

УДК 539.376

ПОСТРОЕНИЕ ПОЛНОЙ АСИМПТОТИКИ В МЕТОДЕ ЖЕСТКОСТНЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕРМОУПРУГОГО КОМПОЗИТНОГО СТЕРЖНЯ¹

Янковский А.П.

*ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики
им.С.А.Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

АННОТАЦИЯ

В безразмерном виде сформулирована линейная термоупругая задача статического деформирования композитных слоистых стержней постоянного поперечного сечения в трехмерной постановке при воздействии поверхностных и массовых нагрузок. Стержни и их слои являются прямолинейными. Материалы слоев изотропны и однородны в продольном направлении. Между слоями выполняются условия идеального термомеханического контакта. Согласно принципу независимости действия сил, решение представляется в виде суммы частных решений, полученных независимо от действия температуры, поверхностных и массовых нагрузок. В рамках метода жесткостных функций построено полное асимптотическое представление для каждого частного решения поставленной граничной задачи, позволяющее определять сложное напряженно-деформированное состояние композитных стержней за пределами торцевых зон кромочных эффектов. В качестве малого параметра выбрана относительная толщина стержня. Каждое частное решение рассматриваемой задачи представляется однотипно в виде разложений по обычным производным разных порядков от обобщенных перемещений, зависящих только от продольной координаты. В качестве обобщенных перемещений выступают средние по поперечному сечению стержня перемещения в трех независимых направлениях и средний по поперечному сечению угол поворота относительно продольной оси. Проанализированы двумерные и одномерные краевые задачи, возникающие в результате расщепления исходных уравнений упругого деформирования композитных стержней при наличии массовых и поверхностных нагрузок и при тепловом воздействии. Получены необходимые условия разрешимости этих краевых задач. Показано, что при тепловом нагружении композитного стержня пространственная термоупругая задача не может быть решена методом жесткостных функций.

Ключевые слова: композитные стержни; пространственная постановка задачи; термоупругость; метод асимптотического расщепления; метод жесткостных функций; рекурсия

THE CONSTRUCTION OF THE FULL ASYMPTOTICS IN THE METHOD OF THE STIFFNESS FUNCTIONS FOR SPATIAL PROBLEM OF DEFORMATION OF THERMO-ELASTIC COMPOSITE ROD

Yankovskii A.P.

*Khrstianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch
of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia*

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00102-а).

ABSTRACT

In dimensionless form, the linear thermo-elastic problem is formulated for the static deformation of laminated composite rods of constant cross-section in three-dimensional formulation under the influence of surface and mass loads. The rods and their layers, are considered as straight. The materials of the layers are isotropic and homogeneous in the longitudinal direction. The conditions of ideal thermo-mechanical contact are met between layers. According to the principle of independence of forces applied, the solution is sought as a sum of particular solutions, obtained independently of the temperature, surface and mass loads. In the framework of the stiffness functions method, a complete asymptotic representation is constructed for each particular solution depending on the boundary value problem given, this allows defining complex stress-strain state of composite rods outside the extreme zones of the edge effects. Relative thickness of the rods is taken as a small parameter. Every particular solution of the problem under consideration is represented as same in the form of expansions in ordinary derivatives of different orders from generalized displacements, depending on the longitudinal coordinate only. As generalized displacements, the ones averaged of cross-section of the rod are taken in three independent directions and the averaged angle of rotation relative to the longitudinal axis. Two-dimensional and one-dimensional boundary value problems that arise as a result of the splitting of the original equations of elastic deformation of composite rods are analyzed under the action both of mass and surface forces and thermal effects. The necessary conditions of solvability of these boundary value problems were obtained. It is shown that, under thermal loading of composite rod spatial thermo-elastic problem cannot be solved by the method of stiffness functions.

Keywords: composite rods; spatial problem; thermo-elasticity; asymptotic splitting method; method of stiffness functions; recursion

ВВЕДЕНИЕ

Тонкостенные элементы конструкций из композиционных материалов находят все более широкое применение в инженерной практике, поэтому актуальной остается проблема адекватного расчета термомеханического поведения таких изделий. Прямое численное моделирование механического поведения тонкостенных композитных конструкций (на основе МКЭ, МКР и т.п.) не всегда является эффективным [1], особенно если эти конструкции являются слоистыми. Существенного упрощения соответствующих расчетов можно добиться за счет понижения размерности рассматриваемой задачи. Для этого используют либо различные упрощающие гипотезы [2-5 и др.], либо методы теории возмущений [6-12 и др.], основанные на выделении в безразмерных разрешающих уравнениях естественного малого параметра – относительной толщины тонкостенного элемента.

Обзоры методов теории возмущений, применяемых для изучения термомеханического поведения тонкостенных конструкций, можно найти в монографиях [7,8,10-12 и др.]. Среди методов, основанных на идее асимптотического расщепления уравнений пространственной задачи теории упругости, особо можно выделить метод жесткостных функций, развиваемый в работах [9,11,13,14 и др.]. В последнее время авторы указанных работ распространили этот метод на решение проблемы осреднения теплофизических и механических процессов в периодических средах [15,16 и др.], развивая подходы, изложенные в [17].

Однако в работе [18] показано, что применительно к пространственной задаче изгиба и кручения прямолинейных композитных стержней, нагруженных

поверхностными силами, асимптотика, предложенная в [9,11,14 и др.], является неполной, поэтому в [18] было построено уточнение соответствующих асимптотических разложений указанной задачи упругого деформирования слоистых стержней. Вне поля зрения работы [18] остался случай нагружения стержня объемными силами и случай теплового воздействия (для этих видов нагружения стержня неполная асимптотика построена в [11,13 и др.]).

Так как в ряде технических изделий (например, в композитных маховиках [19]) массовые нагрузки и тепловое воздействие являются существенными, то настоящее исследование посвящено построению полной асимптотики разложений решений задачи пространственного деформирования прямолинейных гибридных композитных стержней в рамках метода жесткостных функций в случае массовых нагрузок и теплового воздействия.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СООТНОШЕНИЯ

Как и в [9,11,13,14,18 и др.], рассматривается прямолинейный стержень постоянного поперечного сечения (рис.1), состоящий из армированных термоупругих слоев, изготовленных из разных изотропных материалов. В поперечном сечении стержня границы между слоями могут быть произвольными кривыми, в том числе и замкнутыми. Для простоты изложения продольные стержни, посредством которых осуществляется армирование, также будем называть слоями.

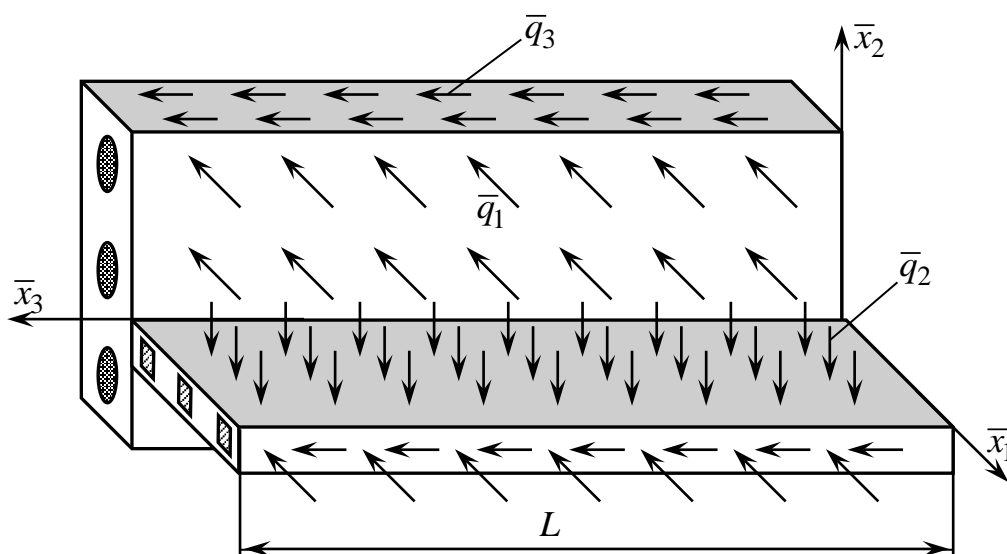


Рис.1. Композитный стержень произвольной структуры.

Прямоугольную декартову систему координат \bar{x}_i свяжем со стержнем так, чтобы ось \bar{x}_3 была продольной, а оси \bar{x}_1 , \bar{x}_2 располагались в поперечном сечении стержня (в общем случае достаточно произвольно). Стержень имеет длину L и характерный размер поперечного сечения h .

Далее рассматриваются стержни, для которых параметр относительной толщины $\varepsilon = h/L$ является малым ($\varepsilon \ll 1$). Термомеханическое статическое поведение таких стержней описывается следующими безразмерными уравнениями и соотношениями [18,20]:

уравнениями равновесия

$$\partial_1 \sigma_{1i}^{(m)} + \partial_2 \sigma_{2i}^{(m)} + \varepsilon \partial_3 \sigma_{3i}^{(m)} = -\chi_X X_i^{(m)}, \quad i = \overline{1, 3}, \quad 1 \leq m \leq M; \quad (1)$$

статическими граничными условиями на боковой поверхности стержня

$$n_1^{(p)} \sigma_{1i}^{(p)} + n_2^{(p)} \sigma_{2i}^{(p)} = \chi_q q_i, \quad i = \overline{1, 3}; \quad (2)$$

условиями сопряжения решения на границе контакта l -го и k -го слоев при идеальном термомеханическом контакте

$$\left[n_1^{(m)} \sigma_{1i}^{(m)} + n_2^{(m)} \sigma_{2i}^{(m)} \right]_{m=l}^{m=k} = 0, \quad u_i^{(k)} = u_i^{(l)}, \quad i = \overline{1, 3}; \quad (3)$$

дифференциальными соотношениями Коши

$$\varepsilon_{ij}^{(m)} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i^{(m)} + \partial_i u_j^{(m)}), \quad \varepsilon_{i3}^{(m)} = \frac{1}{2} (\partial_i u_3^{(m)} + \varepsilon \partial_3 u_i^{(m)}), \quad \varepsilon_{33}^{(m)} = \varepsilon \partial_3 u_3^{(m)}, \quad (4)$$

$$i, j = 1, 2, \quad 1 \leq m \leq M;$$

соотношениями Дюамеля-Неймана

$$\sigma_{ij}^{(m)} = 2\mu^{(m)} \varepsilon_{ij}^{(m)} + \delta_{ij} \lambda^{(m)} \sum_{n=1}^3 \varepsilon_{nn}^{(m)} - \chi_T \delta_{ij} \beta^{(m)} \theta^{(m)}, \quad i, j = \overline{1, 3}, \quad 1 \leq m \leq M; \quad (5)$$

статическими и/или кинематическими граничными условиями на торцевых поверхностях стержня

$$n_3^* \sigma_{i3}^{(m)}(x_1, x_2, x_3^*, \varepsilon) = \chi_q q_i^*(x_1, x_2, x_3^*, \varepsilon), \quad i = \overline{1, 3}; \quad (6)$$

$$u_i^{(m)}(x_1, x_2, x_3^*, \varepsilon) = \chi_q u_i^*(x_1, x_2, x_3^*, \varepsilon), \quad (7)$$

$$i = \overline{1, 3}, \quad 1 \leq m \leq M, \quad x_3^* = 0 \quad \text{и/или} \quad x_3^* = 1,$$

где

$$x_i = \bar{x}_i / h \quad (i = 1, 2), \quad x_3 = \bar{x}_3 / L, \quad u_j^{(m)} = \bar{u}_j^{(m)} / \bar{u}_*, \quad \varepsilon_{jl}^{(m)} = \bar{\varepsilon}_{jl}^{(m)} h / \bar{u}_*,$$

$$\beta^{(m)} = \alpha^{(m)} (2\mu^{(m)} + 3\lambda^{(m)}), \quad \lambda^{(m)} = \bar{\lambda}^{(m)} / \bar{E}_*, \quad \mu^{(m)} = \bar{\mu}^{(m)} / \bar{E}_*,$$

$$\alpha^{(m)} = \bar{\alpha}^{(m)} \bar{\theta}_* h / \bar{u}_*, \quad \sigma_{jl}^{(m)} = \bar{\sigma}_{jl}^{(m)} / \bar{\sigma}_*, \quad q_j = \bar{q}_j / \bar{\sigma}_*, \quad X_j^{(m)} = h \bar{X}_j^{(m)} / \bar{\sigma}_*, \quad (8)$$

$$\theta^{(m)} = \bar{\theta}^{(m)} / \bar{\theta}_*, \quad u_j^* = \bar{u}_j^* / \bar{u}_*, \quad q_j^* = \bar{q}_j^* / \bar{\sigma}_*, \quad \bar{\sigma}_* = \bar{E}_* \bar{u}_* / h, \quad n_3^* = \begin{cases} -1, & x_3^* = 0, \\ 1, & x_3^* = 1, \end{cases}$$

$$n_1^{(m)} = \cos \delta^{(m)}, \quad n_2^{(m)} = \sin \delta^{(m)}, \quad \partial_j (\bullet) = \partial (\bullet) / \partial x_j, \quad j, l = \overline{1, 3}, \quad 1 \leq m \leq M;$$

δ_{ij} – символ Кронекера; $\bar{\sigma}_{jl}^{(m)}$, $\bar{\varepsilon}_{jl}^{(m)}$ – напряжения и деформации в m -м слое стержня; M – количество слоев, из которых состоит стержень; $\bar{u}_j^{(m)}$ – перемещения точек m -го слоя в направлении \bar{x}_j ; $\bar{X}_j^{(m)}$ – объемные нагрузки, действующие в направлении \bar{x}_j ; \bar{q}_j – нагрузки, приложенные к боковой поверхности стержня и действующие в направлении \bar{x}_j ; $\bar{\theta}^{(m)}$ – отклонение температуры m -го слоя от температуры естественного состояния конструкции; \bar{u}_j^* – заданные на торцевой поверхности стержня перемещения; \bar{q}_j^* – поверхностные нагрузки, заданные на торцевой поверхности стержня; $\bar{\lambda}^{(m)}$, $\bar{\mu}^{(m)}$, $\bar{\alpha}^{(m)}$ – упругие постоянные Ламе и коэффициент линейного теплового расширения материала m -го слоя (в общем случае могут зависеть от координат \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , если m -й слой неоднороден по поперечному сечению); \bar{u}_* – характерное значение перемещения (т.к. рассматривается геометрически линейная постановка задачи, которая справедлива

при прогибах, не превышающих по модулю $h/5$ [21,22], то в качестве этого характерного значения можно выбрать величину $\bar{u}_* = h/5$; \bar{E}_* – характерное значение модуля Юнга (например, наибольший модуль Юнга, выбранный по всем слоям); $\bar{\theta}_*$ – характерное значение отклонения температуры стержня от температуры его естественного состояния, взятое по модулю ($\bar{\theta}_* > 0$); $\delta^{(m)}$ – угол, отсчитываемый от направления x_1 и задающий направление внешней или внутренней (смотря по смыслу) нормали к боковой поверхности m -го слоя; $\left[f^{(m)} \right]_{m=l}^{m=k}$ – скачок функции $f^{(m)}$ на границе контакта k -го и l -го слоев; χ_x, χ_q, χ_T – параметры переключения, позволяющие задавать тот или иной вид нагружения стержня. В соотношениях (2) индекс « p » пробегает только те значения от 1 до M , для которых p -й слой имеет частью своей поверхности боковую поверхность стержня.

Если параметры переключения имеют значения

$$\chi_x = 0, \quad \chi_q = 1, \quad \chi_T = 0, \quad (9)$$

то рассматривается случай нагружения стержня только поверхностными нагрузками; случай

$$\chi_x = 1, \quad \chi_q = 0, \quad \chi_T = 0 \quad (10)$$

соответствует нагружению стержня только объемными силами, а в случае

$$\chi_x = 0, \quad \chi_q = 0, \quad \chi_T = 1 \quad (11)$$

стержень деформируется только за счет теплового воздействия.

Так как рассматривается линейная задача термоупругого деформирования композитного стержня, то ее решение, согласно принципу независимости действия сил, можно представить в виде суперпозиции трех решений, например для компонентов перемещений, записав

$$u_i^{(m)} = u_{i,q}^{(m)} + u_{i,x}^{(m)} + u_{i,T}^{(m)}, \quad i = \overline{1,3}, \quad 1 \leq m \leq M, \quad (12)$$

где слагаемое $u_{i,q}^{(m)}$ получается в процессе решения рассматриваемой задачи (1)-(7) при выполнении равенств (9); $u_{i,x}^{(m)}$ – решение граничной задачи (1)-(7) при учете равенств (10); $u_{i,T}^{(m)}$ – решение граничной задачи (1)-(7) при тепловом нагружении стержня (при задании равенств (11)).

Случай (9) подробно исследован в [18]; в настоящей работе основное внимание уделяется изучению случаев (10), (11).

Считаем, что изменению малого параметра ε в равенствах (1), (4) соответствует изменение длины стержня L при фиксированном размере поперечного сечения h . Тогда безразмерные объемные $X_i^{(m)}$ (см. (1)) и поверхностные q_i (см. (2)) нагрузки в общем случае могут зависеть не только от безразмерных координат x_i точек стержня, но и от параметра ε : $X_i^{(m)} = X_i^{(m)}(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$, $q_i = q_i(x_1, x_2, x_3, \varepsilon)$, $i = \overline{1,3}$. При этом согласно формулам обезразмеривания (8) имеют место асимптотические равенства

$$\lambda^{(m)} = O(1), \quad \mu^{(m)} = O(1), \quad \beta^{(m)} = O(1), \quad \delta^{(m)} = O(1) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad 1 \leq m \leq M.$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ

В соответствии с работами [9,11,13,14,18] предполагаем, что внешние нагрузки q_i , $X_i^{(m)}$ и температурное поле $\theta^{(m)}$ представлены в расщепленном виде

$$\begin{aligned} X_i^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) &= -F_i^{(m)}(\mathbf{x})P_i(x_3, \varepsilon), \quad \mathbf{x} \in G_m, \\ q_i(\mathbf{r}, \varepsilon) &= f_i(\mathbf{x})p_i(x_3, \varepsilon), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad i = \overline{1, 3}, \\ \theta^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) &= T^{(m)}(\mathbf{x})\Theta(x_3, \varepsilon), \quad \mathbf{x} \in G_m, \quad 0 \leq x_3 \leq 1, \quad 1 \leq m \leq M, \end{aligned} \quad (13)$$

причем выполняются условия нормировки

$$\sum_{m=1}^M \iint_{F_m} F_i^{(m)}(\mathbf{x}) dF = 1, \quad \oint_{\Gamma} f_i(\Gamma) d\Gamma = 1, \quad \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} T^{(m)}(\mathbf{x}) dF = 1, \quad i = \overline{1, 3}, \quad (14)$$

где $\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}$; $\mathbf{x} = \{x_1, x_2\}$; Γ – контур, ограничивающий область, занимаемую поперечным сечением стержня в безразмерных переменных x_1, x_2 ; G_m – двумерная область, занимаемая поперечным сечением m -го слоя стержня; F_m – площадь поперечного сечения m -го слоя (мера множества G_m). Из (13) с учетом (14) следует

$$\begin{aligned} P_i(x_3, \varepsilon) &= -\sum_{m=1}^M \iint_{F_m} X_i^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) dF, \quad p_i(x_3, \varepsilon) = \oint_{\Gamma} q_i(\mathbf{r}, \varepsilon) d\Gamma, \\ \Theta(x_3, \varepsilon) &= \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \theta^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) dF, \quad i = \overline{1, 3}, \end{aligned} \quad (15)$$

т.е. $p_i(x_3, \varepsilon)$ – равнодействующая безразмерных поверхностных нагрузок q_i в направлении x_i , приложенных к контуру поперечного сечения, определяемого координатой x_3 ; $P_i(x_3, \varepsilon)$ – равнодействующая безразмерных объемных нагрузок $X_i^{(m)}$, взятая с противоположным знаком; $\Theta(x_3, \varepsilon)$ – средняя по поперечному сечению стержня температура, умноженная на площадь этого сечения F .

Согласно идее метода жесткостных функций [9,11,13,14,18] примем для средней температуры Θ , равнодействующих внешних сил p_i , P_i и перемещений точек m -го слоя стержня $u_{i,\alpha}^{(m)}$ следующие правила аппроксимации

$$\Theta(x_3, \varepsilon) = \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{N_l} \varepsilon^{2k} \Theta_l^{2k} \partial_3^{2k} u_l^0 + \sum_{k=1}^{N_3} \varepsilon^{2k-1} \Theta_3^{2k-1} \partial_3^{2k-1} u_3^0 + \sum_{k=1}^{N_4} \varepsilon^{2k} \Theta_4^{2k} \partial_3^{2k} u_4^0; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} p_i(x_3, \varepsilon) &= \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{N_l} \varepsilon^{2k} Q_{i,l}^{2k} \partial_3^{2k} u_l^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{N_3} \varepsilon^{2k-1} Q_{i,3}^{2k-1} \partial_3^{2k-1} u_3^0(x_3, \varepsilon) + \\ &+ \sum_{k=1}^{N_4} \varepsilon^{2k} Q_{i,4}^{2k} \partial_3^{2k} u_4^0(x_3, \varepsilon), \quad p_3(x_3, \varepsilon) = \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{N_l-1} \varepsilon^{2k+1} Q_{3,l}^{2k+1} \partial_3^{2k+1} u_l^0(x_3, \varepsilon) + \\ &+ \sum_{k=1}^{N_3-1} \varepsilon^{2k} Q_{3,3}^{2k} \partial_3^{2k} u_3^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=0}^{N_4-1} \varepsilon^{2k+1} Q_{3,4}^{2k+1} \partial_3^{2k+1} u_4^0(x_3, \varepsilon), \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 P_i(x_3, \varepsilon) &= \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{N_l} \varepsilon^{2k} G_{i,l}^{2k} \partial_3^{2k} u_l^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{N_3} \varepsilon^{2k-1} G_{i,3}^{2k-1} \partial_3^{2k-1} u_3^0(x_3, \varepsilon) + \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_4} \varepsilon^{2k} G_{i,4}^{2k} \partial_3^{2k} u_4^0(x_3, \varepsilon), \quad P_3(x_3, \varepsilon) = \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{N_l-1} \varepsilon^{2k+1} G_{3,l}^{2k+1} \partial_3^{2k+1} u_l^0(x_3, \varepsilon) + \\
 &+ \sum_{k=1}^{N_3-1} \varepsilon^{2k} G_{3,3}^{2k} \partial_3^{2k} u_3^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=0}^{N_4-1} \varepsilon^{2k+1} G_{3,4}^{2k+1} \partial_3^{2k+1} u_4^0(x_3, \varepsilon), \quad i = 1, 2;
 \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
 u_{i,\alpha}^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) &= \sum_{l=1}^2 \sum_{k=0}^{N_l} \varepsilon^{2k} U_{i,l}^{(m)}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k} u_l^0 + \sum_{k=0}^{N_3} \varepsilon^{2k-1} U_{i,3}^{(m)}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k-1} u_3^0 + \\
 &+ \sum_{k=0}^{N_4} \varepsilon^{2k} U_{i,4}^{(m)}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k} u_4^0, \quad u_{3,\alpha}^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) = \sum_{l=1}^2 \sum_{k=0}^{N_l-1} \varepsilon^{2k+1} U_{3,l}^{(m)}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k+1} u_l^0 + \\
 &+ \sum_{k=0}^{N_3-1} \varepsilon^{2k} U_{3,3}^{(m)}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k} u_3^0 + \sum_{k=0}^{N_4-1} \varepsilon^{2k+1} U_{3,4}^{(m)}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k+1} u_4^0, \quad \mathbf{x} \in G_m,
 \end{aligned} \tag{19}$$

$$0 \leq x_3 \leq 1, \quad i = 1, 2, \quad 1 \leq m \leq M, \quad \alpha = X, q, T,$$

где

$$U_{i,i}^{(m)}(\mathbf{x}) = U_{3,3}^{(m)}(\mathbf{x}) = 1, \quad U_{i,j}^{(m)}(\mathbf{x}) = U_{i,3}^{(m)}(\mathbf{x}) = 0, \tag{20}$$

$$U_{i,4}^{(m)}(\mathbf{x}) = (-1)^i (x_j - c_j), \quad U_{3,i}^{(m)}(\mathbf{x}) = -(x_i - c_i), \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2;$$

$u_l^0(x_3, \varepsilon)$ – функции, зависящие только от одной продольной координаты x_3 ,

определение которых дано ниже; $U_{i,l}^{(m)}(\mathbf{x})$ ($i = \overline{1, 3}, l = \overline{1, 4}$) – характеристические функции, зависящие только от двух переменных x_1, x_2 и подлежащие

определению (за исключением приведенных в (20)); $c_i, Q_{i,l}^{2k}, Q_{i,3}^{2k-1}, G_{i,l}^{2k}, G_{i,3}^{2k-1}, \Theta_l^{2k}$,

Θ_3^{2k-1} ($i = 1, 2, l = 1, 2, 4$) – некоторые постоянные, подлежащие определению; N_l –

некоторые заданные натуральные числа. В левых частях равенств (19) индекс α указывает на то, какое слагаемое в сумме (12) разыскивается. В правых частях (19) индекс α не указан, чтобы не загромождать эти разложения. В дальнейшем указывать индекс α не будем, так как разложения (19) формально совпадают при любых $\alpha = X, q, T$, но будем оговаривать, для какого случая построено то или иное решение.

Как и в [18], определим функции $u_i^0(x_3, \varepsilon)$ следующими соотношениями

$$F u_i^0(x_3, \varepsilon) = \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} u_i^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) dF, \quad i = \overline{1, 3}, \tag{21}$$

$$J u_4^0(x_3, \varepsilon) = \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \{(x_1 - c_1) u_2^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) - (x_2 - c_2) u_1^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon)\} dF,$$

где

$$F = \sum_{m=1}^M F_m, \quad J = \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \{(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2\} dF; \tag{22}$$

J – полярный момент инерции поперечного сечения стержня. Согласно (21) u_i^0 – средние по сечению перемещения в направлениях x_i ($i = \overline{1, 3}$), u_4^0 – в некотором смысле средний по сечению угол поворота поперечного сечения стержня.

Принципиальное отличие асимптотических разложений (16)-(19) от аналогичных, предложенных ранее в [9,11,13,14 и др.] заключается в наличии в (16)-(19) последних групп слагаемых, содержащих функцию $u_4^0(x_3, \varepsilon)$.

Подставим (19) в (21), тогда с учетом (20), (22) получим, что при любых α для характеристических функций должны выполняться интегральные равенства

$$\sum_{m=1}^M \iint_{F_m} U_{i,l}^{(m)k}(\mathbf{x}) dF = 0, \quad i = 1, 2, \quad l = \overline{1, 4}, \quad k \geq 1; \quad (23)$$

$$\sum_{m=1}^M \iint_{F_m} U_{3,4}^{(m)0}(\mathbf{x}) dF = 0, \quad \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} U_{3,l}^{(m)k}(\mathbf{x}) dF = 0, \quad l = \overline{1, 4}, \quad k \geq 1; \quad (24)$$

$$\sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (x_i - c_i) dF = \iint_F (x_i - c_i) dF = 0, \quad i = 1, 2; \quad (25)$$

$$\sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left\{ (x_1 - c_1) U_{2,l}^{(m)k}(\mathbf{x}) - (x_2 - c_2) U_{1,l}^{(m)k}(\mathbf{x}) \right\} dF = 0, \quad l = \overline{1, 4}, \quad k \geq 1. \quad (26)$$

Равенства (25) позволяют определить постоянные c_i , которые согласно (25) являются координатами центра тяжести поперечного сечения стержня. Равенства (23), (24), (26) потребуются далее для однозначного интегрирования уравнений, получающихся после асимптотического расщепления исходных соотношений (см. раздел 1).

Отметим, что равенства (26) в [9,11,13,14 и др.] получены не были, а, как показано в [18], в общем случае без этих равенств решить рассматриваемую задачу методом жестких функций нельзя; постоянные же c_i в работах [9,11,13,14 и др.] определялись совершенно из других соотношений (см. ниже).

После подстановки (19) в соотношения (4) получим асимптотическое разложение деформаций

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l=1}^2 \sum_{k=0}^{N_l} \varepsilon^{2k} \left(\partial_j U_{i,l}^{(m)k} + \partial_i U_{j,l}^{(m)k} \right) \partial_3^{2k} u_l^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=0}^{N_3} \varepsilon^{2k-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(\partial_j U_{i,3}^{(m)k} + \partial_i U_{j,3}^{(m)k} \right) \partial_3^{2k-1} u_3^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=0}^{N_4} \varepsilon^{2k} \left(\partial_j U_{i,4}^{(m)k} + \partial_i U_{j,4}^{(m)k} \right) \partial_3^{2k} u_4^0(x_3, \varepsilon) \right\}, \\ \varepsilon_{i3}^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{l=1}^2 \sum_{k=0}^{N_l-1} \varepsilon^{2k+1} \partial_i U_{3,l}^{(m)k}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k+1} u_l^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=0}^{N_3-1} \varepsilon^{2k} \partial_i U_{3,3}^{(m)k}(\mathbf{x}) \times \right. \\ &\quad \times \partial_3^{2k} u_3^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=0}^{N_4-1} \varepsilon^{2k+1} \partial_i U_{3,4}^{(m)k}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k+1} u_4^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{l=1}^2 \sum_{k=0}^{N_l} \varepsilon^{2k+1} U_{i,l}^{(m)k}(\mathbf{x}) \times \\ &\quad \times \partial_3^{2k+1} u_l^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=0}^{N_3} \varepsilon^{2k} U_{i,3}^{(m)k}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k} u_3^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=0}^{N_4} \varepsilon^{2k+1} U_{i,4}^{(m)k}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k+1} u_4^0(x_3, \varepsilon) \left. \right\}, \\ \varepsilon_{33}^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) &= \sum_{l=1}^2 \sum_{k=0}^{N_l-1} \varepsilon^{2k+2} U_{3,l}^{(m)k}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k+2} u_l^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=0}^{N_3-1} \varepsilon^{2k+1} U_{3,3}^{(m)k}(\mathbf{x}) \times \end{aligned}$$

$$\times \partial_3^{2k+1} u_3^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=0}^{N_4-1} \varepsilon^{2k+2} U_{3,4}^{(m)k}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k+2} u_4^0(x_3, \varepsilon), \quad 1 \leq m \leq M, \quad i, j = 1, 2,$$

где нужно учесть равенства (20).

Для компонентов тензора безразмерных напряжений примем следующие асимптотические представления

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) &= \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{N_l} \varepsilon^{2k} \tau_{ij,l}^{(m)2k}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k} u_l^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{N_3} \varepsilon^{2k-1} \tau_{ij,3}^{(m)2k-1}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k-1} u_3^0(x_3, \varepsilon) + \\ &+ \sum_{k=1}^{N_4} \varepsilon^{2k} \tau_{ij,4}^{(m)2k}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k} u_4^0(x_3, \varepsilon), \quad \sigma_{i3}^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) = \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{N_l-1} \varepsilon^{2k+1} \tau_{i3,l}^{(m)2k+1}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k+1} u_l^0(x_3, \varepsilon) + \\ &+ \sum_{k=1}^{N_3-1} \varepsilon^{2k} \tau_{i3,3}^{(m)2k}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k} u_3^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=0}^{N_4-1} \varepsilon^{2k+1} \tau_{i3,4}^{(m)2k+1}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k+1} u_4^0(x_3, \varepsilon), \quad (28) \\ \sigma_{33}^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) &= \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{N_l-1} \varepsilon^{2k} \tau_{33,l}^{(m)2k}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k} u_l^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{N_3-1} \varepsilon^{2k-1} \tau_{33,3}^{(m)2k-1}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k-1} u_3^0(x_3, \varepsilon) + \\ &+ \sum_{k=1}^{N_4-1} \varepsilon^{2k} \tau_{33,4}^{(m)2k}(\mathbf{x}) \partial_3^{2k} u_4^0(x_3, \varepsilon), \quad 1 \leq m \leq M, \quad i, j = 1, 2. \end{aligned}$$

Учитывая (13), (16), потребуем выполнения следующих равенств между характеристическими функциями в разложениях (27) и (28)

$$\begin{aligned} \tau_{ii,l}^{k_1(m)} &= \gamma^{(m)} \partial_l^k U_{i,l}^{(m)k} + \lambda^{(m)} \left(\partial_j^k U_{j,l}^{(m)k} + U_{3,l}^{(m)k-1} \right) - \chi_T \beta^{(m)k_1} \Theta_l T^{(m)}, \quad 1 \leq k \leq N_l, \\ \tau_{i3,l}^{k_2(m)} &= \mu^{(m)} \left(\partial_l^k U_{3,l}^{(m)k} + U_{i,l}^{(m)k} \right), \quad 0 \leq k \leq N_l - 1, \quad i, j = 1, 2, \\ \tau_{33,l}^{k_1(m)} &= \gamma^{(m)} U_{3,l}^{(m)k-1} + \lambda^{(m)} \left(\partial_1^k U_{1,l}^{(m)k} + \partial_2^k U_{2,l}^{(m)k} \right) - \chi_T \beta^{(m)k_1} \Theta_l T^{(m)}, \quad 1 \leq k \leq N_l - 1, \\ \tau_{12,l}^{k_1(m)} &= \mu^{(m)} \left(\partial_1^k U_{2,l}^{(m)k} + \partial_2^k U_{1,l}^{(m)k} \right), \quad 1 \leq k \leq N_l, \quad l = \overline{1, 4}, \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\gamma^{(m)} = 2\mu^{(m)} + \lambda^{(m)}, \quad k_2(k, l) = k_1 + 1, \quad k_1(k, l) = \begin{cases} 2k & \text{при } l = 1, 2, 4, \\ 2k - 1 & \text{при } l = 3. \end{cases} \quad (30)$$

В правых частях соотношений (29) нужно учесть равенства (20).

Подставим (27), (28), третье равенство (13) и (16) в соотношения Дюамеля-Неймана (5) и учтем (20), (29), (30), тогда получим, что для $\sigma_{ij}^{(m)}$ ($i, j = 1, 2$) соотношения Дюамеля-Неймана выполняются точно, а для $\sigma_{i3}^{(m)}$ ($i = \overline{1, 3}$) лишь приближенно (асимптотически)

$$\begin{aligned} \sigma_{i3}^{(m)} - 2\mu^{(m)} \varepsilon_{i3}^{(m)} &= -\mu^{(m)} \left\{ \sum_{l=1}^2 \varepsilon^{2N_l+1} U_{i,l}^{(m)N_l}(\mathbf{x}) \partial_3^{2N_l+1} u_l^0(x_3, \varepsilon) + \right. \\ &+ \left. \varepsilon^{2N_3} U_{i,3}^{(m)N_3}(\mathbf{x}) \partial_3^{2N_3} u_3^0(x_3, \varepsilon) + \varepsilon^{2N_4+1} U_{i,4}^{(m)N_4}(\mathbf{x}) \partial_3^{2N_4+1} u_4^0(x_3, \varepsilon) \right\}, \quad i = 1, 2, \\ \sigma_{33}^{(m)} - \gamma^{(m)} \varepsilon_{33}^{(m)} - \lambda^{(m)} (\varepsilon_{11}^{(m)} + \varepsilon_{22}^{(m)}) + \chi_T \beta^{(m)} \theta^{(m)} &= -\sum_{l=1}^2 \varepsilon^{2N_l} \tau_{33,l}^{(m)2N_l}(\mathbf{x}) \partial_3^{2N_l} u_l^0(x_3, \varepsilon) - \\ &- \varepsilon^{2N_3-1} \tau_{33,3}^{(m)2N_3-1}(\mathbf{x}) \partial_3^{2N_3-1} u_3^0(x_3, \varepsilon) - \varepsilon^{2N_4} \tau_{33,4}^{(m)2N_4}(\mathbf{x}) \partial_3^{2N_4} u_4^0(x_3, \varepsilon). \end{aligned} \quad (31)$$

Для характеристических функций $\tau_{ij,l}^{(m)}(\mathbf{x})$ в (28) и $U_{i,l}^{(m)}(\mathbf{x})$ в (19) потребуем выполнения следующих равенств: во внутренних точках поперечного сечения m -го слоя

$$\begin{aligned} \partial_1 \tau_{i1,l}^{(m)} + \partial_2 \tau_{i2,l}^{(m)} + \tau_{i3,l}^{(m)} &= -\chi_X G_{i,l}^{k_1} F_i^{(m)} \quad (i=1, 2, \quad 1 \leq k \leq N_l), \\ \partial_1 \tau_{13,4}^{(m)} + \partial_2 \tau_{23,4}^{(m)} &= -\chi_X G_{3,4}^1 F_3^{(m)}, \quad \partial_1 \tau_{13,l}^{(m)} + \partial_2 \tau_{23,l}^{(m)} + \tau_{33,l}^{(m)} = -\chi_X G_{3,l}^{k_2} F_3^{(m)} \quad (32) \\ (1 \leq k \leq N_l - 1, \quad \mathbf{x} \in G_m, \quad 1 \leq m \leq M); \end{aligned}$$

на боковой поверхности стержня

$$\begin{aligned} n_1^{(p)} \tau_{i1,l}^{(p)} + n_2^{(p)} \tau_{i2,l}^{(p)} &= \chi_q Q_{i,l}^{k_1} f_i(\mathbf{x}) \quad (i=1, 2, \quad 1 \leq k \leq N_l), \\ n_1^{(p)} \tau_{13,4}^{(p)} + n_2^{(p)} \tau_{23,4}^{(p)} &= \chi_q Q_{3,4}^1 f_3(\mathbf{x}), \quad (33) \\ n_1^{(p)} \tau_{13,l}^{(p)} + n_2^{(p)} \tau_{23,l}^{(p)} &= \chi_q Q_{3,l}^{k_2} f_3(\mathbf{x}) \quad (1 \leq k \leq N_l - 1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma); \end{aligned}$$

на границе контакта m -го и n -го слоев стержня

$$\begin{aligned} n_1^{(m)} \tau_{i1,l}^{(m)} + n_2^{(m)} \tau_{i2,l}^{(m)} &= n_1^{(n)} \tau_{i1,l}^{(n)} + n_2^{(n)} \tau_{i2,l}^{(n)} \quad (i=1, 2, \quad 1 \leq k \leq N_l), \\ n_1^{(m)} \tau_{13,4}^{(m)} + n_2^{(m)} \tau_{23,4}^{(m)} &= n_1^{(n)} \tau_{13,4}^{(n)} + n_2^{(n)} \tau_{23,4}^{(n)}, \quad (34) \\ n_1^{(m)} \tau_{13,l}^{(m)} + n_2^{(m)} \tau_{23,l}^{(m)} &= n_1^{(n)} \tau_{13,l}^{(n)} + n_2^{(n)} \tau_{23,l}^{(n)} \quad (1 \leq k \leq N_l - 1); \end{aligned}$$

$$U_{i,l}^{(m)} = U_{i,l}^{(n)} \quad (i=1, 2, \quad 1 \leq k \leq N_l), \quad (35)$$

$$U_{3,4}^{(m)} = U_{3,4}^{(n)}, \quad U_{3,l}^{(m)} = U_{3,l}^{(n)} \quad (1 \leq k \leq N_l - 1, \quad l = \overline{1, 4}),$$

где нужно учесть (30) и, согласно (28), следующие равенства

$$\tau_{i3,l}^{(m)} \equiv 0, \quad i, l = 1, 2, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (36)$$

При подстановке разложений (19), (28) в равенства (1)-(3) с учетом (20), (32)-(36), (30), (13)-(18) получим, что они тождественно выполняются.

Проинтегрируем уравнения (32) по поперечному сечению стержня, тогда на основании формулы Гаусса-Остроградского с учетом условий сопряжения (34) и равенств (36) получим необходимые условия разрешимости соответствующей двумерной краевой задачи

$$\chi_q Q_{3,4}^1 + \chi_X G_{3,4}^1 = \chi_q Q_{i,3}^1 + \chi_X G_{i,3}^1 = \chi_q Q_{i,l}^2 + \chi_X G_{i,l}^2 = 0, \quad i, l = 1, 2; \quad (37)$$

$$\chi_q Q_{i,4}^2 + \chi_X G_{i,4}^2 = -\sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \tau_{i3,4}^{(m)}(\mathbf{x}) dF,$$

$$\chi_q Q_{i,l}^{k_1} + \chi_X G_{i,l}^{k_1} = -\sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \tau_{i3,l}^{(m)}(\mathbf{x}) dF \quad (i=1, 2, \quad 2 \leq k \leq N_l), \quad (38)$$

$$\chi_q Q_{3,l}^{k_2} + \chi_X G_{3,l}^{k_2} = -\sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \tau_{33,l}^{(m)}(\mathbf{x}) dF \quad (1 \leq k \leq N_l - 1, \quad l = \overline{1, 4}),$$

где следует учесть (30).

Подставим выражения (29) в равенства (32)–(34), тогда для определения характеристических функций перемещений $U_{i,l}^{(m)k}(\mathbf{x})$ получим два типа краевых задач.

Первый тип краевых задач состоит из:

уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \partial_1 \left(\mu^{(m)} \partial_1 U_{3,l}^{(m)k} \right) + \partial_2 \left(\mu^{(m)} \partial_2 U_{3,l}^{(m)k} \right) = & -\gamma^{(m)} U_{3,l}^{(m)k-1} - \lambda^{(m)} \left(\partial_1 U_{1,l}^{(m)k} + \right. \\ & \left. + \partial_2 U_{2,l}^{(m)k} \right) - \partial_1 \left(\mu^{(m)} U_{1,l}^{(m)k} \right) - \partial_2 \left(\mu^{(m)} U_{2,l}^{(m)k} \right) - \chi_X G_{3,l}^{k_2} F_3^{(m)}(\mathbf{x}) + \\ & + \chi_T \beta^{(m)k_1} \Theta_l T^{(m)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G_m, \quad 0 \leq k \leq N_l - 1, \quad 1 \leq m \leq M; \end{aligned} \quad (39)$$

условий сопряжения решения на границе контакта m -го и n -го слоев стержня (см. (3), (34), (35))

$$\begin{aligned} \left[n_1^{(r)} \mu^{(r)} \left(\partial_1 U_{3,l}^{(r)k} + U_{1,l}^{(r)k} \right) + n_2^{(r)} \mu^{(r)} \left(\partial_2 U_{3,l}^{(r)k} + U_{2,l}^{(r)k} \right) \right]_{r=m}^{r=n} = & 0, \\ U_{3,l}^{(m)k} = U_{3,l}^{(n)k}, \quad 0 \leq k \leq N_l - 1; \end{aligned} \quad (40)$$

граничных условий на боковой поверхности стержня (см. (2), (33))

$$\begin{aligned} \mu^{(p)} \left(n_1^{(p)} \partial_1 U_{3,l}^{(p)k} + n_2^{(p)} \partial_2 U_{3,l}^{(p)k} \right) = & \chi_q Q_{3,l}^{k_2} f_3(\mathbf{x}) - \\ - \mu^{(p)} \left(n_1^{(p)} U_{1,l}^{(p)k} + n_2^{(p)} U_{2,l}^{(p)k} \right), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad 0 \leq k \leq N_l - 1, \end{aligned} \quad (41)$$

где, согласно (29), (38)

$$\begin{aligned} \chi_q Q_{3,l}^{k_2} + \chi_X G_{3,l}^{k_2} = & - \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left\{ \gamma^{(m)} U_{3,l}^{(m)k-1} + \lambda^{(m)} \left(\partial_1 U_{1,l}^{(m)k} + \partial_2 U_{2,l}^{(m)k} \right) - \right. \\ & \left. - \chi_T \beta^{(m)k_1} \Theta_l T^{(m)}(\mathbf{x}) \right\} dF, \quad 0 \leq k \leq N_l - 1, \quad l = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (42)$$

В равенствах (39)-(42) нужно учесть (30), (20), (37), а также

$$U_{3,l}^{(m)k-1} = 0, \quad l = \overline{1, 4}, \quad 1 \leq m \leq M. \quad (43)$$

Второй тип краевых задач состоит из:

уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \partial_i \left\{ \gamma^{(m)} \partial_i U_{i,l}^{(m)k} + \lambda^{(m)} \partial_j U_{j,l}^{(m)k} \right\} + \partial_j \left\{ \mu^{(m)} \left(\partial_j U_{i,l}^{(m)k} + \partial_i U_{j,l}^{(m)k} \right) \right\} = \\ = -\mu^{(m)} \left(\partial_i U_{3,l}^{(m)k} + U_{i,l}^{(m)k} \right) - \partial_i \left(\lambda^{(m)} U_{3,l}^{(m)k-1} \right) - \chi_X G_{i,l}^{k_1} F_i^{(m)} + \chi_T \beta^{(m)k_1} \Theta_l T^{(m)}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\mathbf{x} \in G_m, \quad 1 \leq k \leq N_l, \quad 1 \leq m \leq M;$$

условий сопряжения решения на границе контакта m -го и n -го слоев стержня (см. (3), (34), (35))

$$\left[n_i^{(r)} \left\{ \gamma^{(r)} \partial_i U_{i,l}^{(r)} + \lambda^{(r)} \left(\partial_j U_{j,l}^{(r)} + U_{3,l}^{(r)} \right) - \chi_T \beta^{(r)} \Theta_l T^{(r)} \right\} + n_j^{(r)} \mu^{(r)} \times \right. \\ \left. \times \left(\partial_j U_{i,l}^{(r)} + \partial_i U_{j,l}^{(r)} \right) \right]_{r=m}^{r=n} = 0, \quad U_{i,l}^{(m)} = U_{i,l}^{(n)}, \quad (45)$$

$$1 \leq k \leq N_l, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2;$$

граничных условий на боковой поверхности стержня (см. (2), (33))

$$n_i^{(p)} \left\{ \gamma^{(p)} \partial_i U_{i,l}^{(p)} + \lambda^{(p)} \partial_j U_{j,l}^{(p)} \right\} + n_j^{(p)} \mu^{(p)} \left(\partial_j U_{i,l}^{(p)} + \partial_i U_{j,l}^{(p)} \right) = \\ = \chi_q Q_{i,l}^{k_1} f_i(\mathbf{x}) - n_i^{(p)} \left(\lambda^{(p)} U_{3,l}^{(p)} - \chi_T \beta^{(p)} \Theta_l T^{(p)} \right), \quad (46)$$

$$\mathbf{x} \in \Gamma, \quad 1 \leq k \leq N_l, \quad j = 3 - i, \quad i = 1, 2, \quad l = \overline{1, 4},$$

где, согласно (29), (38)

$$\chi_q Q_{i,l}^{k_1} + \chi_x G_{i,l}^{k_1} = - \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \mu^{(m)} \left(\partial_i U_{3,l}^{(m)} + U_{i,l}^{(m)} \right) dF, \quad (47)$$

$$1 \leq k \leq N_l, \quad i = 1, 2, \quad l = \overline{1, 4}.$$

В равенствах (44)-(47) нужно учесть (30), (37) и (20). Индекс « p » в соотношениях (41), (46) пробегает те же значения от 1 до M , что и в (2). В правые части равенств (39), (41), (44), (46) перенесены все функции, которые предполагаются уже известными при фиксированном номере k .

Таким образом, при заданном наборе параметров переключения (9)-(11)

для определения всех характеристических функций перемещений $U_{i,l}^{(m)}$, входящих в (19), для каждого k нужно решить четыре краевые задачи первого типа, а затем четыре краевые задачи второго типа ($l = \overline{1, 4}$). При $k = 0$ первая краевая задача (39)-(41) с учетом (42), (43) согласно (20), (19) решается только при $l = 4$.

Если материалы слоев стержня являются однородными ($\mu^{(m)} = \text{const}$, $\lambda^{(m)} = \text{const}$, $1 \leq m \leq M$), то уравнение (39) является уравнением Пуассона, проинтегрировать которое необходимо при ненулевых граничных условиях второго рода (41) и условиях сопряжения (40) (т.е. разыскивается обобщенное решение краевой задачи для уравнения Пуассона [17,23]). Необходимое условие разрешимости этой краевой задачи выполняется в силу представления коэффициента $Q_{3,l}^{k_2}$ (при задании значений (9)) или $G_{3,l}^{k_2}$ (при задании (10)) в виде (42) [17,23]. При этом обобщенная функция $U_{3,l}^{(m)}$ определяется с точностью до единственной константы, которая может быть фиксирована за счет использования интегрального равенства (24).

После того, как однозначно решена краевая задача первого типа, для следующего значения $k \geq 1$ интегрируется краевая задача второго типа (44)-(46) с учетом (47), которая формально совпадает с плоской задачей теории упругости (или термоупругости при задании значений (11)), решаемой в «перемещениях»

$U_{i,l}^{(m)}$ при статических граничных условиях (46), заданных на всем контуре Γ .

Известно, что решение такой задачи определяется с точностью до трех констант, соответствующих двум смещениям по осям x_i ($i=1, 2$) и повороту сечения как жесткого целого [20,24]. Для однозначного вычисления этих констант необходимо при каждом k использовать по три интегральных равенства (23), (26).

После решения краевых задач второго типа для этого же значения k решаются краевые задачи первого типа и т.д., пока не будут решены все необходимые краевые задачи и определены все характеристические функции перемещений, входящие в разложения (19) при разных значениях параметров переключения (9)-(11).

Как уже отмечалось, интегральные равенства (26), являющиеся следствием уточнения асимптотических разложений (19), в работах [9,11,13,14,16 и др.] получены не были, поэтому в рамках асимптотических разложений, предложенных в [9,11,13,14,16], нельзя в общем случае однозначно определить все характеристические функции перемещений, так как уравнения, аналогичные (44)-(46), были получены и в указанных работах как при механическом нагружении стержня (поверхностными (см. (9)) или объемными (см. (10)) силами), так и при тепловом воздействии (случай (11)). Все примеры решения конкретных задач, рассмотренные в [9,11,13,14,16 и др.], относятся к частному случаю, когда стержень (или ячейка периодичности в [16]) по своей структуре, нагружению и закреплению обладает симметрией относительно одной из плоскостей x_1x_3 или x_2x_3 . Такая симметрия исключает поворот сечений стержня (или ячейки периодичности в [16]), поэтому-то равенства (26) при решении таких задач использовать в [9,11,13,14,16 и др.] не потребовалось. (В силу этого обстоятельства сомнения вызывают и результаты, полученные в [16 и др.] при моделировании механического поведения двоякопериодических композитных сред.)

Кроме того, постоянные c_i , входящие в (19) (см. (20)), определялись в [9,11,13,14 и др.] не из соотношений, аналогичных (25), а из условия разрешимости краевой задачи второго типа при $k=1$. Согласно (44)-(46) имеются четыре формально схожих краевых задачи второго типа ($l=1, 4$) и лишь две постоянные c_i ($i=1, 2$), поэтому и здесь возникает неопределенность: при каком l следует вычислять постоянные c_i ? Это также свидетельствует о неудачном выборе асимптотических разложений перемещений в [9,11,13,14 и др.].

Таким образом, проведенное в настоящем разделе исследование показывает, что при выборе асимптотических разложений решения рассматриваемой задачи о пространственном деформировании композитного гибридного стержня в виде (19), (28) (с учетом (16), (20), (29)) уравнения равновесия (1), граничные условия на боковой поверхности стержня (2), условия сопряжения решения на поверхностях контакта слоев (3) и соотношения Коши (4) выполняются точно. Кроме того, точно выполняются и соотношения Дюамеля-Неймана (5) для компонентов напряжений $\sigma_{ij}^{(m)}$ ($i, j=1, 2$) и лишь асимптотически для компонентов $\sigma_{3l}^{(m)}$, $l=\overline{1, 3}$ (см. (31)).

3. СИСТЕМА РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ В СЛУЧАЕ МЕХАНИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ СТЕРЖНЯ

В случаях механического нагружения стержня параметры переключения имеют значения (9) или (10). При этом после последовательного решения для всех $k \geq 0$ краевых задач (39)-(41) и (44)-(46) с учетом (23)-(26), (43) по формулам (42), (47) для следующего значения k определяются коэффициенты $Q_{i,l}^{k_1}, Q_{3,l}^{k_2}, G_{i,l}^{k_1}, G_{3,l}^{k_2}$ не только в правых частях граничных условий (41) и (46) (при задании (9)) или правых частях уравнений равновесия (39), (44) (при задании (10)), но и коэффициенты в разложениях (17), (18), которые с учетом (37) можно рассматривать как системы разрешающих обыкновенных дифференциальных уравнений относительно обобщенных перемещений $u_l^0(x_3, \varepsilon)$, $l = \overline{1, 4}$ (см. (21)). При этом равенства (17), (18) не образуют замкнутых систем уравнений, относительно указанных функций. Для замыкания данных систем используем следующие преобразования.

Подставим разложения (28) в уравнения равновесия (1), граничные условия (2) и условия сопряжения решения (3), затем проинтегрируем уравнения равновесия (1) по площади поперечного сечения стержня F и используем формулу Гаусса-Остроградского, тогда с учетом (2), (3), (14), (15), (32)-(38) при задании значений параметров переключения (9) или (10) получим равенства (17) или (18). Следовательно, равенства (17), (18) представляют собой уравнения равновесия стержня в интегральном смысле (равновесие элемента, выделенного из стержня двумя бесконечно близкими поперечными сечениями). Для замыкания этих систем умножим первые два уравнения (1) (при $i = 1, 2$) на $(-1)^i(x_j - c_j)$ ($j = 3 - i$), затем сложим их и проинтегрируем результат по площади поперечного сечения стержня, тогда с учетом формулы Гаусса-Остроградского и соотношений (2), (3), (14), (15), (32)-(38) получим:

при задании параметров переключения в виде (9)

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{N_l} \varepsilon^{2k} Q_{4,l}^{2k} \partial_3^{2k} u_l^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{N_3} \varepsilon^{2k-1} Q_{4,3}^{2k-1} \partial_3^{2k-1} u_3^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{N_4} \varepsilon^{2k} Q_{4,4}^{2k} \partial_3^{2k} u_4^0(x_3, \varepsilon) = m_q(x_3, \varepsilon); \quad (48)$$

при задании параметров переключения в виде (10)

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{N_l} \varepsilon^{2k} G_{4,l}^{2k} \partial_3^{2k} u_l^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{N_3} \varepsilon^{2k-1} G_{4,3}^{2k-1} \partial_3^{2k-1} u_3^0(x_3, \varepsilon) + \sum_{k=1}^{N_4} \varepsilon^{2k} G_{4,4}^{2k} \partial_3^{2k} u_4^0(x_3, \varepsilon) = M_x(x_3, \varepsilon), \quad (49)$$

где

$$m_q(x_3, \varepsilon) = \oint_{\Gamma} \{ (x_1 - c_1) q_2(\mathbf{r}, \varepsilon) - (x_2 - c_2) q_1(\mathbf{r}, \varepsilon) \} d\Gamma = \\ = p_2(x_3, \varepsilon) \oint_{\Gamma} (x_1 - c_1) f_2(\Gamma) d\Gamma - p_1(x_3, \varepsilon) \oint_{\Gamma} (x_2 - c_2) f_1(\Gamma) d\Gamma, \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
 M_X(x_3, \varepsilon) &= \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left\{ (x_2 - c_2) X_1^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) - (x_1 - c_1) X_2^{(m)}(\mathbf{r}, \varepsilon) \right\} dF = \\
 &= -P_1(x_3, \varepsilon) \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (x_2 - c_2) F_1^{(m)}(\mathbf{x}) dF + P_2(x_3, \varepsilon) \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (x_1 - c_1) F_2^{(m)}(\mathbf{x}) dF; \\
 Q_{4,l}^{k_1} &= \oint_{\Gamma} \left\{ (x_1 - c_1) \left(n_1^{(p)} \tau_{12,l}^{k_1} + n_2^{(p)} \tau_{22,l}^{k_1} \right) - (x_2 - c_2) \left(n_1^{(p)} \tau_{11,l}^{k_1} + n_2^{(p)} \tau_{12,l}^{k_1} \right) \right\} d\Gamma = \\
 &= - \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \mu^{(m)} \left\{ (x_1 - c_1) \left(\partial_2 U_{3,l}^{k_1} + U_{2,l}^{k_1} \right) - (x_2 - c_2) \left(\partial_1 U_{3,l}^{k_1} + U_{1,l}^{k_1} \right) \right\} dF = \text{const}, \\
 G_{4,l}^{k_1} &= - \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left\{ (x_1 - c_1) \left(\partial_1 \tau_{21,l}^{k_1} + \partial_2 \tau_{22,l}^{k_1} + \tau_{23,l}^{k_1} \right) - (x_2 - c_2) \times \right. \\
 &\times \left. \left(\partial_1 \tau_{11,l}^{k_1} + \partial_2 \tau_{12,l}^{k_1} + \tau_{13,l}^{k_1} \right) \right\} dF = - \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \mu^{(m)} \left\{ (x_1 - c_1) \left(\partial_2 U_{3,l}^{k_1} + U_{2,l}^{k_1} \right) - \right. \\
 &\left. - (x_2 - c_2) \left(\partial_1 U_{3,l}^{k_1} + U_{1,l}^{k_1} \right) \right\} dF = \text{const}, \quad 1 \leq k \leq N_l, \quad l = \overline{1, 4}.
 \end{aligned} \tag{51}$$

Здесь нужно учесть (30). Индекс «*p*» в соотношениях (51) пробегает те же значения от 1 до *M*, что и в (2). Согласно (50) равенства (48), (49) связывают кинематические характеристики деформированного стержня u_l^0 ($l = \overline{1, 4}$) с главным моментом m_q внешних поверхностных сил q_i , приложенных к контуру Γ поперечного сечения, задаваемого продольной координатой x_3 , или с главным моментом M_X внешних объемных сил $X_i^{(m)}$ ($i = 1, 2$).

При преобразовании интегралов в (51) использованы формула Гаусса-Остроградского и соотношения (29), (32), (33) при соответствующем задании параметров переключения (9) или (10), причем согласно (36), (28), (29) при $k = 1$ имеем

$$Q_{4,l}^2 = Q_{4,3}^1 = 0, \quad G_{4,l}^2 = G_{4,3}^1 = 0, \quad l = 1, 2. \tag{52}$$

Таким образом, замкнутая система разрешающих уравнений при задании значений (9) состоит из (17), (48), а при задании (10) – из (18), (49).

При вычислении коэффициентов в этих равенствах ($Q_{i,l}^{k_1}$, $G_{i,l}^{k_1}$ и др.) необходимо учитывать соотношения (51), (52), (30), (37), (42), (47). Указанные коэффициенты можно трактовать как безразмерные эффективные жесткости композитного стержня при растяжении – сжатии, изгибе и кручении (соответственно в случаях действия поверхностных или объемных нагрузок). Согласно подынтегральным выражениям в (42), (47), (51), эти жесткости определяются характеристическими функциями перемещений $U_{i,l}^{k_1}$, которые поэтому естественно назвать жесткостными функциями (отсюда и название «метод жесткостных функций» [13,14]).

Наименьшие значения N_l , при которых системы (17), (48) и (18), (49) с учетом (37), (52) имеют смысл, таковы: $N_1 = N_2 = N_3 = 2$, $N_4 = 1$. При этом

в случае задания параметров переключения в виде (9) система (17), (48) принимает следующий простейший вид

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 \varepsilon^4 Q_{i,l}^4 \partial_3^4 u_l^0 + \varepsilon^3 Q_{i,3}^3 \partial_3^3 u_3^0 + \varepsilon^2 Q_{i,4}^2 \partial_3^2 u_4^0 &= p_i(x_3, \varepsilon), \quad i = 1, 2, \\ \sum_{l=1}^2 \varepsilon^3 Q_{3,l}^3 \partial_3^3 u_l^0 + \varepsilon^2 Q_{3,3}^2 \partial_3^2 u_3^0 &= p_3(x_3, \varepsilon), \\ \sum_{l=1}^2 \varepsilon^4 Q_{4,l}^4 \partial_3^4 u_l^0 + \varepsilon^3 Q_{4,3}^3 \partial_3^3 u_3^0 + \varepsilon^2 Q_{4,4}^2 \partial_3^2 u_4^0 &= m_q(x_3, \varepsilon); \end{aligned} \quad (53)$$

в случае же задания значений (10) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 \varepsilon^4 G_{i,l}^4 \partial_3^4 u_l^0 + \varepsilon^3 G_{i,3}^3 \partial_3^3 u_3^0 + \varepsilon^2 G_{i,4}^2 \partial_3^2 u_4^0 &= P_i(x_3, \varepsilon), \quad i = 1, 2, \\ \sum_{l=1}^2 \varepsilon^3 G_{3,l}^3 \partial_3^3 u_l^0 + \varepsilon^2 G_{3,3}^2 \partial_3^2 u_3^0 &= P_3(x_3, \varepsilon), \\ \sum_{l=1}^2 \varepsilon^4 G_{4,l}^4 \partial_3^4 u_l^0 + \varepsilon^3 G_{4,3}^3 \partial_3^3 u_3^0 + \varepsilon^2 G_{4,4}^2 \partial_3^2 u_4^0 &= M_X(x_3, \varepsilon). \end{aligned} \quad (54)$$

Анализ соотношений (42), (47) с учетом (37), (39)–(41), (43)–(46), (9), (10) показывает, что соответствующие коэффициенты в левых частях уравнений (53), (54) полностью совпадают, т.е. имеют место равенства

$$\begin{aligned} G_{i,l}^4 = Q_{i,l}^4, \quad G_{i,3}^3 = Q_{i,3}^3, \quad G_{i,4}^2 = Q_{i,4}^2, \quad G_{3,l}^3 = Q_{3,l}^3, \quad G_{3,3}^2 = Q_{3,3}^2, \\ i = 1, 2, 4, \quad l = 1, 2. \end{aligned} \quad (55)$$

На основании (55) и представления решения исследуемой задачи в виде суммы (12) при задании значений параметров переключения в виде (9), (10) можно просуммировать соответствующие уравнения из (53), (54) и рассматривать только одну систему

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^2 \varepsilon^4 Q_{i,l}^4 \partial_3^4 u_l^0 + \varepsilon^3 Q_{i,3}^3 \partial_3^3 u_3^0 + \varepsilon^2 Q_{i,4}^2 \partial_3^2 u_4^0 &= p_i(x_3, \varepsilon) + P_i(x_3, \varepsilon), \\ \sum_{l=1}^2 \varepsilon^3 Q_{3,l}^3 \partial_3^3 u_l^0 + \varepsilon^2 Q_{3,3}^2 \partial_3^2 u_3^0 &= p_3(x_3, \varepsilon) + P_3(x_3, \varepsilon), \quad i = 1, 2, \\ \sum_{l=1}^2 \varepsilon^4 Q_{4,l}^4 \partial_3^4 u_l^0 + \varepsilon^3 Q_{4,3}^3 \partial_3^3 u_3^0 + \varepsilon^2 Q_{4,4}^2 \partial_3^2 u_4^0 &= m_q(x_3, \varepsilon) + M_X(x_3, \varepsilon). \end{aligned} \quad (56)$$

В работе [18] подробно разобраны способы вычисления коэффициентов в левых частях системы (53) для некоторых частных случаев. Согласно (55) эти же результаты полностью переносятся и на системы разрешающих уравнений (54), (56), поэтому не будем их здесь повторять (см. (3.4)–(3.30) в [18]), однако отметим: согласно (3.24) из [18] в равенствах (53), (56) следует учесть

$$Q_{i,4}^2 = 0, \quad i = 1, 2. \quad (57)$$

Кроме того, в [18] показано, что система (53) (а значит, согласно (55) и системы (54), (56)) совпадает с уравнениями равновесия стержня, получаемыми в курсе «Сопроотивления материалов» при использовании гипотезы плоских сечений [25] (см. (20)). Правые части в (56) представляют собой равнодействующие внешних сил от совместного действия поверхностных и объемных нагрузок. Следовательно, на основании (56) можно утверждать, что

в первом асимптотическом приближении обобщенные перемещения $u_l^0(x_3, \varepsilon)$ ($l = \overline{1, 4}$) можно разыскивать сразу от совместного действия поверхностных и объемных нагрузок (как это и делается традиционно в курсе «Сопротивления материалов» [25]), так как соответствующие жесткостные функции $U_{i,l}^{(m)}$ ($i = \overline{1, 3}$, $l = \overline{1, 4}$) в разложениях (19) при $N_1 = N_2 = N_3 = 2$, $N_4 = 1$ с учетом (20), (39)-(41), (43)-(46) полностью совпадают при задании значений параметров переключения в виде (9), (10).

В монографии [11] на основании неполного асимптотического представления решения, отличного от (19), (20), утверждается, что «решение задачи о кручении слоистого стержня строится совершенно независимо от задачи о поперечном изгибе ... и о продольно-поперечном изгибе» (см. стр.114 в [11]). Анализ же системы (53), проведенный в [18], показывает, что в общем случае задача о кручении композитного стержня не может быть решена независимо от задач об его изгибе и растяжении – сжатии. Согласно (55) этот вывод справедлив и для систем (54), (56), кроме того, он полностью совпадает с результатами, полученными ранее для тонкостенных стержней [5], которые являются частным случаем конструкций, рассматриваемых в настоящем исследовании.

Следует отметить, что предложенные в настоящей работе асимптотические разложения (19), (28) качественно согласуются с теорией деформирования тонкостенных стержней. Действительно, согласно [5] нормальное напряжение в поперечном сечении тонкостенного стержня (в данном исследовании это $\sigma_{33}^{(m)}$) складывается из четырех слагаемых, порожденных осевой силой (этому в (28) соответствует группа слагаемых, содержащих $\partial_3^{2k-1} u_3^0$), двумя изгибающими моментами (этому в (28) соответствует группа слагаемых, содержащих $\partial_3^{2k} u_l^0$, $l = 1, 2$) и биполярным моментом (этому в (28) соответствует группа слагаемых, содержащих $\partial_3^{2k} u_4^0$).

Для однозначного интегрирования систем (53), (54), (56) с учетом (57) на концах стержня ($x_3 = 0$ и $x_3 = 1$) нужно задать по шесть граничных условий. Так как системы (53), (54), (56) получены при $N_1 = N_2 = N_3 = 2$, $N_4 = 1$, то при этих значениях N_l ($l = \overline{1, 4}$) на основании (19), (20) и (28), (29) получим, что в общем случае граничные условия на торцах стержня (6), (7) точно удовлетворить не удастся, поэтому будем удовлетворять эти равенства, как и в [18], лишь в интегральном смысле (см. соотношения (3.31), (3.32) в [18], где, согласно правым частям в (6), (7), следует сделать замены $q_i^* \rightarrow \chi_q q_i^*$, $u_i^* \rightarrow \chi_q u_i^*$, $i = \overline{1, 3}$).

После решения двухточечных граничных задач, соответствующих системам (53), (54), (56), определим искомые функции $u_l^0(x_3, \varepsilon)$ ($l = \overline{1, 4}$) в первом приближении. Затем по формулам (19), (28) с учетом (20), (29), (30) можно определить в первом приближении поля перемещений и напряжений в композитном стержне.

Согласно (31) для увеличения асимптотической точности выполнения соотношений Дюамеля-Неймана (которые в случаях (9), (10) редуцируются

в закон Гука) в разложениях (19), (28) необходимо удерживать большее количество слагаемых, чем это требуется в первом приближении (т.е. нужно задать $N_l \geq 3$, $N_4 \geq 2$, $l = \overline{1, 3}$). В этом случае вместо (53) следует использовать систему (17), (48), а вместо (54) – систему (18), (49), которые являются системами жестких дифференциальных уравнений с сингулярным возмущением [26].

Повторяя рассуждения из [11], можно показать, что полные решения систем (17), (48) и (18), (49) при $N_l \geq 3$, $N_4 \geq 2$ ($l = \overline{1, 3}$) складывается из регулярных и сингулярных частей. Сохраняя лишь регулярные части решения этих систем, получим возможность описания основного напряженно-деформированного состояния (НДС) в композитном стержне за пределами зон пограничных слоев, возникающих в малых окрестностях его торцов ($x_3 = 0$ и $x_3 = 1$). При этом удастся асимптотически выполнить соотношения закона Гука (31). В первом приближении регулярные решения систем (17), (48) и (18), (49) описываются уравнениями (53), (54) соответственно.

Для выделения регулярной составляющей решения системы (17), (48) (или (18), (49)) используем следующую итерационную процедуру [17]. Оставим в левых частях равенств (17), (48) (или (18), (49)) лишь слагаемые, содержащие низшие производные от неизвестных функций u_l^0 ($l = \overline{1, 4}$), а остальные слагаемые перенесем в правые части, тогда с учетом (37), (52), (55), (57) получим

$$\begin{aligned} \varepsilon^4 \sum_{l=1}^2 Q_{i,l}^4 \partial_3^4 u_l^0 + \varepsilon^3 Q_{i,3}^3 \partial_3^3 u_3^0 &= P_i^r(x_3, \varepsilon), \quad i = 1, 2, \\ \varepsilon^3 \sum_{l=1}^2 Q_{3,l}^3 \partial_3^3 u_l^0 + \varepsilon^2 Q_{3,3}^2 \partial_3^2 u_3^0 &= P_3^r(x_3, \varepsilon), \\ \varepsilon^4 \sum_{l=1}^2 Q_{4,l}^4 \partial_3^4 u_l^0 + \varepsilon^3 Q_{4,3}^3 \partial_3^3 u_3^0 + \varepsilon^2 Q_{4,4}^2 \partial_3^2 u_4^0 &= M^r(x_3, \varepsilon), \end{aligned} \quad (58)$$

где при задании значений параметров переключения в виде (9)

$$\begin{aligned} P_i^r(x_3, \varepsilon) &\equiv p_i(x_3, \varepsilon) - \sum_{l=1}^2 \sum_{k=3}^{N_l} \varepsilon^{2k} Q_{i,l}^{2k} \partial_3^{2k} u_l^0(x_3, \varepsilon) - \sum_{k=3}^{N_3} \varepsilon^{2k-1} Q_{i,3}^{2k-1} \times \\ &\times \partial_3^{2k-1} u_3^0(x_3, \varepsilon) - \sum_{k=2}^{N_4} \varepsilon^{2k} Q_{i,4}^{2k} \partial_3^{2k} u_4^0(x_3, \varepsilon), \quad i = 1, 2, \\ P_3^r(x_3, \varepsilon) &\equiv p_3(x_3, \varepsilon) - \sum_{l=1}^2 \sum_{k=2}^{N_l-1} \varepsilon^{2k+1} Q_{3,l}^{2k+1} \partial_3^{2k+1} u_l^0(x_3, \varepsilon) - \sum_{k=2}^{N_3-1} \varepsilon^{2k} Q_{3,3}^{2k} \times \\ &\times \partial_3^{2k} u_3^0(x_3, \varepsilon) - \sum_{k=1}^{N_4-1} \varepsilon^{2k+1} Q_{3,4}^{2k+1} \partial_3^{2k+1} u_4^0(x_3, \varepsilon), \\ M^r(x_3, \varepsilon) &\equiv m_q(x_3, \varepsilon) - \sum_{l=1}^2 \sum_{k=3}^{N_l} \varepsilon^{2k} Q_{4,l}^{2k} \partial_3^{2k} u_l^0(x_3, \varepsilon) - \sum_{k=3}^{N_3} \varepsilon^{2k-1} Q_{4,3}^{2k-1} \times \\ &\times \partial_3^{2k-1} u_3^0(x_3, \varepsilon) - \sum_{k=2}^{N_4} \varepsilon^{2k} Q_{4,4}^{2k} \partial_3^{2k} u_4^0(x_3, \varepsilon), \quad r = s-1, \quad N_j \geq 2, \quad N_4 \geq 1, \quad j = \overline{1, 3}; \end{aligned} \quad (59)$$

При задании же значений параметров переключения в виде (10) в правых частях равенств (59) следует сделать замены

$$\begin{aligned}
 p_j \rightarrow P_j, \quad m_q \rightarrow M_x, \quad Q_{i,l}^{2k} \rightarrow G_{i,l}^{2k}, \quad Q_{i,3}^{2k-1} \rightarrow G_{i,3}^{2k-1}, \quad Q_{3,l}^{2k+1} \rightarrow G_{3,l}^{2k+1}, \\
 Q_{3,3}^{2k} \rightarrow G_{3,3}^{2k}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad i, l = \overline{1, 2, 4}.
 \end{aligned} \quad (60)$$

В равенствах (58), (59) s, r – номера текущей и предыдущей итераций соответственно.

Левые части равенств (58) с учетом (55) и (57) формально полностью совпадают с левыми частями уравнений (53), (54), поэтому для однозначного интегрирования системы (58) на s -й итерации, необходимо использовать на концах стержня граничные условия, заданные в интегральной форме и аналогичные (3.31), (3.32) из [18]. Согласно (59), (60) правые части в (58) можно трактовать как возмущенные внешние нагрузки в системах (53), (54). На первой итерации ($s = 1$) все слагаемые в (59), кроме первых, равны нулю ($u_l^0 \equiv 0, l = \overline{1, 4}$), поэтому решение системы (58) при $s = 1$ полностью совпадает с решением системы (53) или (54) (в случае (10), (60)), а последующие итерации (при $s \geq 2$) приводят к уточнению основного НДС в композитном стержне. (Отметим, что итерационная процедура, аналогичная (58), (59), используется, например, для определения основного моментного НДС в оболочках за пределами зон краевых эффектов [27].)

Соотношения (42), (47) с учетом (39)-(41) и (44)-(46) показывают, что коэффициенты $Q_{i,l}^{2k}$ и др., входящие в правые части равенств (59) при задании (9), не совпадают с коэффициентами $G_{i,l}^{2k}$ и др., входящими в (59) с учетом замен (60) при задании (10), так как в первом случае (см. (9)) коэффициенты $Q_{i,l}^{2k}$ и др. определяются из (42), (47) при наличии в граничных условиях (41), (46) контурных внешних нагрузок $f_i(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in \Gamma$), а во втором случае (см. (10)) коэффициенты $G_{i,l}^{2k}$ и др. вычисляются по формулам (42), (47) при наличии в правых частях уравнений равновесия (39), (44) внешних объемных сил $F_i^{(m)}(\mathbf{x})$ ($\mathbf{x} \in G_m, i = \overline{1, 3}, 1 \leq m \leq M$). При этом по-прежнему остаются справедливыми равенства (55). Следовательно, при построении более точных (при $N_l \geq 3, N_4 \geq 2, l = \overline{1, 3}$), чем в рамках курса «Сопrotivления материалов» (см. (53), (54)), асимптотических представлений неизвестных функций в рамках метода жесткостных функций уже нельзя решение рассматриваемой задачи разыскивать одновременно от совместного действия поверхностных и объемных нагрузок, как это было сделано выше в случае первого приближения (см. (56)), так как поправки к внешним нагрузкам в (58) согласно (59) или (59) с учетом (60) получаются разными. Таким образом, при $N_l \geq 3, N_4 \geq 2, l = \overline{1, 3}$ необходимо независимо решать задачи о деформировании композитного стержня под действием поверхностных и объемных нагрузок, а затем согласно (12) полученные решения нужно сложить.

Уточнение асимптотических разложений решения рассматриваемой задачи в зонах краевых эффектов, возникающих в окрестностях торцевых поверхностей композитного стержня [7,11], выходит за рамки настоящей работы.

4. СЛУЧАЙ ТЕПЛООВОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ НА СТЕРЖЕНЬ

В случае теплового воздействия на стержень параметры переключения имеют значения (11), которые необходимо учесть в краевых задачах (39)-(41) и (44)-(46). При этом левые части в равенствах (42), (47) равны нулю. В работе [11] (см. там пояснения к формулам (2.4.6), (2.4.7)) равенство (47) предлагается использовать для определения произвольных постоянных, с точностью до которых разыскиваются функции $U_{3,l}^{(m)k}(\mathbf{x})$ ($l = \overline{1, 4}$) из решения краевой задачи первого типа (39)-(41). Однако, как показано выше, эти константы однозначно определяются из интегральных равенств (24). Кроме того, повторяя рассуждения, приведенные на стр. 412 в [20], можно показать, что при $k=1$, $l=4$ с учетом (20) равенство нулю в (47) выполняется тождественно, т.е. в этом случае соотношение (47) вообще не может быть использовано для определения каких-либо величин (при этом в (47) $U_{3,l}^{(m)0}(\mathbf{x})$ является обобщенной функцией перемещения в задаче о кручении стержня в постановке Сен-Венана [20]).

Равенство (42) (с нулевой левой частью, согласно (11)) в работах [11,13] предлагается использовать для определения постоянных $\Theta_l^{k_1}$, являющихся коэффициентами разложения (16). Покажем, что в рамках метода жесткостных функций эти константы не могут быть определены однозначно. Действительно, помимо (42) можно получить еще два независимых интегральных равенства, содержащих константы $\Theta_l^{k_1}$. Для демонстрации этого факта умножим последнее равенство (32) на $x_i - c_i$ и результат проинтегрируем по площади поперечного сечения стержня, тогда на основании формулы Гаусса-Остроградского с учетом (11), (33), (34) получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (x_i - c_i) \left\{ \partial_1 \tau_{13,l}^{k_2} + \partial_2 \tau_{23,l}^{k_2} + \tau_{33,l}^{k_2-1} \right\} dF &= \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \left\{ \partial_1 \left((x_i - c_i) \tau_{13,l}^{k_2} \right) + \right. \\ &+ \partial_2 \left((x_i - c_i) \tau_{23,l}^{k_2} \right) - \tau_{i3,l}^{k_2} + (x_i - c_i) \tau_{33,l}^{k_2-1} \left. \right\} dF = - \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \tau_{i3,l}^{k_2} dF + \\ &+ \oint_{\Gamma} (x_i - c_i) \left\{ n_1^{(p)} \tau_{13,l}^{k_2} + n_2^{(p)} \tau_{23,l}^{k_2} \right\} d\Gamma + \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (x_i - c_i) \tau_{33,l}^{k_2-1} dF = \\ &= - \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} \tau_{i3,l}^{k_2} dF + \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (x_i - c_i) \tau_{33,l}^{k_2-1} dF = 0, \quad i = 1, 2, \quad l = \overline{1, 4}. \end{aligned} \quad (61)$$

Равенства (61) преобразуем за счет двух первых уравнений (38) (левые части в которых согласно (11) равны нулю) и предпоследнего соотношения (29), тогда получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^M \iint_{F_m} (x_i - c_i) \left\{ \gamma^{(m)} U_{3,l}^{k-1} + \lambda^{(m)} \left(\partial_1 U_{1,l}^k + \partial_2 U_{2,l}^k \right) - \right. \\ \left. - \beta^{(m)} \Theta_l^{k_1} T^{(m)}(\mathbf{x}) \right\} dF = 0, \quad 0 \leq k \leq N_l - 1, \quad i = 1, 2, \quad l = \overline{1, 4}, \end{aligned} \quad (62)$$

где нужно учесть соотношения (30).

Для каждого k и l три независимых уравнения (62) (при $i=1, 2$) и (42) (где левая часть согласно (11) равна нулю) определяют только одну постоянную $\Theta_l^{k_1}$. Очевидно, что одна эта константа не может быть однозначно определена из трех указанных независимых уравнений. Кроме того, как было показано в разделе 3, при механическом нагружении стержня (при задании параметров переключения в виде (9) или (10)) системы разрешающих уравнений (17), (48) или (18), (49) (в частности, (53) или (54)), определяющие обобщенные перемещения u_l^0 , получаются как интегральные уравнения равновесия стержня. Попытка построения таких уравнений в рамках метода жесткостных функций при тепловом воздействии (в случае (11)) приводит к тождествам типа $0 \equiv 0$, т.е. отсутствуют уравнения, позволяющие определить функции u_l^0 ($l = \overline{1, 4}$).

Указанные обстоятельства свидетельствуют о том, что в рамках метода жесткостных функций вообще нельзя решить термоупругую задачу о пространственном деформировании стержня.

В работах [11,13] этим методом якобы была решена модельная задача термоупругого деформирования двухслойного ($M=2$) стержня прямоугольного поперечного сечения (рис.2).

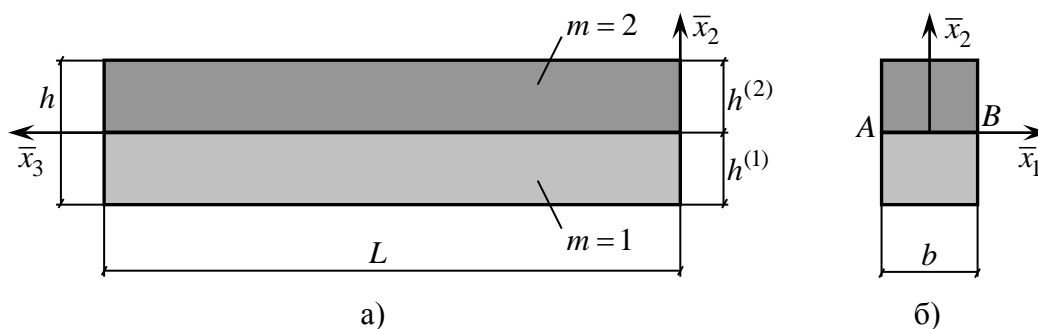


Рис.2. Двухслойная балка-стенка: а) – вид со стороны фасада балки; б) – поперечное сечение балки.

Слои имеют одинаковую высоту $h^{(1)} = h^{(2)} = h/2$ (см. рис.2,а) и ширину $b^{(1)} = b^{(2)} = b$ (см. рис.2,б). Упругие постоянные Ламе обоих слоев совпадают ($\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} = \mu^{(2)}$), а коэффициенты линейного теплового расширения различны: $\alpha^{(2)} = 4\alpha^{(1)}$. Стержень никак не закреплен и механически не нагружен, но равномерно нагрет ($\theta^{(1)} = \theta^{(2)} = \text{const} \neq 0$). В монографии [11] эта задача рассмотрена в разделе 2.4 «Воздействие температуры на слоистую балку». Однако на стр. 198 этого раздела один из основных подразделов называется «Плоская деформация слоистой балки под действием температуры». Само название этого подраздела свидетельствует о том, что авторы работ [11,13] в действительности подменили задачу о термоупругом деформировании слоистого стержня, изображенного на рис.2, задачей о термоупругом цилиндрическом изгибе двухслойной прямоугольной удлиненной пластины (т.е. вместо конечного значения ширины b рассматривался предельный случай $b \rightarrow \infty$). При этом построенное в [11,13] решение задачи не зависит от переменной \bar{x}_1 . Традиционный в рамках плоской задачи теории упругости пересчет упругих констант материалов слоев, позволяющий перейти от задачи о плоской

деформации к задаче об обобщенном плоском напряженном состоянии балки-стенки, в данном случае неуместен, так как авторы работ [11,13] утверждают, что ими построена теория решения задач о деформировании композитных стержней в трехмерной постановке. В силу того что $\alpha^{(2)} = 4\alpha^{(1)}$, в окрестности точек A и B , лежащих на пересечении боковой поверхности стержня с поверхностью контакта слоев (см. рис.2,б), должны возникать локальные зоны, в которых напряженное состояние является сложным и зависящим от переменной \bar{x}_1 , что не описывается решением, приведенным в [11,13] и полученным в рамках задачи о цилиндрическом изгибе двухслойной пластины (при $b \rightarrow \infty$).

Как было показано выше, решение термоупругой задачи о пространственном деформировании композитного стержня методом жесткостных функций вообще нельзя получить. Решение же, приведенное в [11,13], построено не для стержня, а для слоистой пластины. Пластины же в [11,14,28] рассчитываются совершенно другим методом, а именно, методом начальных функций [29-31], примененным к безразмерным уравнениям теории упругости для слоистых плит.

Таким образом, приведенный в [11,13] пример термоупругого поведения слоистого стержня (в действительности же пластины) нельзя признать демонстрацией эффективности использования метода жесткостных функций для решения задач о пространственном деформировании композитных стержней при их тепловом нагружении. Для решения таких задач, по-видимому, следует использовать более общие асимптотические разложения неизвестных функций, предложенные, например, в [7], а не разложения достаточно частного вида (16), (19), (20) с наперед заданной структурой коэффициентов при степенях малого параметра ε .

ВЫВОДЫ

Построенное уточнение асимптотического разложения решения задачи об упругом пространственном деформировании композитного стержня позволяет получить в рамках метода жесткостных функций все необходимые равенства для однозначного интегрирования двух- и одномерных краевых задач, возникающих после расщепления трехмерных уравнений теории упругости, чего не удавалось ранее добиться в [9,11,13,14 и др.]. Построенная асимптотика определяет основное НДС в композитном стержне (за пределами торцевых зон кромочных эффектов), нагруженном объемными и поверхностными внешними силами.

Полученные соотношения показывают, что в случае произвольной структуры армирования и при произвольном нагружении стержня все виды его нагружения влияют на все виды его деформирования. В частности, в общем случае нельзя решить задачу о кручении стержня независимо от задач его изгиба и растяжения, как это утверждается в [11], где была построена неполная асимптотика разложения решения пространственного изгиба и кручения композитных стержней. В первом асимптотическом приближении решение задачи об упругом деформировании стержня можно строить сразу от совместного действия объемных и поверхностных нагрузок, как это традиционно делается в курсе «Сопrotивления материалов» [25]. При построении же асимптотически более точных решений требуется раздельно решать задачи о деформировании композитных стержней под действием массовых и поверхностных нагрузок,

а затем, согласно принципу независимости действия сил, следует сложить полученные решения.

На основании построенной полной асимптотики решения задачи о термоупругом деформировании композитного стержня показано, что эта задача вообще не может быть решена методом жесткостных функций при тепловом нагружении стержня. Якобы полученные ранее этим методом в [11,13] решения такой задачи относятся в действительности к задаче о термоупругом цилиндрическом изгибе слоистой пластины, а не композитного стержня.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. *Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи.* – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 336 с.
2. Амбарцумян С.А. *Общая теория анизотропных оболочек.* – М.: Наука, 1974. – 446 с.
3. Немировский Ю.В., Мищенко А.В., Вохмянин И.Т. *Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем.* – Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 2004. – 488 с.
4. Пикуль В.В. *Механика оболочек.* – Владивосток: Дальнаука, 2009. – 536 с.
5. Юзиков В.П., Панасенко Н.Н. *Строительная механика тонкостенных стержней.* – Волгоград: Волгоградское научное изд-во, 2013. – 361 с.
6. Гольденвейзер А.Л. *Теория упругих тонких оболочек.* – М.: Наука, 1976. – 512 с.
7. Агаловян Л.А. *Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек.* – М.: Физматлит, 1997. – 414 с.
8. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Manevich L.I. *Asymptotical Mechanics of Thin-Walled Structures: A Handbook.* – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. – 535 p.
9. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. *Продольно-поперечный изгиб слоистых балок в трехмерной постановке // ПМТФ.* – 2004. – Т.45. – №6. – С.133-143.
10. Киселев В.В., Долгих Д.В. *Нелинейно-упругие узоры из вмятин на поверхностях нагруженных пластин и оболочек.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 164 с.
11. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. *Пространственные задачи изгиба и кручения слоистых конструкций. Метод асимптотического расщепления.* – Новосибирск: Наука, 2004. – 409 с.
12. Зино Е.И., Тропп Э.А. *Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости.* – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. – 224 с.
13. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. *Метод жесткостных функций в задачах расчета многослойных стержней при температурных нагрузках // Математические методы и физико-механические поля.* – 2012. – Т.55. – №2. – С.144-156.
14. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. *Метод жесткостных функций в задачах расчета многослойных стержней и плит // Вестник Нижегородского университета. Серия: Механика.* – 2011. – Вып.4.4. – С.1654-1656.
15. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. *Математическое моделирование процесса теплопроводности 2D-периодичных композитных анизотропных материалов*

- // Математические методы и физико-механические поля. – 2014. – Т.57. – №2. – С.142-151.
16. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. *Прогнозирование жесткостных характеристик бетонов при умеренных нагрузках // Известия Алтайского государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика.* – 2014. – №1–1 (81). – С.144-146.
 17. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов.* – М.: Наука, 1984. – 352 с.
 18. Янковский А.П. *Уточнение асимптотических разложений при решении пространственной задачи изгиба и кручения композитных стержней // ПММ.* – 2015. – Т.79. – Вып.5. – С.674-698.
 19. Васильев В.В., Протасов В.Д., Болотин В.В. и др. *Композиционные материалы: Справочник.* – М.: Машиностроение, 1990. – 512 с.
 20. Новацкий В. *Теория упругости.* – М.: Мир, 1975. – 872 с.
 21. Вольмир А.С. *Гибкие пластинки и оболочки.* – М.: Гос. изд-во техн.-теоретич. лит-ры, 1956. – 420 с.
 22. Левин В.Е., Пустовой Н.В. *Механика деформирования криволинейных стержней.* (Серия «Монографии НГТУ».) – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2008. – 208 с.
 23. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1977. – 735 с.
 24. Демидов С.П. *Теория упругости.* – М.: Высш. школа, 1979. – 432 с.
 25. Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов: Учебник для вузов.* 9-е изд., перераб. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. – 512 с.
 26. Найфэ А. *Введение в методы возмущений.* – М.: Мир, 1984. – 536 с.
 27. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. *Линейная теория тонких оболочек.* – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
 28. Горынин Г.Л., Немировский Ю.В. *Метод асимптотического расщепления в задачах продольно-поперечного изгиба анизотропных слоистых плит // Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2007. – Т.13. – №4. – С.548-580.
 29. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. *Балки, плиты и оболочки на упругом основании.* – М.: Физматгиз, 1960. – 492 с.
 30. Власов В.В. *Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики.* – М.: Стройиздат, 1975. – 224 с.
 31. Волков А.Н. *Теория тонких оболочек на основе метода начальных функций // Прикладная механика.* – 1971. – Т.7. – №10. – С.42-47.

REFERENCES

1. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A. *Nelineinoe deformirovanie i ustoichivost' uprugikh obolochek neodnorodnoi struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi [Nonlinear deformation and stability of elastic shells of non-uniform structure: Models, methods, algorithms, the insufficiently studied and new problems].* Moskva: Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2012, 336 p.
2. Ambartsumyan S.A. *Obshchaya teoriya anizotropnykh obolochek [The general theory of anisotropic shells].* Moskva: Nauka, 1974, 446 p.

3. Nemirovskii Yu.V., Mishchenko A.V., Vokhmianin I.T. *Ratsional'noe i optimal'noe proektirovanie sloistykh sterzhnevnykh sistem [Rational and optimum designing of layered rod systems]*. Novosibirsk: NSUCE Publ., 2004, 488 p.
4. Pikul' V.V. *Mekhanika obolochek [Mechanics of shells]*. Vladivostok: Dal'nauka, 2009, 536 p.
5. Yuzikov V.P., Panasenko N.N. *Stroitel'naja mekhanika tonkostennykh sterzhnej [Building mechanics of thin-walled rods]*. – Volgograd: Volgograd scientific Publ., 2013, 361 p.
6. Gol'denveizer A.L. *Teoria uprugikh tonkikh obolochek [Theory of elastic thin shells]*. Moskva: Nauka, 1976, 512 p.
7. Agalovian L.A. *Asimptoticheskaja teorija anizotropnykh plastin i obolochek [Asymptotical theory of anisotropic plates and shells]*. Moskva: Fizmatlit, 1997, 414 p.
8. Andrianov I.V., Awrejcewicz J., Manevich L.I. *Asymptotical Mechanics of Thin-Walled Structures: A Handbook*. – Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2004, 535 p.
9. Gorynin G.L., Nemirovskii Yu.V. *Prodol'no-poperechnyi izgib sloistykh balok v trjekhmernoi postanovke [Longitudinal and transverse bending of laminated beams in three-dimensional statement]*. Prikladnaja mekhanika i tekhnicheskaja fizika. 2004, Vol.45, No.6, Pp.133-143.
10. Kiselev V.V., Dolgikh D.V. *Nelineino-uprugie uzory iz vmiatin na poverkhnostiakh nagruzhennykh plastin i obolochek [Nonlinear-elastic patterns from dents on surfaces of the loaded plates and shells]*. Moskva: Fizmatlit, 2012, 164 p.
11. Gorynin G.L., Nemirovskii Yu.V. *Prostranstvennye zadachi izgiba i kruchenija sloistykh konstruksii. Metod asimptoticheskogo rasshcheplenija [Spatial problems of a bending and torsion of layered designs. Asymptotical splittings method]*. Novosibirsk: Nauka, 2004, 409 p.
12. Zino E.I., Tropp E.A. *Asimptoticheskie metody v zadachakh teorii teploprovodnosti i termouprugosti [Asymptotical methods in problems of the theory of heat conductivity and thermo-elasticity]*. Leningrad: Leningrad University Publ., 1978, 224 p.
13. Gorynin G.L., Nemirovskii Yu.V. *Metod zhestkostnykh funktsij v zadachakh rascheta mnogoslownykh stergnei pri temperaturnykh nagruzkakh [Method stiffness functions in problems of calculation of multilayered rods with thermal loads]*. Matematicheskie metody i fiziko-mekhanicheskie polia. 2012, Vol.55, No.2, Pp.144-156.
14. Gorynin G.L., Nemirovskii Yu.V. *Metod zhestkostnykh funktsij v zadachakh rascheta mnogoslownykh stergnei i plit [Method of stiffnesible functions in calculation problems of multilayeral beams and plates]*. Vestnik Nizhegorodskogo universiteta. Serija: Mekhanika. 2011, No.4.4, Pp.1654-1656.
15. Gorynin G.L., Nemirovskii Yu.V. *Matematicheskoe modelirovanie protsessa teploprovodnosti 2D-periodichnykh kompozitnykh anizotropnykh materialov [Mathematical modeling of heat conductivity process for 2D-periodic anisotropic composite materials]*. Matematicheskie metody I fiziko-mekhanicheskie polia. 2014, Vol.57, No.2, Pp.142-151.
16. Gorynin G.L., Nemirovskii Yu.V. *Prognozirovanie zhestkostnykh kharakteristik betonov pri umerennykh nagruzkakh [Predicting the stiffness characteristics of concrete under moderate loadings]*. Izvestia Altajskogo gosudarstvennogo

- universiteta. Serija: Upravlenie, vychislitel'naja tekhnika i informatika. 2014, No.1-1 (81), Pp.144-146.
17. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov [Averaging of processes in periodic mediums. Mathematical problems of mechanics of composite materials]*. Moskva: Nauka, 1984, 352 p.
 18. Yankovskii A.P. *Utochnenie asimptoticheskikh razlozhenii pri reshenii prostranstvennoi zadachi izgiba i kruchenija kompozitnykh sterzhnei [A refinement of the asymptotic expansions when solving three-dimensional problems of bending and torsion of composite rods]*. Prikladnaja matematika i mekhanika, 2015, Vol.79, No.5, Pp.674-698.
 19. Vasil'ev V.V., Protasov V.D., Bolotin V.V., etc. *Kompozitsionnye materialy: Spravochnik [Composite materials: Handbook]*. Moskva: Mashinostroenie, 1990, 512 p.
 20. Nowacki Witold. *Teoria sprężystości [Theory of elasticity]*. Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970.
 21. Vol'mir A.S. *Gibkie plastinki i obolochki [Flexible a plate and shells]*. Moskva: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoi literatury, 1956, 420 p.
 22. Levin V.E., Pustovoi N.V. *Mekhanika deformirovaniya krivolineinykh sterzhnei [Mechanics of deformation of curvilinear rods]*. (Seria "Monografii NGTU".) Novosibirsk: NSTU Publ., 2008, 208 p.
 23. Tikhonov A.N., Samarskii A.A. *Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]*. Moskva: Nauka, 1977, 735 p.
 24. Demidov S.P. *Teotia uprugosti [Theory of elasticity]*. Moskva: Vysshaja shkola, 1979, 432 p.
 25. Feodos'ev V.I. *Soprotivlenie materialov: Uchebnik dlia vtuzov [Resistance of materials: Textbook for technical colleges]*. Moskva: Nauka, 1986, 512 p.
 26. Nayfeh A. *Introduction to Perturbation Techniques*. New York: Wiley-Interscience, 1981, 519 p.
 27. Novozhilov V.V., Chernykh K.F., Mikhailovskii E.I. *Lineinaja teoria tonkikh obolochek [Linear theory of thin shells]*. Leningrad: Politekhnik, 1991, 656 p.
 28. Gorynin G.L., Nemirovskii Yu.V. *Metod asimptoticheskogo rassheplenia v zadachakh prodol'no-poperechnogo izgiba anizotropnykh sloistnykh plit [The method of splitting the asymptotic in problems of the longitudinal-transverse bending of anisotropic laminated plates]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2007, Vol.13, No.4, Pp.548-580.
 29. Vlasov V.Z., Leont'ev N.N. *Balki, plity i obolochki na uprugom osnovanii [Beams, plates and shells on the elastic basis]*. Moskva: Fizmatgiz, 1960, 492 p.
 30. Vlasov V.V. *Metod nachal'nykh funktsii v zadachakh teorii uprugosti i stroitel'noi mekhaniki [Method of initial functions in problems of the theory of elasticity and building mechanics]*. Moskva: Strojizdat, 1975, 224 p.
 31. Volkov A.N. *Teoria tonkikh obolochek na osnove metoda nachal'nykh funktsii [The theory of thin shells on the basis of a method of initial functions]*. Prikladnaja mekhanika, 1971, Vol.7, No.10, Pp.42-47.

Поступила в редакцию 11 января 2016 года

Сведения об авторе:

Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., проф., в.н.с., Лаборатория «Физики быстропротекающих процессов», ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: yankovsky_ap@rambler.ru