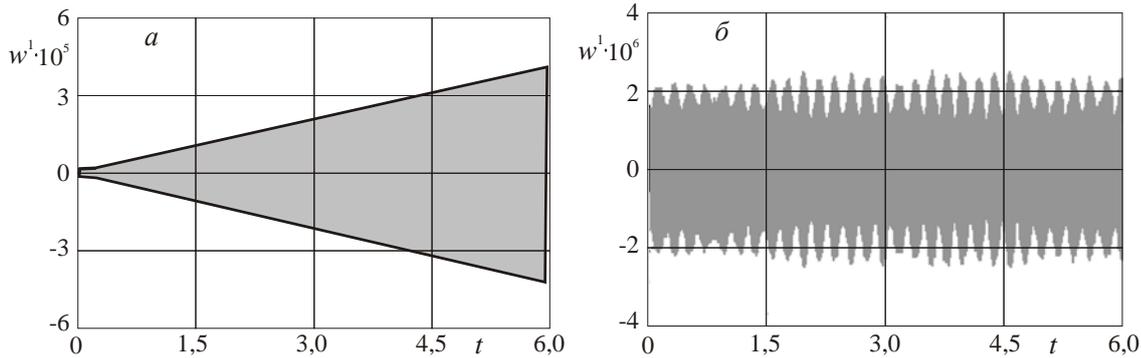


Рис.4. Изменение прогибов в оболочке во времени  $t$  (с) в среде высокой жесткости при резонансе по частоте  $\omega_{11}$ .

Изменение максимального прогиба срединного сечения оболочки на интервале  $t \in [0; 0,6]$  с в зависимости от резонансной частоты  $\omega_{n1}$  ( $n$  – нечетное) при колебаниях во внешней среде различной жесткости иллюстрирует рис.5 ( $L=10R$ ): 1 –  $\kappa_0=0$ , 2 –  $\kappa_0=10^9$  Па/м, 3 –  $\kappa_0=10^{11}$  Па/м (увеличен в 500 раз). При отсутствии окружающей среды (1) и в среде средней жесткости (2) амплитуды с увеличением частоты вначале растут, затем уменьшаются. В среде высокой жесткости (3) амплитуды стабильно растут.

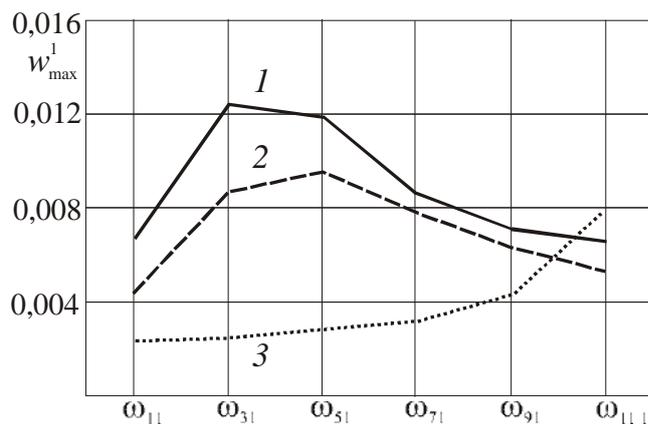


Рис.5. Изменение максимального прогиба на интервале  $t \in [0; 0,6]$  с в зависимости от резонансной частоты  $\omega_{n1}$ .

Величины резонансных частот  $\omega_{11}$  не указаны, т.к. они изменяются для всех оболочек с увеличением жесткости среды. Здесь с ростом жесткости среды амплитуды колебаний уменьшаются для всех оболочек, при этом амплитуды в короткой оболочке более чувствительны к увеличению жесткости среды.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенные постановка и решения плоско-инерционной начально-краевой задачи для трехслойной цилиндрической оболочки с упругим безынерционным наполнителем, позволяют исследовать резонансные режимы колебаний, давать практические рекомендации при проектировании соответствующих элементов конструкций.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Болотин В.В., Новичков Ю.Н.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. *Головко К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф.* Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках. – Киев: Киевский ун-т, 2012. – 541 с.
3. *Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андрияшин В.А.* Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек. – М.: Физматлит, 2014. – 408 с.
4. *Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В.* Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций. – М.: Физматлит, 2005. – 576 с.
5. *Starovoitov E.I., Nagiyev F.B.* Foundations of the theory of elasticity, plasticity and viscoelasticity. – Toronto, New Jersey: Apple Academic Press, 2012. – 346 p.
6. *Naeem M.N., Khan A.G., Arshad Sh. H., Shah A. G., Gamkhar M.* Vibration of Three-Layered FGM Cylindrical Shells with Middle Layer of Isotropic Material for Various Boundary Conditions // World J. of Mechanics. – 2014. – Vol.4. – N11. – P.315-333.
7. *Sofiyev A.H.* Vibration and Stability of Composite Cylindrical Shells Containing a FG Layer Subject to Various Loads // Structural Engineering and Mechanics: An International Journal. – 2007. – Vol.27. – N3. – P.365-391.
8. *Горшков А.Г., Амар Абдул Карим Салман, Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.* Удар деформируемым цилиндрическим телом по упругому полупространству // Изв. РАН. МТТ. – 2004. – №3. – С.82.
9. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В., Шукуров А.М.* Нестационарные колебания упругой среды, ограниченной двумя эксцентричными сферическими поверхностями // Прикладная математика и механика. – 1994. – Т.58. – №2. – С.85.
10. *Власов В.З., Леонтьев Н.Н.* Балки, плиты, оболочки на упругом основании. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 491 с.
11. *Луговой П.З., Мейш В.Ф., Головко К.Г.* О решении осесимметричных задач динамики подкрепленных оболочек вращения на упругом основании // Прикладная механика. – 2009. – Т.45. – №2. – С.99-106.
12. *Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В.* Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием. – М.: Физматлит, 2011. – 560 с.
13. *Leonenko D.V., Starovoitov E.I.* Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base // Mechanics of Solids. – 2009. – Vol.44. – N5. – P.744-755.
14. *Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Панин С.В.* Термопластический изгиб круговых композитных пластин на основании Винклера // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №2. – С.209-219.
15. *Leonenko D.V., Starovoitov, E.I.* Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol.46. – N2. – P.291-298.
16. *Leonenko D. V., Starovoitov E.I.* Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation // Mechanics of Solids. – 2012. – Vol.47. – N1. – P.111-118.

17. Старовойтов Э.И. Леоненко Д.В. Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №2. – С.162-169.

*Поступила в редакцию 10 сентября 2015 года.*

---

Сведения об авторах:

Старовойтов Эдуард Иванович – д.ф.-м.н., проф., зав. кафедрой «Строительная механика», Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: [edstar0@yandex.by](mailto:edstar0@yandex.by)

Леоненко Денис Владимирович – д.ф.-м.н., доц., профессор кафедры «Строительная механика», Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: [leoden@tut.by](mailto:leoden@tut.by)