УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ ПЛОСКОГО СОСТАВНОГО КЛИНА, ОДНА ИЗ ОБРАЗУЮЩИХ КОТОРОГО СКОЛЬЗИТ БЕЗ ТРЕНИЯ ВДОЛЬ ЖЕСТКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.

Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия

АННОТАЦИЯ

Проводится исследование напряженно деформированного состояния (НДС) в вершине плоского клина, составленного из двух изотропных упругих элементов. Одна из образующих клина скользит без трения вдоль жесткой поверхности, а другая воспринимает поверхностную нагрузку. Допускается также нагрузка путем изменения температуры конструкции. Используется свойство особых точек, заключающееся в избыточности количества задаваемых в них ограничений на параметры состояния. Такие ограничения записываются системой линейных неоднородных уравнений. Изучаются свойства решений этой системы. Выявляются сочетания геометрических и материальных параметров, при которых особая точка теряет свой статус. Обнаруживаются критические зависимости между параметрами конструкции и нагрузки, обусловливающие несовместность алгебраических равенств, которая служит причиной сингулярного поведения НДС вблизи вершины клина. Формулируются ограничения на нагрузку, обеспечивающие ее согласованность с ограничениями в особой точке.

Ключевые слова: составные конструкции; критическое сочетание параметров; особые точки; концентрация напряжений, сингулярное поведение

THE STRESS STATE NEAR THE TOP OF THE FLAT COMPOSITE WEDGE, ONE FORMING OF WHICH SLIDES ALONG A RIGID SURFACE WITHOUT FRICTION

Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V.

Perm State University, Perm, Russia

ABSTRACT

Deformable structures containing elements in the form of plane wedge and subjected to a temperature or surface load are investigated. The wedge is composed of two isotropic elastic elements. One forming of it slides without friction along the rigid surface. The other forming is loaded. The research is based on the deducing of algebraic equations, that are set directly at the specific point (wedge top). Specific points have the distinctive feature – restrictions redundancy on the state parameters. They represent a system of linear inhomogeneous equations. The properties of this system are studied. Combinations of geometric and material parameters at which a singular point loses its status are identified. Dependencies between design parameters and loads, that causes the incompatibility of the equations, what leads to a singular stress state near the wedge top are detected. Load limitations, ensuring its coherence with all the restrictions at the singular point, are formulated.

Keywords: composite structure; a critical combination of parameters; singular points; stress concentration, singular behavior

ВВЕДЕНИЕ

Исследованию напряженного состояния вблизи особых точек однородных и составных тел (вершин трещин, плоских клиньев, конусов, окрестностей пространственных ребер и т.п.) посвящено значительное число публикаций [1-12 и др.], так как такие особенности элементов конструкций являются потенциальными концентраторами напряжений, что и привлекает исследователей. Аналитические исследования объединяет то, что в них не рассматривается напряженно-деформированное состояния (НДС) непосредственно в особой точке. Обычно авторы помещают в нее полюс криволинейной системы координат. В полюсе нарушается взаимно однозначное соответствие между физической точкой тела и ее координатами, поэтому тензорные параметры состояния (напряжения, деформации) в ней не определены. Их нельзя ни задать в качестве граничных условий, ни получить как решение. Поэтому аналитические решения гарантированно достоверны лишь вне малой окрестности особой точки. Асимптотические значения таких решений требуют дополнительных исследований. В отличие от обычной точки поверхности тела (линии контура) особой точке присущи следующие особенности. Во-первых, количество задаваемых в ней ограничений превышает количество ограничений, задаваемых в обычной точке поверхности (контура). Например, в обычной точке плоского контура вектор напряжений задается на одной площадке, ориентируемой ортом к касательной в этой точке к контуру. В особой точке (вершине клина) вектор напряжений задается на двух площадках, ориентируемых ортами к касательным к образующим клина. Избыточность задаваемых в особой точке ограничений делает невозможным построение обычными методами решения, согласующегося со всеми условиями. Другой отличительной особенностью, характерной для особой точки, является то, что в ней, кроме граничных условий, формулируется большее количество алгебраических зависимостей, связывающих параметры состояния. Такие зависимости вытекают из сути задачи. Например, в плоской задаче в обычной точке защемленного контура обращается в нуль относительное удлинение линейного элемента, направленного по касательной (одна зависимость). В вершине клина (в особой точке), образующие которого защемлены, таких алгебраических зависимостей три: обращение в нуль относительных удлинений линейных элементов, направленных по двум образующим клина и обращение в нуль сдвига между этими элементами. Совокупность заданных граничных условий в особой точке и алгебраических зависимостей между параметрами состояния образуют систему алгебраических равенств. Эти равенства служат критериями достоверности получаемых различными методами решений задачи о НДС в особой точке. Изучение алгебраических равенств позволяет, еще не решая задачу механики деформируемого тела, определять ключевые закономерности НДС непосредственно в особой точке, в частности:

- выявлять сочетания геометрических и материальных параметров конструкции, при которых особая точка теряет свой статус (перестает быть особой);
- обнаруживать зависимости между геометрическими и материальными параметрами конструкции с одной стороны и параметрами нагрузки с другой

стороны, обусловливающими несовместность алгебраических равенств, которая служит причиной сингулярного поведения НДС вблизи особой точки;

- формулировать ограничения на параметры нагрузки, обеспечивающие корректность исследования НДС в рамках симметричной теории напряжений.

В настоящей работе в соответствии с развиваемым авторами подходом [13-15] строятся и изучаются алгебраические равенства в особой точке в случае, когда она является вершиной составного клина, одна из образующих которого скользит без трения вдоль жесткой поверхности. При этом клин подвергается температурной или силовой нагрузке.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается часть элемента конструкции, представляющая собой клин, составленный их двух изотропных линейно упругих элементов 1,2. Образующая элемента 1 клина ориентирована ортом $\overline{n}$. Единичный вектор $\overline{n}'$ ортогонален $\overline{n}$ и направлен вдоль образующей, которая может быть нагружена поверхностными силами плотностью $\overline{p}_n = p_n\overline{n} + \tau_n\overline{n}'$. Образующая элемента 2 клина ориентирована ортом $\overline{m}$. Единичный вектор $\overline{m}'$ ортогонален орту $\overline{m}$ и направлен вдоль образующей, которая скользит без трения вдоль жесткой поверхности (рис.1).

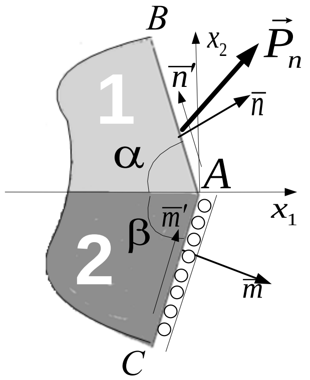

Рис.1. Составной клин.

Углы α, β составляющих клин элементов подчинены условиям

$$0 < \alpha < 2\pi, \quad 0 < \beta < 2\pi, \quad \alpha + \beta < 2\pi \tag{1}$$

Приняты обозначения $\sigma_{ij}^{(k)}, \varepsilon_{ij}^{(k)}$ – компоненты соответственно напряжений и деформаций, $E_k, G_k, \nu_k, \omega_k$ – модуль Юнга, модуль сдвига, коэффициент Пуассона и коэффициент температурной деформации в k-ом (k=1,2) составляющем элементе клина; σ_n, $\tau_{n'}$, σ_m, $\tau_{m'}$ – нормальные и касательные напряжения на образующих клина, ориентированных ортами $\overline{n}, \overline{m}$; ΔT – приращение температуры. Принимается также, что рассматриваемый элемент конструкции находится в обобщенном плосконапряженном состоянии. В точке A (вершине клина) вводится ортонормированная декартова система координат x_1, x_2. Ось x_1 направляется по касательной к линии соединения составляющих клин элементов. В вершине клина на параметры состояния (напряжения, деформации, перемещения) накладываются следующие ограничения

а) на площадке с нормалью $\overline{n}$ заданы нормальное и касательное напряжения

$$\sigma_n = p_n, \quad \tau_{n'} = \tau; \tag{2}$$

б) на площадке с нормалью $\overline{m}$ обращается в нуль касательное напряжение

$$\tau_{m'} = 0 \tag{3}$$

и величина проекции вектора перемещений $\overline{u}$ на направление $\overline{m}$

$$\overline{u} \cdot \overline{m} = 0 \tag{4}$$

в) на линии соединения элементов 1,2 выполняются

1) условие непрерывности напряжений

$$\sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} = \sigma_{12}; \quad \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{22}^{(2)} = \sigma_{22} \tag{5}$$

2) условие непрерывности деформаций (равенства относительных удлинений линейных элементов, направленных по линии соединения)

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \varepsilon_{11}^{(2)} \tag{6}$$

3) условие непрерывности перемещений.

Условия (2), (3), (5), (6) записываются системой линейных неоднородных уравнений относительно параметров $\sigma_{11}^{(1)}, \sigma_{11}^{(2)}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$

$$\begin{gathered}
\sigma_{11}^{(1)} \sin^2\alpha + 2\sigma_{12} \sin\alpha\cos\alpha + \sigma_{22}\cos^2\alpha = p_n, \\
-\sigma_{11}^{(1)} \sin\alpha\cos\alpha - \sigma_{12}(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha = \tau_n, \\
\sigma_{11}^{(2)} \sin\beta\cos\beta - \sigma_{12}\cos 2\beta - \sigma_{22}\sin\beta\cos\beta = 0, \\
\frac{1}{E_1}\sigma_{11}^{(1)} - \frac{1}{E_2}\sigma_{11}^{(2)} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{22} = (\omega_2 - \omega_1)\Delta T.
\end{gathered} \tag{7}$$

Определитель матрицы системы уравнений (7) записывается равенством

$$\begin{aligned}
\Delta = -\Bigg[& \frac{1}{E_1}\cos 2\alpha \sin\beta\cos\beta + \frac{1}{E_2}\cos 2\beta \sin\alpha\cos\alpha + \\
& + \left(\frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha \sin\beta\cos\beta \Bigg].
\end{aligned} \tag{8}$$

Требуется

- в зависимости от нагрузки, а также от геометрических и материальных параметров соединяемых тел найти возможные варианты решений системы уравнений (7);
- в каждом варианте выявить линейно независимые алгебраические равенства, которым должны удовлетворять параметры состояния в особой точке;
- установить критические сочетания геометрических и материальных параметров, приводящих к сингулярному поведению напряжений в вершине клина.

2. ТЕМПЕРАТУРНОЕ НАГРУЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦИИ

В этом пункте принимается, что в столбце свободных членов системы уравнений (7) параметры p_n, τ_n обращаются в нуль.

2.1. Исследование решений уравнений (7) в зависимости от ранга расширенной матрицы.

Определители Δ_i (i=1–4), получающиеся последовательной заменой столбцов матрицы системы уравнений (7) столбцом свободных членов, имеют значения

$$\begin{aligned}
&\Delta_1 = -(\omega_2 - \omega_1)\Delta \mathrm{T}\cos^2\alpha\sin\beta\cos\beta,\\
&\Delta_2 = (\omega_2 - \omega_1)\Delta \mathrm{T}\sin\alpha(\cos 2\beta\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta\sin\alpha),\\
&\Delta_3 = 0.25(\omega_2 - \omega_1)\Delta \mathrm{T}\sin 2\alpha\sin 2\beta,\\
&\Delta_4 = -(\omega_2 - \omega_1)\Delta \mathrm{T}\sin\beta\cos\beta\sin^2\alpha.
\end{aligned} \tag{9}$$

Анализ равенств (9) показывает, что существует пять вариантов соединений элементов клина, при которых все определители (9) обращаются в нуль

$$1)\,\alpha = \pi/2,\ \beta = \pi/2;\quad 2)\ \alpha = \pi/2,\ \beta = \pi;\quad 3)\ \alpha = \pi/2,\ \beta = 3\pi/2;$$
$$4)\ \alpha = \pi,\ \beta = \pi;\quad 5)\ \alpha = 3\pi/2,\ \beta = \pi/2. \tag{10}$$

При этих значениях α, β обращается в нуль и определитель Δ (8). Заметим, что определители Δ_i (i=1–4) (9) одновременно обращаются в нуль только в точках (10). В то же время определитель (8) может обращаться в нуль не только в этих точках. В связи с этим возможны такие варианты поведения решений уравнений (7).

1. Параметры α,β не попадают в группу (10), а определитель (8) обращается в нуль. Ранг матрицы системы уравнений (7) не совпадает с рангом расширенной матрицы, уравнения несовместны. Особая точка (вершина клина) оказывается точкой сингулярного поведения НДС. Параметры состояния (напряжения, деформации) в такой точке претерпевают разрывы второго рода. Ниже, в п.2.2, приводятся примеры сочетаний геометрических и материальных параметров скрепляемых элементов, соответствующих такому случаю.

2. Параметры α,β не попадают в группу (10), определитель (8) не обращается в нуль, система уравнений (7) имеет единственное решение

$$\sigma_{11}^{(1)} = \Delta_1/\Delta,\qquad \sigma_{11}^{(2)} = \Delta_2/\Delta,\qquad \sigma_{12} = \Delta_3/\Delta,\qquad \sigma_{22} = \Delta_4/\Delta.$$

В данном случае в особой точке для каждого составляющего клин элемента оказываются заданными все три компоненты тензора напряжений и условие (4), всего семь условий (кроме условий непрерывности перемещений на линии соединения). В классическом подходе таких условий шесть.

3. Параметры α,β попадают в группу (10), определители (8) и Δ_i (i=1–4) обращаются в нуль. Каждому из вариантов (10) соответствуют следующие ограничения на параметры состояния в особой точке:

1) $\alpha = \pi/2,\ \beta = \pi/2$. Ранги матрицы и расширенной матрицы равны трем. Из уравнений (7) следуют зависимости

$$\sigma_{11}^{(1)} = 0,\qquad \sigma_{12} = 0,\ -\frac{1}{E_2}\sigma_{11}^{(2)} - \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{22} = (\omega_2 - \omega_1)\Delta T. \tag{11}$$

Вследствие того, что справедливо равенство (5), условия (11) представляют собой пять ограничений в особой точке, еще одно ограничение (4), итого шесть ограничений, в классическом подходе пять ограничений. В частном случае, когда между материальными параметрами имеется зависимость

$$E_2\nu_1 = E_1\nu_2, \tag{12}$$

из соотношений (11) определяется значение напряжения $\sigma_{11}^{(2)}$ в вершине клина.

2) $\alpha = \pi/2,\ \beta = \pi$. Ранг матрицы системы уравнений (7) совпадает с рангом расширенной матрицы и равен трем. Зависимости между напряжениями совпадают с (11). Поэтому справедливы результаты предыдущего пункта.

3) $\alpha = \pi/2,\ \beta = 3\pi/2.$ Ранги матрицы системы уравнений (7) и ее расширенной матрицы совпадают и равны трем. Ограничения на компоненты напряжений в особой точке представляются равенствами (11), поэтому результаты, приведенные в п.1), справедливы и для данного случая.

4) $\alpha = \pi,\ \beta = \pi.$ Ранг матрицы системы уравнений (7) равен трем и равен рангу расширенной матрицы. Ограничения на компоненты напряжений, вытекающие из уравнений (7), записываются равенствами

$$\sigma_{22} = 0, \qquad \sigma_{12} = 0, \qquad \frac{1}{E_1}\sigma_{11}^{(1)} - \frac{1}{E_2}\sigma_{11}^{(2)} = (\omega_2 - \omega_1)\Delta T. \tag{13}$$

С учетом равенств (4), (5) количество заданных независимых ограничений в особой точке равно шести. В классическом подходе – пяти.

5) $\alpha = 3\pi/2,\ \beta = \pi/2.$ Ранг матрицы системы уравнений (7) и ее расширенной матрицы совпадают и равны трем. Ограничения на параметры состояния в особой точке задаются равенствами (11), поэтому результаты анализа решения уравнений (7) такие же, как и в п.1).

2.2. Частные случаи скрепления элементов клина.

Анализ условий обращения в нуль определителя (8) из-за значительного числа определяющих его параметров предпочтительно проводить численно. В то же время в часто встречающихся на практике случаях скрепления элементов 1, 2 клина (рис.1) эффективен аналитический метод. Реализуемый ниже подход к анализу решений уравнений (7) может использоваться для обнаружения сочетания критических параметров соединения элементов клина и в других случаях.

1. $\alpha = \beta$. Определитель (8) принимает вид

$$\Delta = -\left[\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)\cos 2\alpha + \left(\frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha\right]\sin\alpha\cos\alpha. \tag{14}$$

Из равенства $\Delta = 0$ следуют два уравнения

$$\sin\alpha\cos\alpha = 0, \tag{15}$$

$$\left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right)\cos 2\alpha + \left(\frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha = 0. \tag{16}$$

В области допустимых значений α ($0 < \alpha \le \pi$) уравнение (15) имеет корни

$$\alpha = \pi/2, \quad \alpha = \pi. \tag{17}$$

Решение уравнений (7) при углах α, определяемых равенствами (17), рассмотрено в п.2.1.

Уравнение (16) в области допустимых значений α имеет два корня, определяемых равенствами

$$\sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \left\{\frac{E_1 + E_2}{3E_1 + E_2 + (\nu_1 E_2 - \nu_2 E_1)}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2 = \left\{\frac{2E_1 + (\nu_1 E_2 - \nu_2 E_1)}{3E_1 + E_2 + (\nu_1 E_2 - \nu_2 E_1)}\right\}^{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

Если $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0$, углы (18) скрепления клина следует считать критическими, так как в этом случае ранг матрицы системы уравнений (7) оказывается меньше ранга расширенной матрицы. Вершина клина становится сингулярной точкой. Если же $(\omega_1 = \omega_2)$ или $\Delta T = 0$, система уравнений (7) оказывается однородной, ее ранг при углах (18) равен трем и, следовательно, три компоненты напряжений могут быть выражены через четвертую, например, так

$$\sigma_{11}^{(1)} = ctg^2\alpha_i\sigma_{22}, \quad \sigma_{11}^{(2)} = -(ctg^2\alpha_i - 2)\sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = -ctg\alpha_i\sigma_{22}. \quad (i=1,2) \quad (19)$$

Условия (19), (4) и (5) в вершине клина представляют собой шесть независимых ограничений на параметры состояния. Такое же количество ограничений при рассматриваемых геометрических параметрах элементов конструкции задается в классическом случае. Следовательно, всем ограничениям можно удовлетворить, применяя для построения решения обычный (какой-либо из классических) метод. Особая точка в этом случае перестает быть особой. Поэтому скрепление элементов в соответствии с углами α_1, α_2 не приводит к сингулярности напряжений в вершине клина при механической нагрузке на конструкцию.

Если в рассматриваемом случае ($\alpha = \beta$), угол α не определяется равенствами (17), (18), ранг матрицы системы уравнений (7) равен четырем. Следовательно, (в случае $(\omega_1 = \omega_2)$ или $\Delta T = 0$) эта система имеет лишь нулевое решение

$$\sigma_{11}^{(1)} = 0, \quad \sigma_{11}^{(2)} = 0, \quad \sigma_{12} = 0, \quad \sigma_{22} = 0. \quad (20)$$

Равенства (20) совместно с (4) и (5) накладывают семь ограничений на параметры состояния в особой точке. Число ограничений превышает количество ограничений, задаваемое в классическом случае, равное шести.

2. $\alpha + \beta = \pi/2$. Определитель (8) принимает вид

$$\Delta = \left[\left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1}\right)\cos 2\alpha - \left(\frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha\right]\sin\alpha\cos\alpha. \quad (21)$$

Уравнение $\Delta = 0$ распадается на два

$$\sin\alpha\cos\alpha = 0 \quad (22)$$

$$\left(\frac{1}{E_2} - \frac{1}{E_1}\right)\cos 2\alpha - \left(\frac{1-\nu_1}{E_1} - \frac{1-\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha = 0. \quad (23)$$

Уравнение (22) в области изменения $\alpha (0 < \alpha < \pi/2)$ не имеет корней. Из уравнения (23) следует

$$\sin^2\alpha = \frac{\kappa - 1}{\kappa(1+\nu_2) - (1+\nu_1)}, \quad \kappa = \frac{E_1}{E_2}. \quad (24)$$

Решение уравнения (24) существует при условии (с учетом области изменения α)

$$0 < \frac{\kappa - 1}{\kappa(1+\nu_2) - (1+\nu_1)} < 1. \quad (25)$$

Неравенство (25) выполняется, если справедливы все условия из какой-либо одной из следующих групп

$$\kappa > 1, \quad \kappa > \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad \kappa > \frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}; \quad (26)$$

$$\kappa < 1, \quad \kappa < \frac{\nu_1}{\nu_2}, \quad \kappa < \frac{1+\nu_1}{1+\nu_2}. \quad (27)$$

При выполнении условий (26) или (27) уравнение (24) имеет один корень в области допустимых значений α. Этот корень определяет критическое значение угла скрепления элементов 1,2 клина, так как при выполнении $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0$ вершина клина становится сингулярной точкой. Если $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0$, из уравнений (7) следует зависимость между компонентами напряжений

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = \mathrm{ctg}^2\alpha\sigma_{22}, \qquad \sigma_{12} = -\mathrm{ctg}\alpha\sigma_{22} \tag{28}$$

Равенства (28) совместно с (4) и (5) накладывают шесть ограничений на компоненты напряжений и перемещений в особой точке. Такое же количество ограничений соответствует классическому случаю. Поэтому особая точка перестает быть таковой. Рассматриваемая задача решается обычным методом. Соединение элементов под углом α, выбираемым по формулам (24), не приводит к сингулярному поведению напряжений в окрестности вершины клина.

3. $\alpha + \beta = \pi$. Определитель (8) в данном случае с точностью до знака совпадает с определителем (21). Уравнение $\Delta = 0$ эквивалентно соотношениям (22), (23). Уравнение (22) в области допустимых α $(0 < \alpha < \pi)$ имеет единственный корень $\alpha = \pi/2$, следовательно, и $\beta = \pi/2$. Такой случай соединения элементов 1, 2 клина рассмотрен в п.2.1. Уравнение (23) приводится к уравнению (24), которое имеет действительные решения при ограничениях на параметры (26) или (27). В рассматриваемом случае критических значений параметра α, определяющих сингулярное поведение решения при $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T \neq 0$ в особой точке, оказывается два

$$\begin{aligned} \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 &= \left\{\frac{\kappa - 1}{\kappa(1+\nu_2) - (1+\nu_1)}\right\}^{1/2}, \\ \cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2 &= \left\{\frac{\kappa\nu_2 - \nu_1}{\kappa(1+\nu_2) - (1+\nu_1)}\right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{29}$$

В случае, когда $(\omega_1 - \omega_2)\Delta T = 0$, из уравнений (7) следуют зависимости между напряжениями в точках $\alpha = \alpha_i$ $(i = 1,2)$

$$\sigma_{11}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} = \mathrm{ctg}^2\alpha_i\sigma_{22}, \qquad \sigma_{12} = -\mathrm{ctg}\alpha_i\sigma_{22}. \tag{30}$$

Зависимости (30) совместно с (4) и (5) определяют ограничения на параметры состояния в особой точке. Количество ограничений равно шести, что совпадает с количеством ограничений в классической задаче. Скрепление элементов 1,2 конструкции с углами α_1, α_2, определяемыми равенствами (29), обеспечивает отсутствие сингулярного поведения решения в окрестности вершины клина.

4. $\alpha + \beta = 2\pi$. Определитель (8) совпадает с выражением (21). Условие равенства нулю этого определителя приводится к уравнениям (22), (24). Уравнения (22) в области изменения α $(0 < \alpha < 2\pi)$ имеет корни

$$\alpha = \pi/2, \; \alpha = \pi, \; \alpha = 3\pi/2. \tag{31}$$

Все эти случаи рассмотрены в п.2.1. Уравнение (24) при выполнении условий (26) или (27) в области допустимых значений α имеет четыре корня, которым отвечают четыре пары значений углов α, β

$$\sin\alpha_1=\sin\alpha_2=-\sin\alpha_3=-\sin\alpha_4=\left\{\frac{\kappa-1}{\kappa(1+\nu_2)-(1+\nu_1)}\right\}^{1/2},$$
$$\cos\alpha_1=-\cos\alpha_2=-\cos\alpha_3=\cos\alpha_4=\left\{\frac{\kappa\nu_2-\nu_1}{\kappa(1+\nu_2)-(1+\nu_1)}\right\}^{1/2}. \qquad (32)$$

В точках α_i (i=1,2,3,4) (32) определители (9) при $(\omega_1-\omega_2)\Delta T\neq 0$ отличны от нуля. Поэтому ранг расширенной матрицы системы уравнений (7) оказывается большим, чем ранг системы. Решения уравнений не существует. Каждая из точек (32) оказывается критической.

Если выполняется условие $(\omega_1-\omega_2)\Delta T=0$, уравнения (7) оказываются совместными. Между напряжениями в точках (32) справедливы зависимости (30), где (i=1,2,3,4). Количество ограничений на параметры $\sigma_{ij}^{(k)}, u_k$ в особой точке равно шести, что отвечает классическому случаю. Скрепление элементов конструкции с углами α_i,β_i, вычисляемыми по формулам (32), не приводит к сингулярности напряжений в окрестности особой точки.

3. НАГРУЖЕНИЕ ЭЛЕМЕНТА КОНСТРУКЦИИ ПОВЕРХНОСТНЫМИ УСИЛИЯМИ

В рассматриваемом случае отсутствует температурная нагрузка, поэтому в столбце свободных членов системы уравнений (7) обращаются в нуль выражения, содержащие множитель ΔT. Определители $\Delta_i\ (i=1,2,3,4)$, получающиеся последовательной заменой столбцов матрицы системы уравнений (7) столбцом свободных членов, определяются выражениями

$$\Delta_1=-P_n\left[\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{1-\nu_2}{E_2}\right)\cos2\alpha\sin\beta\cos\beta+\frac{1}{E_2}\cos2\beta\sin\alpha\cos\alpha\right]-$$
$$-\tau_n\left[2\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{1-\nu_2}{E_2}\right)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta-\frac{1}{E_2}\cos2\beta\cos^2\alpha\right],$$
$$\Delta_2=-P_n\left[\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right)\cos2\beta\sin\alpha\cos\alpha-\frac{1}{E_1}(\cos2\alpha\sin\beta\cos\beta+\cos2\beta\sin\alpha\cos\alpha)\right]+$$
$$+\tau_n\left[2\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha\cos2\beta-\frac{1}{E_1}(\sin2\alpha\sin\beta\cos\beta-\cos2\beta\cos^2\alpha)\right],$$
$$\Delta_3=-P_n\left(\frac{1-\nu_1}{E_1}-\frac{1-\nu_2}{E_2}\right)\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta-$$
$$-\tau_n\left[\left(\frac{1-\nu_1}{E_1}-\frac{1-\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta-\frac{1}{E_1}\cos\beta\cos\beta\right], \qquad (33)$$
$$\Delta_4=-P_n\left(\frac{1}{E_1}\cos2\alpha\sin\beta\cos\beta+\frac{1}{E_2}\cos2\beta\sin\alpha\cos\alpha\right)-$$
$$-\tau_n\left(\frac{1}{E_1}\sin2\alpha\sin\beta\cos\beta+\frac{1}{E_2}\cos2\beta\sin^2\alpha\right).$$

Ниже приводится исследование возможных ограничений на параметры состояния в вершине клина для рассмотренных в предыдущем пункте случаев соединения его элементов.

3.1. Исследование решений уравнений (7) в случаях, когда α, β определяются равенствами (10).

В точках $\alpha_i, \beta_i \left(i = 1 - 5\right)$, определяемых равенствами (10), определитель (8) матрицы системы уравнений (7) обращается в нуль. Уравнения (7) будут совместны в каждой из точек (10), если нагрузка $\overline{p}_n$ ограничена условием

$$\tau_n = 0. \qquad (34)$$

Ограничение (34) обусловлено требованием симметричности тензора напряжений. При невыполнении ограничения (34) ранги матрицы системы уравнений (7) и ее расширенной матрицы в точках (10) различны, поэтому эти точки будут точками сингулярного поведения решения. Далее в этом пункте строятся ограничения на параметры состояния в вершине клина при условии выполнения ограничения (34).

1. $(\alpha = \pi/2, \beta = \pi/2)$. Ранг матрицы системы (7) и ее расширенной матрицы равны трем. Между напряжениями в вершине клина справедливы зависимости

$$\sigma_{11}^{(1)} = p_n, \quad \sigma_{11}^{(2)} = \frac{E_2}{E_1} p_n - E_2\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sigma_{22}, \quad \sigma_{12} = 0. \qquad (35)$$

Равенства (35), (5) и (4) представляют собой ограничения на перемещения и напряжения в вершине клина. Это количество ограничений равно шести. В классическом подходе в рассматриваемом случае задается пять ограничений.

При выполнении зависимости (12) из соотношений (35) определяется значение напряжения $\sigma_{11}^{(2)}$ в особой точке.

2. Аналогичные результаты получаются для точек $(\alpha = \pi/2, \beta = \pi)$, $(\alpha = \pi/2, \beta = 3\pi/2)$, $(\alpha = 3\pi/2, \beta = \pi/2)$.

3. $(\alpha = \pi, \beta = \pi)$. Ранг матрицы системы уравнений (7) и ее расширенной матрицы равны трем. Ограничения в особой точке на компоненты тензоров напряжений принимают вид

$$\sigma_{11}^{(1)} \frac{1}{E_1} - \sigma_{11}^{(2)} \frac{1}{E_2} = p_n\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right), \quad \sigma_{22} = p_n, \quad \sigma_{12} = 0.$$

Общее количество ограничений превосходит количество ограничений, рассматриваемых в классическом подходе.

3.2. Частные случаи скрепления элементов клина.

В этом пункте устанавливаются ограничения на параметры состояния в вершине клина для рассмотренных в п.2.2 случаев соединения его элементов.

1. $\alpha = \beta$. Определитель Δ системы уравнений (7) приводится к виду (14) и обращается в нуль в точках (17), (18). Определители Δ_i $(i = 1,2,3,4)$, отвечающие расширенной матрице системы уравнений (7), записываются в виде

$$\Delta_i = p_n \varphi_i + \tau_n \psi_i, \quad \left(i = 1,2,3,4\right) \qquad (36)$$

где

$$\varphi_1 = \sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\left[\frac{2}{E_2} + \left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\right],$$

$$\varphi_2 = -\sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\left[\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right) - \frac{2}{E_1}\right],$$

$$\varphi_3 = -\sin^2\alpha\cos^2\alpha\left[\frac{\nu_1 - 1}{E_1} - \frac{\nu_2 - 1}{E_2}\right],$$

$$\varphi_4 = \sin\alpha\cos\alpha(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\left[\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}\right],$$

$$\psi_1 = -\cos^2\alpha\left[\frac{2}{E_2}\sin^2\alpha + \frac{1}{E_2}(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) + 2\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha\right], \qquad (37)$$

$$\psi_2 = -\sin^2\alpha(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right) - \frac{2}{E_1}\sin^2\alpha\cos^2\alpha - \frac{1}{E_1}\cos^2\alpha(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha),$$

$$\psi_3 = \sin\alpha\cos\alpha\left[\left(\frac{\nu_1}{E_1} - \frac{\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha + \frac{1}{E_1}\cos^2\alpha + \frac{1}{E_2}\sin^2\alpha\right],$$

$$\psi_4 = \sin^2\alpha\left[\frac{1}{E_2}(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha) - \frac{2}{E_1}\cos^2\alpha\right].$$

Возможны следующие случаи поведения решения уравнений (7):

а) Если определитель $\Delta \neq 0$, система уравнений (7) имеет единственное решение

$$\sigma_{11}^{(1)} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \sigma_{11}^{(2)} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \sigma_{12} = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad \sigma_{22} = \frac{\Delta_4}{\Delta}. \qquad (38)$$

Количество независимых ограничений (38), (5) и (4) на компоненты напряжений и перемещений в вершине клина равно семи. В классическом подходе – шести.

б) Случаи, когда угол α определяется равенствами (17), рассмотрен в п.3.1.

в) Угол α определяется равенствами (18). Ранг расширенной матрицы системы уравнений (7) будет равен рангу матрицы системы (равен трем), когда обращаются в нуль все определители (36), то есть

$$p_n\varphi_i + \tau_n\psi_i = 0. \quad (i = 1,2,3,4) \qquad (39)$$

Равенства (39) образует систему четырех линейных однородных уравнений относительно компонент вектора напряжений p_n, τ_n. Ранг матрицы этой системы уравнений при значениях α_1, α_2, определяемых соотношениями (18), равен единице. Следовательно, равенства (39) в этом случае оказываются попарно линейно зависимыми. Поэтому любое из них можно рассматривать как ограничение на нагрузку, обусловливающее совместность уравнений (7). Если это условие выполняется, из уравнений (7) следуют зависимости между компонентами напряжений в вершине клина

$$\sigma_{11}^{(1)} = (p_n - \sigma_{22}\cos^2\alpha)(1 - ctg^2\alpha) - 2(\tau_n - \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha)\mathrm{ctg}\alpha,$$

$$\sigma_{11}^{(2)} = -(p_n - \sigma_{22}\cos^2\alpha)(1 - \mathrm{ctg}^2\alpha) - 2(\tau_n - \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha)(\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{ctg}\alpha), \qquad (40)$$

$$\sigma_{12} = (p_n - \sigma_{22}\cos^2\alpha)\mathrm{ctg}\alpha + \tau_n - \sigma_{22}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Зависимости (40), (5) и (4) – шесть ограничений на компоненты напряжений и перемещений в особой точке. Это количество совпадает с количеством задаваемых ограничений в классическом случае. Задача о расчете конструкции решается обычными методами. Вершина клина не является особой точкой. При скреплении элементов конструкции с углами, определяемыми формулами (18), и ее нагрузкой, удовлетворяющей условию (39), в окрестности особой точки отсутствует сингулярное поведение решения. Если компоненты вектора напряжений не удовлетворяют равенствам (39), система уравнений (7) при значениях α_1, α_2 несовместна. Эти углы следует рассматривать как критические углы скрепления элементов, так как в этом случае вершина клина – точка сингулярного поведения параметров состояния.

2. $\alpha+\beta=\pi/2$. Определитель (8) в данном случае выражается формулой (21) и при выполнении условий (26) или (27) обращается в нуль при единственном значении угла α, равном α^*, определяемом уравнением (24). Определители Δ_i $(i=1,2,3,4)$, получающиеся последовательной заменой столбцов определителя матрицы системы уравнений (7) столбцами ее свободных членов, представляются равенствами вида (36), в которых параметры φ_i, ψ_i находятся по формулам

$$\begin{gathered}
\varphi_1=-\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right)\cos 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha,\quad \psi_1=-\cos^2\alpha\left[\frac{1}{\mathrm{E}_2}+2\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha\right],\\
\varphi_2=\varphi_1,\quad \psi_2=-\left[\frac{1}{\mathrm{E}_1}\cos^2\alpha+\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha\cos 2\alpha\right],\\
\varphi_3=-\left(\frac{1-\nu_1}{E_1}-\frac{1-\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha,\\
\psi_3=-\sin\alpha\cos\alpha\left[\left(\frac{1-\nu_1}{E_1}-\frac{1-\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha-\frac{1}{E_1}\right],\\
\varphi_4=-\left(\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}\right)\cos 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha,\quad \psi_4=-\sin^2\alpha\left[\frac{2\cos^2\alpha}{\mathrm{E}_1}-\frac{\cos 2\alpha}{E_2}\right].
\end{gathered}\tag{41}$$

Ранг системы уравнений (7) в точке α^* равен трем. Поэтому уравнения будут совместными при этом α, если все определители Δ_i обратятся в нуль. То есть будут выполняться равенства (39), где φ_i, ψ_i задаются соотношениями (41). Равенства (39) можно рассматривать как систему уравнений относительно параметров нагружения p_n, τ_n. Ранг матрицы этой системы при $\alpha=\alpha^*$ равен единице. Следовательно, равенства (39) фактически является одним условием, накладываемым на параметры p_n, τ_n, обеспечивающим совместность уравнений (7) в точке α^*. При выполнении условий (39) между напряжениями в особой точке выполняются зависимости

$$\begin{gathered}
\sigma_{11}^{(1)}=p_n(1-\mathrm{ctg}^2\alpha)-2\tau_n\mathrm{ctg}\alpha+\sigma_{22}\mathrm{ctg}^2\alpha,\\
\sigma_{11}^{(2)}=p_n(1-\mathrm{ctg}^2\alpha)-\tau_n(\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{tg}\alpha)+\sigma_{22}\mathrm{ctg}^2\alpha,\\
\sigma_{12}=p_n\mathrm{ctg}\alpha+\tau_n-\sigma_{22}\mathrm{ctg}.
\end{gathered}\tag{42}$$

Количество условий (42), (5), (4), задаваемых в особой точке, равно шести, как и в классической задаче. При скреплении элементов конструкции с углом α^*

и приложении к ней нагрузки, согласованной с условиями (39), вблизи вершины клина отсутствует сингулярное поведение параметров состояния. Если условия (39) не выполняются, уравнения (7) несовместны, вершина клина – точка сингулярного поведения решения.

3. $\alpha+\beta=\pi$. Определитель (8) с точностью до знака совпадает с определителем (21). Условие $\Delta=0$ распадается на уравнения (22) и (23). Уравнение (22) в области допустимых α $(0<\alpha<\pi)$ имеет единственный корень $\alpha=\pi/2$. Следовательно, конструкция задается углами $\alpha=\pi/2$, $\beta=\pi/2$. Такой случай соединения элементов рассмотрен в п.3.1. Уравнение (23) при ограничениях на материальные параметры (26) или (27) имеет два корня, вычисляемые по формулам (29). Определители (33) представляются в виде (36), где функции φ_i, ψ_i в рассматриваемом случае задаются выражениями

$$\varphi_1=\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right)\cos 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha,\quad \psi_1=\cos^2\alpha\left[\frac{1}{\mathrm{E}_2}+2\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha\right],$$

$$\varphi_2=\varphi_1,\quad \psi_2=\frac{1}{\mathrm{E}_1}\cos^2\alpha+\left(\frac{\nu_1}{E_1}-\frac{\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha\cos 2\alpha, \tag{43}$$

$$\varphi_3=\left(\frac{1-\nu_1}{E_1}-\frac{1-\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha\cos^2\alpha,$$

$$\psi_3=\sin\alpha\cos\alpha\left[\left(\frac{1-\nu_1}{E_1}-\frac{1-\nu_2}{E_2}\right)\sin^2\alpha-\frac{1}{E_1}\right],$$

$$\varphi_4=\left(\frac{1}{E_1}-\frac{1}{E_2}\right)\cos 2\alpha\sin\alpha\cos\alpha,\quad \psi_4=\sin^2\alpha\left[\frac{2\cos^2\alpha}{\mathrm{E}_1}-\frac{\cos 2\alpha}{E_2}\right].$$

В точках α_1,α_2 (29) равенства

$$p_n\varphi_i(\alpha_k)+\tau_n\psi_i(\alpha_k)=0.\quad (i=1,2,3,4;\,k=1,2) \tag{44}$$

представляют собой линейно зависимую систему уравнений относительно параметров p_n,τ_n. Это означает, что при каждом α_k $(k=1,2)$ все равенства (44) одинаковы и представляют собой ограничения на нагрузку p_n,τ_n, при которой уравнения (7) совместны. При выполнении такого ограничения между напряжениями в особой точке выполняются зависимости (40). Количество ограничений на напряжения в особой точке соответствует классическому случаю. В конструкции, скрепление элементов которой осуществляется в соответствии с формулами (29), а нагрузка p_n,τ_n удовлетворяет условиям (44), не возникает сингулярного решения в вершине клина. Если параметры нагрузки p_n,τ_n не удовлетворяют ограничению (44), точки α_k $(k=1,2)$ являются критическими. Решение системы уравнений (7) в них не существует. Компоненты напряжений при значениях α, стремящихся к точкам α_k , неограниченно возрастают.

4. $\alpha+\beta=2\pi$. Определитель Δ системы уравнений (7) обращается в нуль в точках (31) и (32). Точки α, входящие в список (31), рассмотрены в п.3.1. Функции φ_i,ψ_i в представлении определителей (33) в виде (36) совпадают с выражениями (43). В точках α_k $(k=1,2,3,4)$, определяемых равенством (32), система уравнений (44) имеет ранг, равный единице. Поэтому в каждой из точек $\alpha_k\ (k=1,2,3,4)$ равенства (44) оказываются одним ограничением на параметры p_n, τ_n, обеспечивающим совместность системы уравнений (7). При выполнении этого ограничения в точках $\alpha_k\ (k=1,2,3,4)$ из уравнений (7) следуют зависимости между напряжениями (40). Количество ограничений (40), (5) и (4) соответствует классическому случаю. При скреплении элементов клина в соответствии с формулами (32) и согласованности нагрузки p_n, τ_n по условиям (44) вблизи вершины клина не возникает сингулярного решения. Если ограничение (44) не выполняется, в точках $\alpha_k\ (k=1,2,3,4)$ уравнения (7) несовместны. Вершина клина – точка сингулярного поведения решения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленные в статье исследования развивают подход, использующий переопределенность ограничений на параметры состояния в особых точках деформируемых тел. Такие ограничения образуют замкнутую неоднородную систему линейных алгебраических уравнений. Изучение свойств решений этих уравнений позволяет еще на этапе постановки задачи механики выявлять критические сочетания геометрических и материальных параметров, обусловливающих сингулярность напряжений в особой точке, отслеживать изменение ее статуса, формулировать условия на нагрузку, обеспечивающие ее совместность с теорией напряжений.

Результаты исследования могут найти применение в задачах механики композитных материалов и конструкций, механики трещин, механики разрушения и т.п.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я.С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1967. – 402 с.
2. *Bogy D.B.* Two edge-bonded elastic wedges of different materials and wedge angles under surface tractions // Trans. ASME. Ser.E. – 1971. – Vol.38. – N2. – P. 87-96.
3. *Чобанян К.С.* Напряжения в составных упругих телах. – Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987. – 338 с.
4. *Аксентян О.К.* Особенности напряженно-деформированного состояния плиты в окрестности ребра // Прикладная математика и механика. – 1967. – №1. – С.178-186.
5. *Коваленко М.Д., Галаджиев С.В., Гоголева О.С., Трубников Д.В.* Особенности напряженного состояния в конечных областях вблизи угловых точек границы // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №1. – С.53-60.
6. *Андреев А.В.* Степенно-логарифмические особенности решения одного класса сингулярных интегральных уравнений плоской теории упругости // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т.7. – №1. – С.30-39.
7. *Paggi M., Carpintery A.* On the stress singularities at multimaterial interfaces and related analogies with fluid dynamics and diffusion // Appl. Mech. Rev. – 2008. – Vol.61. – P .020801-1-22.

8. *Xu L.R., Kuai H., Sengupta S.* Dissimilar material joints with and without free-edge stress singularities: Part II. An integrated numerical analysis // Experimental mechanics. – 2004. – Vol.44. – N6. – P.616-621.
9. *Sinclear G.B.* Stress singularities in classical elasticity. I: Removal, interpretation and analysis// App. Mech. Rev. – 2004. – Vol. 57. – N4. – P.251-297.
10. *Sinclear G.B.* Stress singularities in classical elasticity. II: Asymptotic identification// App. Mech. Rev. – 2004. – Vol. 57. – N4. – P.385-439.
11. *Barut A., Guven I., Madenci E.* Analysis of singular stress fields at junctions of multiple dissimilar materials under mechanical and thermal loading // Int. J. of Solid and Structures. – 2001. – Vol.38. – N50-51. – P.9077-9109.
12. *Матвеенко В.П., Федоров А.Ю.* Оптимизация геометрии составных упругих тел как основа совершенствования методик испытаний на прочность клеевых соединений // Вычислительная механика сплошных сред. – 2011. – Т.4. – №4. – С.63-70.
13. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.* Нестандартные задачи механики деформируемого твердого тела и итерационный метод их решения / 2-я Всерос. конф. «Механика наноструктурированных материалов и систем». Сборник трудов в трех томах. – М.: ИПРИМ РАН, 2013. – Т.3. – С.104-118.
14. *Пестренин В.М., Пестренина И.В., Ландик Л.В.* Нестандартные задачи для однородных элементов конструкций с особенностями в виде клиньев в условиях плоской задачи // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. – 2014. – №1. – С.95-109.
15. *Pestrenin V.M., Pestrenina I.V., Landik L.V.* Nonstandart problems for structural elements with spatial composite ribs // Mechanics of Composite Materials. – 2015. – Vol.51. – N4. – P.489-504.

Поступила в редакцию 10 июня 2015 года.

Сведения об авторах:

Пестренин Валерий Михайлович – к.ф.-м.н., доц., Кафедра механики сплошных сред и вычислительных технологий, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия; e-mail: PestreninVM@mail.ru

Пестренина Ирина Владимировна – к.т.н., доц., Кафедра механики сплошных сред и вычислительных технологий, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия; e-mail: IPestrenina@gmail.com

Ландик Лидия Владимировна – зав.лаб., Кафедра механики сплошных сред и вычислительных технологий, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь, Россия; e-mail: LidiaLandik@gmail.com