УДК 51-72

ОБ АНИЗОТРОПИИ УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ: ИДЕНТИФИКАЦИЯ СИММЕТРИЙНЫХ СВОЙСТВ[1]

Остапович К.В., Трусов П.В.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия

АННОТАЦИЯ

Предложен подход к определению принадлежности упругих свойств анизотропных материалов к различным классам симметрии. Для заданного тензора упругих констант введено понятие оптимального симметрийного приближения. Получены оценки невязки отклика при использовании симметрийных приближений в упругом линейном законе.

Ключевые слова: анизотропные материалы; упругие константы; симметрия

ON ELASTIC ANISOTROPY: SYMMETRY IDENTIFICATION

Ostapovich K.V., Trusov P.V.

Perm national research polytechnic university, Perm, Russia

ABSTRACT

An approach to identify a symmetry class of elastic anisotropic materials is proposed. Optimal approximation of a given elastic tensor in the symmetry class is defined. Estimations of the residuals caused by the symmetrical approximations of the elastic linear law are obtained.

Keywords: anisotropic materials; elastic moduli; symmetry

ВВЕДЕНИЕ

Многие используемые в современных конструкциях материалы характеризуются существенной анизотропией упругих свойств. При этом симметрийные свойства [1] материалов деталей и конструкций, подвергаемых различной предварительной обработке, как правило, априори неизвестны. Информация о принадлежности (или близости) этих свойств к известным классам имеет важное практическое значение при дальнейшей эксплуатации изделий. Знание типа симметрии представляет интерес также и с вычислительной точки зрения, так как позволяет упростить вид определяющих соотношений в численных реализациях моделей различных физико-механических процессов. Следует отметить, что большинство расчетных приложений основано на предположении об изотропии упругих свойств рассматриваемых материалов, однако численные оценки допустимости такого приближения отсутствуют.

[1] *Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (базовая часть государственного задания ПНИПУ, № гос. регистр. 01201460535), РФФИ (гранты № 14-01-00069-а, 15-08-06866-а).*

Объектом настоящего исследования является представительный макрообъем (ПО) [2] анизотропного простого [3] материала, упругое деформирование которого описывается обобщенным законом Гука [4]

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon}, \qquad (0.1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор (2-го ранга) напряжений Коши, $\boldsymbol{\varepsilon}$ – тензор (2-го ранга) малых упругих деформаций, $\boldsymbol{\Pi}$ – тензор (4-го ранга) упругих констант.

Целью работы является разработка математического аппарата для исследования симметрии упругих свойств изучаемого материала.

Рассматривается следующая задача (*симметрийной идентификации*), связанная с определением типа симметрии материала на основе его тензора упругих констант.

В лабораторной системе координат (ЛСК) для исследуемого материала полагаются известными все компоненты макроскопического тензора упругих констант $\boldsymbol{\Pi}$. *Требуется определить, к какому из известных классов симметрии могут быть отнесены его упругие свойства.*

Будем придерживаться следующих обозначений. Пусть $\mathbb{E}_3$ – трехмерное евклидово пространство над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел; $\mathbb{E}_3^r$ – пространство тензоров ранга r над $\mathbb{E}_3$; $\mathbb{O}^+ \subset \mathbb{E}_3^2$ – собственно ортогональная группа преобразований пространства $\mathbb{E}_3$. Далее будем использовать ортонормированную ЛСК, обозначая ее базисные векторы как $\mathbf{l}_i$.

Для материала, упругого по Грину, из условия существования упругого потенциала следует так называемая главная симметрия тензора упругих свойств [5]

$$\Pi_{ijkl} = \Pi_{klij}, \qquad (0.2)$$

уменьшающая число его независимых компонент с 81 до 45. В рамках теории упругости, оперирующей с симметричными мерами напряженного и деформированного состояния (НДС), появляются также минорные симметрии, и уравнения (0.2) дополняются и записываются в виде

$$\Pi_{ijkl} = \Pi_{klij} = \Pi_{ijlk}, \qquad (0.3)$$

так что в общем случае анизотропии тензор упругих констант имеет 21 независимую компоненту. Тензор четвертого ранга, обладающий симметрией вида (0.3), далее будем называть *полностью симметричным*. Следует отметить, что в разрабатываемом аппарате для тензоров упругих констант предполагается лишь наличие главной симметрии (0.2), в то время как требование полной симметрии (0.3) является несущественным. Таким образом, развиваемый подход допускает возможную модификацию упругого закона, ориентированного на использование несимметричных мер НДС. Целесообразности и развитию соответствующих модификаций уделялось внимание в статьях [6-8].

Возвращаясь к постановке задачи идентификации, отметим необходимость предварительного нахождения всех компонент тензора свойств в некотором базисе. Методы экспериментального определения 21 упругой константы материала в ЛСК предложены, например, в работах [9-11]. Другой подход, в рамках которого можно в явном виде получить совокупность (*дистрибутив* [12]) всех компонент тензора упругих свойств, основан на многоуровневом моделировании исследуемой среды [13-15].

В работе предполагается, что классификация симметрии упругих свойств введена на основе структурной формулы для тензоров упругих констант (здесь и далее принимается соглашение о суммировании по паре повторяющихся индексов, не заключенных в круглые скобки)

$$\mathbf{\Pi}^{(s)} = \Pi_{\alpha}^{(s)} \mathbf{K}_{\alpha}^{(s)}, \tag{0.4}$$

где s – обозначение класса симметрии; $\Pi_{\alpha}^{(s)} \in \mathbb{R}$ – произвольные независимые константы ($\alpha = \overline{1, \mathrm{A}^{(s)}}$, $\mathrm{A}^{(s)}$ – число таких констант для класса s); $\mathbf{K}_{\alpha}^{(s)} \in \mathbb{E}_3^4$ – линейно независимые тензоры, дистрибутивы компонент $K_{\alpha\ ijkl}^{(s)}$ которых полагаются заданными в некотором базисе $\{\mathbf{k}_i\} \subset \mathbb{E}_3$. Следует отметить, что векторы указанного базиса в общем случае заранее не известны (то есть неизвестны компоненты их разложения по базису $\{\mathbf{l}_i\} \subset \mathbb{E}_3$ ЛСК) – по существу, для их установления и решается задача идентификации. В настоящей работе оба базиса полагаются правыми ортонормированными, так что взаимное расположение их векторов однозначно описывается ортогональным ориентационным тензором $\mathbf{O} \in \mathbb{O}^{+}$: $\mathbf{k}_i = \mathbf{O} \cdot \mathbf{l}_i$. В работе [16] вводится понятие канонических осей анизотропии тензора упругих констант как осей декартовой прямоугольной системы координат, в которой указанный тензор имеет наименьшее число ненулевых независимых компонент. Для тензоров известных симметрийных классов указанные оси можно отождествить с введенными выше векторами $\mathbf{k}_i$, а линейно независимые компоненты – с коэффициентами $\Pi_{\alpha}^{(s)}$. В этом состоит один из возможных подходов к построению классифицирующей формулы (0.4). Далее базис $\{\mathbf{k}_i\}$ будем называть *каноническим* (для рассматриваемого класса симметрии s). Тензор упругих констант считается соответствующим классу симметрии s в том и только в том случае, когда он представляется в виде линейной комбинации (0.4) тензоров $\mathbf{K}_{\alpha}^{(s)}$, задающих этот класс.

Следует отметить, что к построению структурных формул вида (0.4), позволяющих классифицировать упругие материалы, применимы и другие подходы. В механике сплошных сред широкое распространение имеет классификация, основанная на понятии группы равноправности неискаженной конфигурации [2,3]. С ее помощью можно выделить, в частности, случаи ортотропии, кубической симметрии, трансверсальной изотропии и изотропии. Тензоры упругих констант перечисленных классов имеют вполне определенную структуру, устанавливаемую по свойствам симметрии относительно ортогональных преобразований системы координат, которая позволяет представить их в виде (0.4).

Альтернативные варианты классифицирующих формул могут быть получены на основе собственных модулей упругости и собственных упругих состояний [17]. Такие подходы сводятся, по существу, к спектральному разложению тензоров упругих констант [18-22]. Отметим, что существуют и другие виды разложения, которые также могут быть применены для решения задач идентификации типа упругой анизотропии материала [23].

1. СПЕКТР ТЕНЗОРА ЧЕТВЕРТОГО РАНГА

Предварительно имеет смысл остановиться на определении собственных чисел и собственных элементов тензоров четвертого ранга, так как связанные с ними понятия будут играть важную роль в дальнейшем изложении. Также еще раз отметим, что спектральная теория может быть положена в основу классификации симметрийных свойств анизотропных материалов.

Пусть $\{\mathbf{e}_i\} \subset \mathbb{E}_3$ – некоторый векторный базис; $\{\mathbf{e}^i\} \subset \mathbb{E}_3$ – сопряженный к нему, так что $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$, где $\delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – символ Кронекера. Будем использовать операцию «:» двойного скалярного произведения, определенную действием на тензоры $\mathbf{T} \in \mathbb{E}_3^r$ и $\mathbf{S} \in \mathbb{E}_3^p$ по следующему правилу

$$\begin{aligned} \mathbf{T}:\mathbf{S} &= T^{i_1 \ldots i_r}\mathbf{e}_{i_1}\ldots\mathbf{e}_{i_{r-2}}\left(\mathbf{e}_{i_{r-1}}\cdot\mathbf{e}_{j_1}\right)\left(\mathbf{e}_{i_r}\cdot\mathbf{e}_{j_2}\right)S^{j_1\ldots j_p}\mathbf{e}_{j_3}\ldots\mathbf{e}_{j_p} = \\ &= T^{i_1\ldots i_{r-1}i_r}S_{i_{r-1}i_r}^{\quad\ j_3\ldots j_p}\mathbf{e}_{i_1}\ldots\mathbf{e}_{i_{r-2}}\mathbf{e}_{j_3}\ldots\mathbf{e}_{j_p}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Отличие (1.1) от классического определения состоит в дополнительном транспонировании одной из двух базисных диад, участвующих в произведении.

Относительно операции «:» (1.1) пространство $\mathbb{E}_3^4$ (тензоров четвертого ранга) образует унитальную некоммутативную алгебру [24] с вторым изотропным тензором $\mathbf{C}_{II} = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j\mathbf{e}^i\mathbf{e}^j$ [14] в качестве «единичного» элемента: $\mathbf{C}_{II}:\mathbf{T} = \mathbf{T}:\mathbf{C}_{II} = \mathbf{T}$ для любого $\mathbf{T} \in \mathbb{E}_3^4$. Спектральная задача во введенной алгебре предполагает нахождение таких значений $T \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ – поле комплексных чисел), при которых тензор $T\mathbf{C}_{II} - \mathbf{T}$ является алгебраически необратимым. Данное условие эквивалентно тому, что уравнение (любое из приведенных)

$$\left(\mathbf{T} - T\mathbf{C}_{II}\right):\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \quad \left(\boldsymbol{\tau}:\left(\mathbf{T} - T\mathbf{C}_{II}\right) = \mathbf{0}\right) \tag{1.2}$$

относительно $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{E}_3^2$ имеет нетривиальные решения. Указанные значения T называются собственными числами тензора $\mathbf{T}$, а соответствующие им тензоры $\boldsymbol{\tau}$ – правыми (левыми) собственными тензорами. Формулировки спектральной задачи для тензоров упругих констант, аналогичные приведенной, рассматривались в работах [17-23].

Можно показать, что произвольный тензор $\mathbf{T} \in \mathbb{E}_3^4$ может иметь не более 9 различных собственных чисел $T_\alpha \in \mathbb{C}$, причем в случае главной симметрии (0.2) тензора $\mathbf{T}$, то есть при $T_{ijkl} = T_{klij}$, все они являются действительными: $T_a \in \mathbb{R}$ ($a = \overline{1,9}$). Соответствующие им правые и левые собственные элементы при этом совпадают и образуют ортогональную систему: $\boldsymbol{\tau}_a:\boldsymbol{\tau}_b = 0$ тогда и только тогда, когда $a \neq b$. Рассматриваемую далее систему будем полагать нормированной: $\boldsymbol{\tau}_a:\boldsymbol{\tau}_a = 1$. Таким образом, тензор, обладающий свойством главной симметрии, может быть представлен в виде (спектральное разложение)

$$\mathbf{T} = \sum_a T_a\boldsymbol{\tau}_a\boldsymbol{\tau}_a\,. \tag{1.3}$$

Группировкой собственных проекторов $\boldsymbol{\tau}_a\boldsymbol{\tau}_a$, стоящих при кратных собственных числах, формула (1.3) может быть приведена к виду (0.4).

Следует отметить, что если тензор $\mathbf{T} \in \mathbb{E}_3^4$ является полностью симметричным (0.3), то есть имеет компоненты, удовлетворяющие равенствам $T_{ijkl} = T_{ijlk} = T_{klij}$, то он имеет нулевое собственное число кратности 3. Такой тензор не может быть алгебраически обратимым, так как соответствующий ему линейный оператор $\mathbf{T}\left[\cdot\right] : \mathbb{E}_3^2 \to \mathbb{E}_3^2$, действующий по правилу $\mathbf{T}\left[\boldsymbol{\tau}\right] = \mathbf{T} : \boldsymbol{\tau}$, обладает нетривиальным ядром: $\ker \mathbf{T} = \left\{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{E}_3^2 \mid \boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{\tau}^\top\right\}$. Пространство $\mathbb{E}_3^2$ может быть разложено в прямую сумму линейных подпространств

$$\mathbb{E}_3^2 = \ker \mathbf{T} \oplus \mathbb{E}_3^{2\prime}, \tag{1.4}$$

где $\mathbb{E}_3^{2\prime} \subset \mathbb{E}_3^2$ – некоторое подпространство, однозначно определяемое данным разложением. Обозначим $\mathrm{im}\mathbf{T}$ – образ оператора $\mathbf{T}\left[\cdot\right]$. Оператор $\mathbf{T}'\left[\cdot\right] : \mathbb{E}_3^{2\prime} \to \mathrm{im}\mathbf{T}$, действующий по тому же, что и $\mathbf{T}\left[\cdot\right]$, правилу $\mathbf{T}'\left[\boldsymbol{\tau}\right] = \mathbf{T} : \boldsymbol{\tau}$, удовлетворяет условиям $\ker\mathbf{T}' = \left\{\mathbf{0}\right\}$ и $\mathrm{im}\mathbf{T}' = \mathrm{im}\mathbf{T}$, и, следовательно [25], является обратимым – в том числе алгебраически. Определяемый обратным отображением $\mathbf{T}'^{-1}\left[\cdot\right] : \mathrm{im}\mathbf{T} \to \mathbb{E}_3^{2\prime}$ тензор $\mathbf{T}'^{-1} \in \mathbb{E}_3^4$ будем называть *обобщенно обратным* к $\mathbf{T}$. Обобщенно обратный тензор обладает тем свойством, что

$$\mathbf{T}'^{-1} : \mathbf{T} : \boldsymbol{\tau} = \mathbf{T} : \mathbf{T}'^{-1} : \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} \tag{1.5}$$

для любого $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{E}_3^{2\prime}$, а его спектральное разложение имеет вид [26]

$$\mathbf{T}'^{-1} = \sum_{a \mid T_a \neq 0} T_a^{-1} \boldsymbol{\tau}_a \boldsymbol{\tau}_a . \tag{1.6}$$

2. МЕРА СИММЕТРИЙНОГО НЕСООТВЕТСТВИЯ

Вернемся к задаче симметрийной идентификации. Для удобства определим операцию «$*$», действующую на тензоры $\mathbf{T} \in \mathbb{E}_3^r$ и $\mathbf{S} \in \mathbb{E}_3^2$ по правилу

$$\mathbf{S} * \mathbf{T} = T^{i_1 \ldots i_r} \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{S} \cdot \mathbf{e}_{i_r} = S^{i_1}{}_{j_1} \ldots S^{i_r}{}_{j_r} T^{j_1 \ldots j_r} \mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{e}_{i_r} . \tag{2.1}$$

Также введем в рассмотрение операцию «$\circ$» полного скалярного произведения тензоров $\mathbf{T} \in \mathbb{E}_3^r$ и $\mathbf{S} \in \mathbb{E}_3^r$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \circ \mathbf{S} &= T^{i_1 \ldots i_r} \mathbf{e}_{i_1} \ldots \mathbf{e}_{i_r} \circ S^{j_1 \ldots j_r} \mathbf{e}_{j_1} \ldots \mathbf{e}_{j_r} = \\ &= T^{i_1 \ldots i_r} S^{j_1 \ldots j_r} \left(\mathbf{e}_{i_1} \cdot \mathbf{e}_{j_1}\right) \ldots \left(\mathbf{e}_{i_r} \cdot \mathbf{e}_{j_r}\right) = T^{i_1 \ldots i_r} S_{i_1 \ldots i_r} . \end{aligned} \tag{2.2}$$

Важно отметить, что произведение (2.2) порождает в пространстве $\mathbb{E}_3^r$ фробениусову норму [27]

$$\left\|\mathbf{T}\right\|_{\mathbb{E}_3^r} = \sqrt{\mathbf{T} \circ \mathbf{T}} = \sqrt{T^{i_1 \ldots i_r} T_{i_1 \ldots i_r}} \tag{2.3}$$

и позволяет рассматривать это пространство как гильбертово.

Если про тензор $\mathbf{\Pi} = \Pi_{ijkl} \mathbf{l}_i \mathbf{l}_j \mathbf{l}_k \mathbf{l}_l$ упругих констант, заданный своими компонентами Π_{ijkl} в ЛСК базисе $\left\{\mathbf{l}_i\right\}$, априори известно, что он принадлежит некоторому классу симметрии s, то при некотором наборе значений параметров $\left\{\Pi_\alpha^{(s)}\right\} \in \mathbb{R}^{\mathrm{A}^{(s)}}$ его можно представить в виде (0.4): $\mathbf{\Pi} = \Pi_\alpha^{(s)} \mathbf{K}_\alpha^{(s)}$, где полагаются известными значения компонент $K^{(s)}_{\alpha\ ijkl}$ тензора $\mathbf{K}^{(s)}_{\alpha} = K^{(s)}_{\alpha\ ijkl}\mathbf{k}_i\mathbf{k}_j\mathbf{k}_k\mathbf{k}_l$ в каноническом базисе $\{\mathbf{k}_i\}$. Обозначим $\tilde{\mathbf{K}}^{(s)}_{\alpha} = K^{(s)}_{\alpha\ ijkl}\mathbf{l}_i\mathbf{l}_j\mathbf{l}_k\mathbf{l}_l$. Тогда существует такое ортогональное преобразование $\mathbf{O} \in \mathbb{O}^{+}$, что выполняется равенство: $\mathbf{K}^{(s)}_{\alpha} = \mathbf{O} * \tilde{\mathbf{K}}^{(s)}_{\alpha}$. Таким образом, в рассматриваемом случае имеем: $\mathbf{\Pi} = \Pi^{(s)}_{\alpha}\mathbf{O} * \tilde{\mathbf{K}}^{(s)}_{\alpha}$.

Если тензор $\mathbf{\Pi}$ не может быть отнесен к рассматриваемому классу s, величина $\mathbf{\Psi}^{(s)} = \mathbf{\Pi} - \Pi^{(s)}_{\alpha}\mathbf{O} * \tilde{\mathbf{K}}^{(s)}_{\alpha}$ будет отлична от нуля при любых $\left\{\Pi^{(s)}_{\alpha}\right\} \in \mathbb{R}^{\mathrm{A}^{(s)}}$ и любом $\mathbf{O} \in \mathbb{O}^{+}$. В этом случае возникает вопрос, какой тензор симметрийного класса s является наилучшим (в некотором смысле) приближением тензора $\mathbf{\Pi}$. Для решения данного вопроса сформулируем следующую задачу минимизации:

Требуется найти набор параметров $\left\{\breve{\Pi}^{(s)}_{\alpha}\right\} \in \mathbb{R}^{\mathrm{A}^{(s)}}$ *и тензор* $\breve{\mathbf{O}} \in \mathbb{O}^{+}$, *доставляющие минимум целевой функции*

$$\Psi^{(s)}\left[\left\{\Pi^{(s)}_{\alpha}\right\}, \mathbf{O}\right] = \left\| \mathbf{\Pi} - \Pi^{(s)}_{\alpha}\mathbf{O} * \tilde{\mathbf{K}}^{(s)}_{\alpha} \right\|_{\mathbb{E}^4_3}. \tag{2.4}$$

Напомним, что система тензоров $\mathbf{K}^{(s)}_{\alpha} = \mathbf{O} * \tilde{\mathbf{K}}^{(s)}_{\alpha}$ полагается линейно независимой, так что линейная оболочка $\mathrm{span}\left\{\mathbf{O} * \tilde{\mathbf{K}}^{(s)}_{\alpha}\right\} = \left\{c_{\alpha}\mathbf{O} * \tilde{\mathbf{K}}^{(s)}_{\alpha} \mid c_{\alpha} \in \mathbb{R}\right\}$ образует гильбертово подпространство в $\mathbb{E}^4_3$, в котором для любого тензора $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{E}^4_3$ существует тензор $\breve{\mathbf{\Pi}}^{(s)}_{\mathbf{O}}$ (элемент наилучшего приближения), норма (2.3) разности которого с тензором $\mathbf{\Pi}$ минимальна [28]. Этот тензор имеет вид: $\breve{\mathbf{\Pi}}^{(s)}_{\mathbf{O}} = \breve{\Pi}^{(s)}_{\alpha\mathbf{O}}\mathbf{O} * \tilde{\mathbf{K}}^{(s)}_{\alpha}$, где коэффициенты $\breve{\Pi}^{(s)}_{\alpha\mathbf{O}}$ разложения однозначно определяются из невырожденной системы линейных алгебраических уравнений $\tilde{\mathbf{K}}^{(s)}_{\alpha} \circ \tilde{\mathbf{K}}^{(s)}_{\beta}\breve{\Pi}^{(s)}_{\alpha\mathbf{O}} = \mathbf{\Pi} \circ \left(\mathbf{O} * \tilde{\mathbf{K}}^{(s)}_{\beta}\right)$. Указанные коэффициенты, таким образом, являются непрерывными функциями компонент тензора $\mathbf{O}$. Так как компоненты данного тензора, в свою очередь, допускают выражение через непрерывные периодические функции трех аргументов, например, углов Эйлера [29], то существует такой тензор $\breve{\mathbf{O}} \in \mathbb{O}^{+}$, что при $\mathbf{O} = \breve{\mathbf{O}}$ функция $\Psi^{(s)}\left[\left\{\breve{\Pi}^{(s)}_{\alpha\mathbf{O}}\right\}, \mathbf{O}\right] = \left\| \mathbf{\Pi} - \breve{\Pi}^{(s)}_{\alpha\mathbf{O}}\mathbf{O} * \tilde{\mathbf{K}}^{(s)}_{\alpha} \right\|_{\mathbb{E}^4_3}$ достигает своего минимального значения [30]. Нетрудно видеть, что параметры $\breve{\Pi}^{(s)}_{\alpha} = \breve{\Pi}^{(s)}_{\alpha\breve{\mathbf{O}}}$ и $\breve{\mathbf{O}}$ дают решение задачи минимизации (2.4).

Величину $\breve{\Psi}^{(s)} = \left\| \breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)} \right\|_{\mathbb{E}^4_3}$, где $\breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)} = \mathbf{\Pi} - \breve{\mathbf{\Pi}}^{(s)}$, $\breve{\mathbf{\Pi}}^{(s)} = \breve{\Pi}^{(s)}_{\alpha}\breve{\mathbf{O}} * \tilde{\mathbf{K}}^{(s)}_{\alpha}$, будем называть *мерой несоответствия* (тензора $\mathbf{\Pi}$ симметрийному классу s). Про тензор $\breve{\mathbf{\Pi}}^{(s)}$ при этом будем говорить, что он является $\mathbb{E}^4_3$*-оптимальной аппроксимацией* (тензора $\mathbf{\Pi}$ в симметрийном классе s). Отметим, что, в частности, для всех компонент тензоров $\mathbf{\Pi}$ и $\breve{\mathbf{\Pi}}^{(s)}$ имеют место неравенства

$$\left| \Pi_{ijkl} - \breve{\Pi}^{(s)}_{ijkl} \right| \le \breve{\Psi}^{(s)}.$$

Меру несоответствия $\breve{\Psi}^{(s)}$ можно рассматривать как неотрицательную функцию $\breve{\Psi}^{(s)}[\cdot] : \mathbb{E}^4_3 \to \mathbb{R}$ тензорного аргумента, определенную равенством

$$\breve{\Psi}^{(s)}\left[\mathbf{\Pi}\right]=\inf_{\substack{\left\{\Pi_{\alpha}^{(s)}\right\}\in\mathbb{R}^{A^{(s)}}\\ \mathbf{O}\in\mathbb{O}^{+}}}\left\|\mathbf{\Pi}-\Pi_{\alpha}^{(s)}\mathbf{O}*\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha}^{(s)}\right\|_{\mathbb{E}_{3}^{4}}. \tag{2.5}$$

С учетом замечаний, сделанных по поводу задачи (2.4), значение этой функции равно нулю тогда и только тогда, когда тензор $\mathbf{\Pi}$ в точности соответствует классу симметрии s; в остальных случаях ее значение строго больше нуля. Можно доказать, что отображение (2.5) является непрерывным, поэтому существуют тензоры, «сколь угодно близкие» к симметрийным классам s. Это предоставляет возможность построения на основе меры несоответствия нечеткой классификации [31] симметрийных свойств, позволяющей относить исследуемый или проектируемый материал к некоторому классу симметрии с той или иной степенью точности.

Приведем постановку задачи (2.4) с учетом структуры наилучшего приближения в гильбертовом пространстве.

Требуется найти тензор $\breve{\mathbf{O}}\in\mathbb{O}^{+}$*, доставляющий минимум целевой функции*

$$\Psi^{(s)}\left[\mathbf{O}\right]=\left\|\mathbf{\Pi}-\breve{\Pi}_{\alpha\mathbf{O}}^{(s)}\mathbf{O}*\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha}^{(s)}\right\|_{\mathbb{E}_{3}^{4}}, \tag{2.6}$$

где

$$\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha}^{(s)}\circ\tilde{\mathbf{K}}_{\beta}^{(s)}\breve{\Pi}_{\alpha\mathbf{O}}^{(s)}=\mathbf{\Pi}\circ\left(\mathbf{O}*\tilde{\mathbf{K}}_{\beta}^{(s)}\right). \tag{2.7}$$

Следует отметить, что при вычислении меры несоответствия в классе изотропии отсутствует необходимость минимизации по параметру $\mathbf{O}\in\mathbb{O}^{+}$, так как все тензоры такого класса инварианты относительно ортогональных преобразований.

В случае, когда система базисных тензоров $\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha}^{(s)}$ ортонормирована относительно операции «$\circ$» (2.2), что, в частности, имеет место при использовании в качестве таких тензоров собственных (в смысле (1.2)) проекторов тензоров упругих констант, задачу (2.6)-(2.7) можно поставить в более простой форме:

Требуется найти тензор $\breve{\mathbf{O}}\in\mathbb{O}^{+}$*, доставляющий минимум целевой функции*

$$\Psi^{(s)}\left[\mathbf{O}\right]=\left\|\mathbf{\Pi}-\mathbf{\Pi}\circ\left(\mathbf{O}*\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha}^{(s)}\right)\left(\mathbf{O}*\tilde{\mathbf{K}}_{\alpha}^{(s)}\right)\right\|_{\mathbb{E}_{3}^{4}}. \tag{2.8}$$

Частный случай сформулированной задачи идентификации был рассмотрен в статье [32]. По существу, в ней оптимальное симметрийное приближение определялось не к заданному симметрийному классу, а к вполне определенному тензору из этого класса. Для решения такой задачи был предложен эффективный вычислительный алгоритм.

В заключение раздела отметим, что к проблеме идентификации могут быть применены и другие подходы, не предполагающие наличия в явном виде классифицирующей формулы типа (0.4). Возможным приемом является построение и исследование полной системы алгебраических $\mathbb{O}^{+}$-инвариантов [33] тензора упругих констант, однозначно определяющих свойства материала [17,34]. В работе [34] такая система, имеющая ясный механический смысл, но не являющаяся полиномиальной [35], предложена для полностью симметричного тензора. Отмечается [34,36], что требование полиномиальности инвариантов не является существенным для задач физики и механики.

Другой подход к задаче идентификации рассматривается в статьях [37-40]. Для определения класса симметрии и установления главных осей анизотропии

[41] материала предлагается использовать программу механических макроэкспериментов [37-39], не требующую знания всех упругих компонент в некотором базисе. Проводится компьютерное моделирование экспериментов по идентификации [40].

3. НЕВЯЗКА СИММЕТРИЙНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Использование различных симметрийных (в частности – изотропийной) аппроксимаций приводит к погрешностям в определяющих соотношениях, оценка величин которых представляет определенный интерес в численных расчетах. Некоторым вопросам, связанным с получением таких оценок, и посвящен данный раздел работы.

Рассмотрим материал, упругое деформирование которого описывается линейным законом (0.1)

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon},$$

и оценим величину нормы $\left\| \boldsymbol{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon} - \breve{\boldsymbol{\Pi}}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon} \right\|_{\mathbb{E}_3^2} = \left\| \breve{\boldsymbol{\Psi}}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon} \right\|_{\mathbb{E}_3^2}$ невязки возникающих напряжений при использовании вместо тензора $\boldsymbol{\Pi}$ исследуемого материала (определяемого, например, экспериментально) его $\mathbb{E}_3^4$-оптимальной симметрийной аппроксимации $\breve{\boldsymbol{\Pi}}^{(s)}$.

При получении оценок примем во внимание, что тензоры $\boldsymbol{\Pi}$ и $\breve{\boldsymbol{\Pi}}^{(s)}$ обладают главной симметрией, так что таковым является и тензор $\breve{\boldsymbol{\Psi}}^{(s)} = \boldsymbol{\Pi} - \breve{\boldsymbol{\Pi}}^{(s)}$. В этом случае $\breve{\boldsymbol{\Psi}}^{(s)}$ имеет действительный спектр, и может быть записано спектральное разложение (1.3): $\breve{\boldsymbol{\Psi}}^{(s)} = \sum_a \breve{\Psi}_a^{(s)} \breve{\boldsymbol{\psi}}_a^{(s)} \breve{\boldsymbol{\psi}}_a^{(s)}$, где $\breve{\Psi}_a^{(s)}$ – собственные числа тензора $\breve{\boldsymbol{\Psi}}^{(s)}$, а $\breve{\boldsymbol{\psi}}_a^{(s)}$ – соответствующие им собственные тензоры. Обозначим $\overline{\breve{\Psi}}^{(s)} = \max_a \left| \breve{\Psi}_a^{(s)} \right|$ и $\underline{\breve{\Psi}}^{(s)\prime} = \min_{a | \breve{\Psi}_a^{(s)} \neq 0} \left| \breve{\Psi}_a^{(s)} \right|$ – соответственно максимальный и ненулевой минимальный модули собственных чисел тензора $\breve{\boldsymbol{\Psi}}^{(s)}$. Обобщенно обратный к $\breve{\boldsymbol{\Psi}}^{(s)}$ тензор будем обозначать $\breve{\boldsymbol{\Psi}}^{(s)\prime -1}$. Также нам понадобится определение операторной нормы в пространстве $\mathbb{E}_3^4$

$$\left\| \mathbf{T} \right\| = \sup_{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{E}_3^2 \setminus \{\mathbf{0}\}} \frac{\left\| \mathbf{T} : \boldsymbol{\tau} \right\|_{\mathbb{E}_3^2}}{\left\| \boldsymbol{\tau} \right\|_{\mathbb{E}_3^2}}. \tag{3.1}$$

Используя известные соотношения между нормами, для всех $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{E}_3^2$ можно записать

$$\left\| \breve{\boldsymbol{\Psi}}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon} \right\|_{\mathbb{E}_3^2} \le \left\| \breve{\boldsymbol{\Psi}}^{(s)} \right\| \left\| \boldsymbol{\varepsilon} \right\|_{\mathbb{E}_3^2} = \overline{\breve{\Psi}}^{(s)} \left\| \boldsymbol{\varepsilon} \right\|_{\mathbb{E}_3^2}, \tag{3.2}$$

причем стоящее слева неравенство обращается в равенство при деформациях $\boldsymbol{\varepsilon} = \overline{\breve{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(s)}$ вида

$$\overline{\breve{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(s)} = \sum_{a | \breve{\Psi}_a^{(s)} = \overline{\breve{\Psi}}^{(s)}} c_a \breve{\boldsymbol{\psi}}_a^{(s)}, \quad c_a \in \mathbb{R}.$$

Из оценки (3.2) непосредственно следуют ограничения на значения компонент тензоров $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon}$ и $\breve{\boldsymbol{\sigma}}^{(s)} = \breve{\boldsymbol{\Pi}}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}$ (рассчитываемых соответственно по аппроксимируемому и аппроксимирующему тензорам упругих констант $\mathbf{\Pi}$ и $\breve{\mathbf{\Pi}}^{(s)}$)

$$\left|\sigma_{ij} - \breve{\sigma}_{ij}^{(s)}\right| \leq \bar{\breve{\Psi}}^{(s)} \left\|\boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}.$$

Так как для норм $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{E}_3^4}$ справедливо соотношение

$$\left\|\breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)}\right\| = \sqrt{\left(\bar{\breve{\Psi}}^{(s)}\right)^2} \leq \sqrt{\sum_a \left(\breve{\Psi}_a^{(s)}\right)^2} = \left\|\breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)}\right\|_{\mathbb{E}_3^4},$$

где знак равенства имеет место тогда и только тогда, когда $\breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)}$ обладает единственным ненулевым собственным числом $\breve{\Psi}_1^{(s)}$ кратности 1, то мера несоответствия $\breve{\Psi}^{(s)} = \left\|\breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)}\right\|_{\mathbb{E}_3^4}$ дает более грубую, чем операторная норма (3.1), верхнюю оценку

$$\left\|\breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2} \leq \breve{\Psi}^{(s)} \left\|\boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}.$$

По аналогии с (3.2) можно показать, что для всех $\boldsymbol{\varepsilon} \in \breve{\mathbb{E}}_3^{2(s)\prime}$, где $\breve{\mathbb{E}}_3^{2(s)\prime}$ определяется из прямой суммы (1.4): $\mathbb{E}_3^2 = \breve{\mathbb{E}}_3^{2(s)\prime} + \ker \breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)}$, выполнено

$$\left\|\breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2} \geq \left\|\breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)\prime-1}\right\|^{-1} \left\|\boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2} = \underline{\breve{\Psi}}^{(s)\prime} \left\|\boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}; \tag{3.3}$$

при этом равенство достигается на деформациях $\boldsymbol{\varepsilon} = \underline{\breve{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(s)}$ следующего класса

$$\underline{\breve{\boldsymbol{\varepsilon}}}^{(s)} = \sum_{a \mid \breve{\Psi}_a^{(s)} = \underline{\breve{\Psi}}^{(s)}} c_a \breve{\boldsymbol{\psi}}_a^{(s)}, \quad c_a \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что в (3.3) мы ограничиваемся рассмотрением только таких тензоров $\boldsymbol{\varepsilon}$, для которых $\breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$ при $\boldsymbol{\varepsilon} \neq \mathbf{0}$. Другими словами, определяем минимально возможную по норме разность откликов среди всех нетривиальных.

Неравенства (3.2) и (3.3) являются оценками абсолютной погрешности $\left\|\breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}$ симметрийной аппроксимации в классе s. Определенный интерес представляет также получение оценок для относительной погрешности $\dfrac{\left\|\breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}}{\left\|\mathbf{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}}$. Малое значение указанной погрешности может служить основанием для отнесения материала к соответствующему классу симметрии. Пусть Π_a и $\boldsymbol{\pi}_a$ – соответственно собственные числа и собственные элементы тензора $\mathbf{\Pi}$. Обозначим $\bar{\Pi} = \max\limits_a \left|\Pi_a\right|$, $\underline{\Pi}' = \min\limits_{a \mid \Pi_a \neq 0} \left|\Pi_a\right|$ и введем в рассмотрение обобщенно обратный к $\mathbf{\Pi}$ тензор $\mathbf{\Pi}'^{-1}$.

С учетом (1.5) из (3.2) для всех $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{E}_3^2 \setminus \ker \mathbf{\Pi}$ имеем следующую верхнюю оценку

$$\frac{\left\|\breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}}{\left\|\mathbf{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}} \leq \frac{\bar{\breve{\Psi}}^{(s)}}{\underline{\Pi}'}. \tag{3.4}$$

Отметим, что, используя соотношения между нормами $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{\mathbb{E}_3^4}$, неравенство (3.4) можно усилить

$$\frac{\left\|\breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}}{\left\|\mathbf{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}} \leq \bar{\breve{\Psi}}^{(s)} \left\|\mathbf{\Pi}'^{-1}\right\|_{\mathbb{E}_3^4}.$$

Выражение для нижней оценки следует из (3.3). При всех $\boldsymbol{\varepsilon} \in \breve{\mathbb{E}}_3^{2(s)\prime} \setminus \ker \mathbf{\Pi}$ получим

$$\frac{\left\|\breve{\mathbf{\Psi}}^{(s)} : \boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}}{\left\|\mathbf{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}} \geq \frac{\underline{\breve{\Psi}}^{(s)\prime}}{\bar{\Pi}}. \tag{3.5}$$

В примерах, которые будут рассмотрены далее, строятся оценки для случая изотропийной аппроксимации $\breve{\mathbf{\Pi}}^{(iso)}$ тензора упругих констант $\mathbf{\Pi}$, принадлежащего некоторому известному классу симметрии. Канонический $\{\mathbf{k}_i\}$ и ЛСК $\{\mathbf{l}_i\}$ базисы материала в каждом из рассматриваемых примеров полагаются совпадающими. В рамках соотношений симметричной теории упругости рассматриваются только полностью симметричные тензоры упругих констант, так что $\ker \mathbf{\Pi} = \{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_2\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_3\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_3\mathbf{k}_2\}$; для записи дистрибутивов их компонент используется нотация Фойгта [42]. В частности, структура тензора $\breve{\mathbf{\Pi}}^{(iso)}$ имеет вид

$$\left\{\breve{\Pi}_{ijkl}^{(iso)}\right\} = \begin{pmatrix} \breve{\Pi}_{1122}^{(iso)} + 2\breve{\Pi}_{1212}^{(iso)} & \breve{\Pi}_{1122}^{(iso)} & \breve{\Pi}_{1122}^{(iso)} & 0 & 0 & 0 \\ \breve{\Pi}_{1122}^{(iso)} & \breve{\Pi}_{1122}^{(iso)} + 2\breve{\Pi}_{1212}^{(iso)} & \breve{\Pi}_{1122}^{(iso)} & 0 & 0 & 0 \\ \breve{\Pi}_{1122}^{(iso)} & \breve{\Pi}_{1122}^{(iso)} & \breve{\Pi}_{1122}^{(iso)} + 2\breve{\Pi}_{1212}^{(iso)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \breve{\Pi}_{1212}^{(iso)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \breve{\Pi}_{1212}^{(iso)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \breve{\Pi}_{1212}^{(iso)} \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

3.1. Изотропийная аппроксимация материала с кубической симметрией свойств.

Пусть рассматриваемый упруго деформируемый материал имеет кубическую симметрию упругих свойств. Тензор $\mathbf{\Pi}$ его упругих констант записывается следующим образом (здесь и далее – в базисе $\{\mathbf{l}_i\} = \{\mathbf{k}_i\}$)

$$\left\{\Pi_{ijkl}\right\} = \begin{pmatrix} \Pi_{1111} & \Pi_{1122} & \Pi_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{1122} & \Pi_{1111} & \Pi_{1122} & 0 & 0 & 0 \\ \Pi_{1122} & \Pi_{1122} & \Pi_{1111} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Pi_{1212} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{1212} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Pi_{1212} \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что упругие константы $\mathbb{E}_3^4$-оптимального изотропийного приближения $\mathbf{\Pi}^{(iso)}$ такого тензора определяются равенствами

$$\breve{\Pi}_{1122}^{(iso)} = \frac{1}{5}\left(\Pi_{1111} + 4\Pi_{1122} - 2\Pi_{1212}\right), \quad \breve{\Pi}_{1212}^{(iso)} = \frac{1}{5}\left(\Pi_{1111} - \Pi_{1122} + 3\Pi_{1212}\right).$$

Решение спектральной задачи для тензора $\breve{\mathbf{\Psi}}^{(iso)} = \mathbf{\Pi} - \breve{\mathbf{\Pi}}^{(iso)}$ приведено в таблице 3.1, где через $\mathbf{I}$ обозначен единичный (метрический) тензор пространства $\mathbb{E}_3^2$.

Таблица 3.1.

Спектральные характеристики тензора $\breve{\mathbf{\Psi}}^{(iso)}$ для кубически симметричного материала.

Собственные числа	Собственные тензоры
$\breve{\Psi}_{1,2,3,4}^{(iso)} = 0$	$\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_2\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_3\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_3\mathbf{k}_2$, $\mathbf{I}$
$\breve{\Psi}_{5,6,7}^{(iso)} = -\dfrac{2}{5}\left(\Pi_{1111} - \Pi_{1122} - 2\Pi_{1212}\right)$	$\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_2\mathbf{k}$, $\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_2$
$\breve{\Psi}_{8,9}^{(iso)} = \dfrac{3}{5}\left(\Pi_{1111} - \Pi_{1122} - 2\Pi_{1212}\right)$	$\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3\mathbf{k}_3$, $\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{k}_2$

Из приведенного решения следует, что для малых упругих деформаций $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon\mathbf{I}, \varepsilon \in \mathbb{R}$ объемного расширения/сжатия выполнено $\breve{\mathbf{\Pi}}^{(iso)} : \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon}$, то есть соответствующий таким деформациям отклик будет тем же при использовании вместо тензора $\mathbf{\Pi}$ его $\mathbb{E}_3^4$-оптимальной изотропной аппроксимации $\breve{\mathbf{\Pi}}^{(iso)}$.

Принимая во внимание, что в нетривиальном случае выполнено $\left|\breve{\Psi}_{5,6,7}^{(iso)}\right| > \left|\breve{\Psi}_{8,9}^{(iso)}\right|$, можно записать

$$\overline{\breve{\Psi}}^{(iso)} = \max_a \left|\breve{\Psi}_a^{(iso)}\right| = \left|\breve{\Psi}_{5,6,7}^{(iso)}\right|, \quad \underline{\breve{\Psi}}^{(iso)\prime} = \min_{a|\breve{\Psi}_a^S \neq 0} \left|\breve{\Psi}_a^{(iso)}\right| = \left|\breve{\Psi}_{8,9}^{(iso)}\right|.$$

Таким образом, в (3.2) для всех $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{E}_3^2$ имеем

$$\left\|\mathbf{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon} - \breve{\mathbf{\Pi}}^{(iso)} : \boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2} \le \frac{3}{5}\left|\Pi_{1111} - \Pi_{1122} - 2\Pi_{1212}\right| \left\|\boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2},$$

где знак равенства имеет место для тензоров $\boldsymbol{\varepsilon} \in \operatorname{span}\left\{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_2\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_1\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_2\right\}$, соответствующих в случае малых упругих деформаций всевозможным сдвигам в плоскостях упругой симметрии.

С другой стороны, как следует из (3.3), для всех $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{E}_3^{2(iso)\prime}$

$$\left\|\mathbf{\Pi} : \boldsymbol{\varepsilon} - \breve{\mathbf{\Pi}}^{(iso)} : \boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2} \ge \frac{2}{5}\left|\Pi_{1111} - \Pi_{1122} - 2\Pi_{1212}\right| \left\|\boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}.$$

Здесь равенство достигается на тензорах $\boldsymbol{\varepsilon} \in \operatorname{span}\left\{\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3\mathbf{k}_3, \mathbf{k}_1\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{k}_2\right\}$, описывающих малые упругие изохорические деформации растяжения-сжатия вдоль осей симметрии 4-го порядка.

Собственные числа тензора $\mathbf{\Pi}$ в данном случае определяются равенствами $\Pi_{1,2,3} = 0$, $\Pi_{4,5} = \Pi_{1111} - \Pi_{1122}$, $\Pi_6 = \Pi_{1111} + 2\Pi_{1122}$, $\Pi_{7,8,9} = 2\Pi_{1212}$, так что

$$\overline{\Pi} = \max_a \left|\Pi_a\right| = \max\left\{\Pi_6, \Pi_{7,8,9}\right\}, \quad \underline{\Pi} = \min_{a|\Pi_a \neq 0} \left|\Pi_a\right| = \min\left\{\Pi_{4,5}, \Pi_{7,8,9}\right\}.$$

Подставляя найденные значения в (3.4), получим верхнюю оценку относительной погрешности. Для всех $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{E}_3^2 \setminus \ker \mathbf{\Pi}$ справедливо неравенство

$$\frac{\left\|\mathbf{\Pi}:\boldsymbol{\varepsilon}-\breve{\mathbf{\Pi}}^{(iso)}:\boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}}{\left\|\mathbf{\Pi}:\boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}}\leq\frac{3\left|\Pi_{1111}-\Pi_{1122}-2\Pi_{1212}\right|}{5\min\left\{\Pi_{1111}-\Pi_{1122},2\Pi_{1212}\right\}}.$$

Для нижней оценки (3.5) имеем при любом $\boldsymbol{\varepsilon}\in\mathbb{E}_3^{2(iso)\prime}\setminus\ker\mathbf{\Pi}$

$$\frac{\left\|\mathbf{\Pi}:\boldsymbol{\varepsilon}-\breve{\mathbf{\Pi}}^{(iso)}:\boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}}{\left\|\mathbf{\Pi}:\boldsymbol{\varepsilon}\right\|_{\mathbb{E}_3^2}}\geq\frac{2\left|\Pi_{1111}-\Pi_{1122}-2\Pi_{1212}\right|}{5\max\left\{\Pi_{1111}+2\Pi_{1122},2\Pi_{1212}\right\}}.$$

Для монокристалла меди, имеющего гранецентрированную кубическую кристаллическую решетку с упругими константами (ГПа) $\Pi_{1111}=168.4,\Pi_{1122}=121.4,\Pi_{1212}=75.4$, численные значения рассмотренных параметров оказываются следующими (ГПа): $\breve{\Pi}_{1122}^{(iso)}=100.64$, $\breve{\Pi}_{1212}^{(iso)}=50.64$; $\breve{\Psi}_{5,6,7}^{(iso)}=41.52$, $\breve{\Psi}_{8,9}^{(iso)}=-62.28$. Мера несоответствия при этом равна (ГПа) $\breve{\Psi}^{(iso)}=113.71$. Оценки относительной погрешности дают $\dfrac{\bar{\bar{\breve{\Psi}}}^{(iso)}}{\underline{\Pi}'}=1.33$, $\dfrac{\underline{\breve{\Psi}}^{(iso)\prime}}{\bar{\bar{\Pi}}}=0.1$.

3.2. Изотропийная аппроксимация материала с трансверсальной изотропией свойств.

Пусть теперь материал имеет трансверсальную изотропию упругих свойств, так что тензор $\mathbf{\Pi}$ его упругих констант имеет вид

$$\left\{\Pi_{ijkl}\right\}=\begin{pmatrix}\Pi_{1111}&\Pi_{1122}&\Pi_{1133}&0&0&0\\ \Pi_{1122}&\Pi_{1111}&\Pi_{1133}&0&0&0\\ \Pi_{1133}&\Pi_{1133}&\Pi_{3333}&0&0&0\\ 0&0&0&\Pi_{2323}&0&0\\ 0&0&0&0&\Pi_{2323}&0\\ 0&0&0&0&0&\frac{1}{2}\left(\Pi_{1111}-\Pi_{1122}\right)\end{pmatrix}.$$

Упругие константы $\mathbb{E}_3^4$-оптимального изотропийного приближения $\breve{\mathbf{\Pi}}^{(iso)}$ такого тензора могут быть выражены следующими равенствами

$$\breve{\Pi}_{1122}^{(iso)}=\frac{1}{15}\left(\Pi_{1111}+5\Pi_{1122}+8\Pi_{1133}-4\Pi_{2323}+\Pi_{3333}\right),$$

$$\breve{\Pi}_{1212}^{(iso)}=\frac{1}{30}\left(7\Pi_{1111}-5\Pi_{1122}-4\Pi_{1133}+12\Pi_{2323}+2\Pi_{3333}\right).$$

В данном случае матричная структура тензора $\breve{\mathbf{\Psi}}^{(iso)}=\mathbf{\Pi}-\breve{\mathbf{\Pi}}^{(iso)}$ оказывается той же, что и у $\mathbf{\Pi}$. Его спектральные характеристики представлены в таблице 3.2, где ненулевые независимые компоненты тензора $\breve{\mathbf{\Psi}}^{(iso)}$ определяются формулами

$$\breve{\Psi}_{1111}^{(iso)}=\frac{1}{15}\left(7\Pi_{1111}-4\Pi_{1133}-8\Pi_{2323}-3\Pi_{3333}\right),$$

$$\breve{\Psi}_{1122}^{(iso)}=\frac{1}{15}\left(-\Pi_{1111}+10\Pi_{1122}-8\Pi_{1133}+4\Pi_{2323}-\Pi_{3333}\right),$$

$$\breve{\Psi}^{(iso)}_{1133} = \frac{1}{15}\left(-\Pi_{1111} - 5\Pi_{1122} + 7\Pi_{1133} + 4\Pi_{2323} - \Pi_{3333}\right),$$

$$\breve{\Psi}^{(iso)}_{2323} = \frac{1}{30}\left(-7\Pi_{1111} + 5\Pi_{1122} + 4\Pi_{1133} + 18\Pi_{2323} - 2\Pi_{3333}\right),$$

$$\breve{\Psi}^{(iso)}_{3333} = \frac{4}{15}\left(-2\Pi_{1111} - \Pi_{1133} - 2\Pi_{2323} + 3\Pi_{3333}\right).$$

Таблица 3.2.

Спектральные характеристики тензора $\breve{\mathbf{\Psi}}^{(iso)}$ для трансверсально изотропного материала.

Собственные числа	Собственные тензоры
$\breve{\Psi}^{(iso)}_{1,2,3} = 0$	$\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_2\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_1\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_3\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_3\mathbf{k}_2$
$\breve{\Psi}^{(iso)}_{4,5} = \breve{\Psi}^{(iso)}_{1111} - \breve{\Psi}^{(iso)}_{1122}$	$\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_2\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_1\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2\mathbf{k}_2$
$\breve{\Psi}^{(iso)}_{6,7} = 2\breve{\Psi}^{(iso)}_{2323}$	$\mathbf{k}_1\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_1,\ \mathbf{k}_2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_2$
$\breve{\Psi}^{(iso)}_{8} = \frac{1}{2}\left(\breve{\Psi}^{(iso)}_{1111} + \breve{\Psi}^{(iso)}_{1122} + \breve{\Psi}^{(iso)}_{3333}\right) - \sqrt{2\breve{\Psi}^{(iso)2}_{1133} + \frac{1}{4}\left(\breve{\Psi}^{(iso)}_{1111} + \breve{\Psi}^{(iso)}_{1122} - \breve{\Psi}^{(iso)}_{3333}\right)^2}$	$\frac{\breve{\Psi}^{(iso)}_{8} - \breve{\Psi}^{(iso)}_{3333}}{2\breve{\Psi}^{(iso)}_{1133}}\left(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2\mathbf{k}_2\right) + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_3$
$\breve{\Psi}^{(iso)}_{9} = \frac{1}{2}\left(\breve{\Psi}^{(iso)}_{1111} + \breve{\Psi}^{(iso)}_{1122} + \breve{\Psi}^{(iso)}_{3333}\right) + \sqrt{2\breve{\Psi}^{(iso)2}_{1133} + \frac{1}{4}\left(\breve{\Psi}^{(iso)}_{1111} + \breve{\Psi}^{(iso)}_{1122} - \breve{\Psi}^{(iso)}_{3333}\right)^2}$	$\frac{\breve{\Psi}^{(iso)}_{9} - \breve{\Psi}^{(iso)}_{3333}}{2\breve{\Psi}^{(iso)}_{1133}}\left(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2\mathbf{k}_2\right) + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_3$

Сравнение величин представленных собственных чисел в общем случае видится затруднительным. В частном случае, когда в качестве материала рассматривается монокристалл альфа-титана, имеющий гексагональную плотноупакованную решетку с упругими константами (ГПа) $\Pi_{1111} = 162.4, \Pi_{1122} = 92, \Pi_{1133} = 69, \Pi_{2323} = 46.7, \Pi_{3333} = 180.7$, параметры оценок принимают следующие значения (ГПа): $\breve{\Pi}^{(iso)}_{1122} = 77.89$, $\breve{\Pi}^{iso}_{1212} = 44.09$; $\breve{\Psi}^{(iso)}_{4,5} = -17.77$, $\breve{\Psi}^{(iso)}_{6,7} = 5.23$, $\breve{\Psi}^{(iso)}_{8} = -0.19$, $\breve{\Psi}^{(iso)}_{9} = 25.29$. Таким образом, для верхней оценки (3.2) имеем $\overline{\breve{\Psi}}^{(iso)} = \left|\breve{\Psi}^{(iso)}_{9}\right| = 25.29$; для нижней (3.3) – $\underline{\breve{\Psi}}^{(iso)\prime} = \left|\breve{\Psi}^{(iso)}_{8}\right| = 0.19$. Равенства в получаемых оценках достигаются соответственно на малых деформациях $\boldsymbol{\varepsilon} \in \operatorname{span}\left\{0.83\left(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2\mathbf{k}_2\right) + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_3\right\}$ (растяжение/сжатие вдоль оси симметрии 6-го порядка и пропорциональное равноосное растяжение/сжатие в плоскости изотропии) и $\boldsymbol{\varepsilon} = \operatorname{span}\left\{-0.6\left(\mathbf{k}_1\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2\mathbf{k}_2\right) + \mathbf{k}_3\mathbf{k}_3\right\}$ (растяжение/сжатие вдоль оси симметрии 6-го порядка и пропорциональное равноосное сжатие/растяжение в плоскости изотропии). Значение меры несоответствия для приведенных данных оказывается равным (ГПа) $\breve{\Psi}^{(iso)} = 36.41$. Относительная погрешность оценивается величинами: $\frac{\overline{\breve{\Psi}}^{(iso)}}{\underline{\Pi}'} = 0.36$, $\frac{\underline{\breve{\Psi}}^{(iso)\prime}}{\overline{\Pi}} = 0.0006$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследованы вопросы, связанные с проблемой установления симметрии свойств упругих анизотропных материалов. Рассмотрена задача идентификации класса симметрии, предполагающая наличие значений всех компонент тензора упругих констант в некотором базисе. Для ее решения предложен подход, основанный на построении семейств гильбертовых подпространств тензоров с заданными симметрийными свойствами и последующем определении в них оптимальных проекций идентифицируемого тензора.

В ходе решения задачи определена непрерывная функция, характеризующая величину несоответствия тензора-аргумента заданному классу симметрии. Предлагается использовать данную функцию в различных теоретических и прикладных задачах для построения критерия принадлежности свойств исследуемого тензора рассматриваемому симметрийному классу. Введено понятие симметрийной аппроксимации тензора упругих констант; получены оценки невязки при ее использовании в упругом линейном законе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михеев В.А., Зайцев В.М.* Анизотропные материалы. Учебное пособие. – Самара: Самар. гос. аэрокосм. ун-т, 2012. – 79 с.
2. *Трусов П.В., Келлер И.Э.* Теория определяющих соотношений: Курс лекций. Ч. 1. Общая теория. – Пермь: Перм. гос. тех. ун-т, 2006. – 173 с.
3. *Трусделл К.* Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
4. *Ляв А.* Математическая теория упругости. – М.-Л.: ОНТИ НКТП СССР, 1935. – 674 с.
5. *Curnier A.* Computational methods in solid mechanics. – Netherlands: Springer, 1994. – 404 p.
6. *Трусов П.В., Волегов П.С., Янц А.Ю.* Несимметричная физическая теория пластичности для описания эволюции микроструктуры поликристаллов // Физическая мезомеханика. – 2011. – №1. – С.19-31.
7. *Трусов П.В., Нечаева Е.С., Швейкин А.И.* Применение несимметричных мер напряженного и деформированного состояния при построении многоуровневых конститутивных моделей материалов // Физическая мезомеханика. – 2013.– №2. – С.15-31.
8. *Трусов П.В.* О несимметричных мерах напряженного и деформированного состояния и законе Гука // Вестник Пермского национального исследовательского университета. Механика. – 2014. – №2. – С.220-237.
9. *Hayes M.A.* A simple statical approach to the measurement of the elastic constants in anisotropic media // J. of Materials Science. – 1969. – Vol.4. – P.10-14.
10. *Norris A.N.* On the acoustic determination of the elastic moduli of anisotropic solids and acoustic conditions for the existence of symmetry planes // The Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics. – 1989. – Vol.42. – Pt.3. – P.413-426.
11. *Цвелодуб И.Ю.* К определению упругих характеристик однородных анизотропных тел // Прикладная механика и техническая физика. – 1994. – Т.35. – №3. – С.145-149.
12. *Трусов П.В., Дударь О.И., Келлер И.Э.* Тензорные алгебра и анализ. – Пермь: РИО ПГТУ, 1998. – 131 с.

13. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* Теория пластичности. – Пермь: Изд-во ПНИПУ, 2011. – 419 с.
14. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* Многоуровневые физические модели моно- и поликристаллов. Статистические модели // Физическая мезомеханика. – 2011. – Т.14. – №4. – С.17-28.
15. *Трусов П.В., Швейкин А.И.* Многоуровневые физические модели моно- и поликристаллов. Прямые модели // Физическая мезомеханика. – 2011. – Т.14. – №5. – С.5-30.
16. *Христич Д.В.* Критерий экспериментальной идентификации ромбического, моноклинного и триклинного материалов // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2013. – №3. – С.166-178.
17. *Рыхлевский Я.* О законе Гука // Прикладная математика и механика. – 1984. – Т.48. – №3. – С.420-435.
18. *Минкевич Л.М.* Представление тензоров упругости и податливости через собственные тензоры // Вопросы динамики механических систем виброударного действия. – Новосибирск: Новосиб. электротехн. ин-т, 1973. – С.107-110.
19. *Остросаблин Н.И.* О структуре тензора модулей упругости. Собственные упругие состояния // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отделение. Ин-т гидродинамики. – 1984. – №66. – С.113-125.
20. *Остросаблин Н.И.* О классификации анизотропных материалов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отделение. Ин-т гидродинамики. – 1985. – №71. – С.82-96.
21. *Остросаблин Н.И.* Собственные модули упругости и состояния для материалов кристаллографических сингоний // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отделение. Ин-т гидродинамики. – 1986. – №75. – С.113-125.
22. *Sutcliffe S.* Spectral decomposition of the elasticity tensor // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1992. – Vol.59. – N4. – P.762-773.
23. *Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И.* Анизотропия упругих свойств материалов // ПМТФ. – 2008. – Т.49. – №6. – С.131-151.
24. *Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V.* Algebras, Rings and Modules. Vol.1. – Dordrecht: Kluwer, 2004. – 380 p.
25. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
26. *Глазман И.М., Любич Ю.И.* Конечномерный линейный анализ в задачах. – М.: Наука, 1969. – 476 с.
27. *Тыртышников Е.Е.* Матрицы, тензоры, вычисления. – М.: МГУ им.М.В.Ломоносова, 2013. – 42 с.
28. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. – М.: Наука,1987. – 600 с.
29. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 824 с.
30. *Кутузов А.С.* Метрические пространства: Учебное пособие – Троицк, 2012. – 104 с.
31. *Гитман М.Б.* Введение в теорию нечетких множеств и интервальную математику. – Пермь: РИО ПГТУ, 1998. – 44 с.
32. *Аннин Б.Д., Смирнов С.В., Анненков В.А.* Идентификация анизотропных материалов // Проблемы механики деформируемого твердого тела: Межвуз. сб. – СПб.: Изд-во С.-Петерб. гос. ун-та, 2002. – С.21-28.

33. *Гуревич Г.Б.* Основы теории алгебраических инвариантов. – М.: Гостехтеоретиздат, 1948. – 408 с.
34. *Остросаблин Н.И.* Об инвариантах тензора четвертого ранга модулей упругости // Сиб. журн. индустр. математики. – 1998. – Т.1. – №1. – С.155-163.
35. *Spenser A.J.M.* Isotropic polinomial invariants and tensor functions // In: Applications of tensor functions in solid mechanics. – Springer-Verlag: Wien, New York, 1987. – P.141-169.
36. *Жилин П.А.* Модифицированная теория симметрии тензоров и тензорных инвариантов // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2003. – С.176-195.
37. *Христич Д.В.* Критерий экспериментальной идентификации изотропного и кубического материалов // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2012. – №3. – С.110-118.
38. *Христич Д.В.* Критерий экспериментальной идентификации гексагонального, тригонального и тетрагонального материалов // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2013. – №2. – С.67-72.
39. *Христич Д.В.* К вопросу об определении главных осей анизотропии материала // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2014. – №2. – С.203-213.
40. *Христич Д.В.* Компьютерное моделирование экспериментов по определению типа начальной анизотропии упругих материалов // Известия ТулГУ. Естественные науки. – 2014. – №4. – С.110-119.
41. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 371 с.
42. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов. – М.: Мир, 1967. – 385 с.

Поступила в редакцию 4 декабря 2015 года.

Сведения об авторах:

Остапович Кирилл Вадимович – магистрант, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия; e-mail: ostkirvad@gmail.com

Трусов Петр Валентинович – д.ф.-м.н., проф., зав. кафедрой Математического моделирования систем и процессов, Пермский национальный исследовательский политехнический университет, г. Пермь, Россия; e-mail: tpv@matmod.pstu.ac.ru