

УДК 534.1

**МОДЕЛИ ГИСТЕРЕЗИСА: КРАТКИЙ ОБЗОР<sup>1</sup>**Данилин А.Н.<sup>\*,\*\*</sup>, Виноградов А.А.<sup>\*</sup>, Карнет Ю.Н.<sup>\*</sup><sup>\*</sup>ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия<sup>\*\*</sup>ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт, г. Москва, Россия**АННОТАЦИЯ**

В работе дается обзор публикаций по моделям гистерезиса в задачах механики и технической физики. Перечислены основные известные подходы, которым дана краткая характеристика и обозначена область применения.

Для математического описания гистерезиса авторы предлагают модели, опираясь на конкретные представления о физическом явлении. Отмечается, что, несмотря на специфику моделей, ряд из них можно использовать для описания иных по природе процессов.

Рассмотрены классические модели для задач динамики конструкций, упруго-пластического деформирования, реологического поведения сложных сред. Кратко перечислены статические модели трения. Отмечены особенности динамических моделей трения, которые учитывают эффект Штрибека, гистерезис поверхностных микропластических деформаций, скачкообразность скольжения и др.

Рассмотрены феноменологические модели, которые применяются для описания разнообразных по природе гистерезисных эффектов. В этом случае система рассматривается как «черный ящик» с известными из эксперимента значениями входных и выходных параметров. Взаимосвязи между ними устанавливаются на основе математических зависимостей, параметры которых идентифицируются с использованием экспериментальных данных. Значительную группу феноменологических моделей образуют такие, которые строятся с использованием спектральных разложений по релейным нелинейностям.

Среди феноменологических моделей отмечается модель Бук-Вена, которая используется, как правило, в рамках подхода "черного ящика". В настоящее время эта модель и её аналоги успешно применяются в различных научно-технических областях благодаря возможности аналитического описания разнообразных по форме гистерезисных петель. В литературе сформулированы условия, которым должна удовлетворять модель Бук-Вена. Основными являются адекватность математической модели физическому процессу и её устойчивость.

В статье отмечен также ряд оригинальных моделей гистерезиса, возможности которых выходят за рамки специализированного применения.

**Ключевые слова:** гистерезис; модели диссипации; модели трения; феноменологические модели; модель Бук-Вена; идентификация параметров

**MODELS OF HYSTERESIS, A BRIEF SURVEY**Danilin A.N.<sup>\*,\*\*</sup>, Vinogradov A.A.<sup>\*</sup>, Karnet Yu.N.<sup>\*</sup><sup>\*</sup>*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*<sup>\*\*</sup>*Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда: код проекта № 14-19-01653.

## ABSTRACT

The paper gives a review of publications on models of hysteresis in problems of mechanics and technical physics. The main known approaches are listed and described briefly indicating their applications.

Describing the hysteresis, the authors suggest the mathematical models based on a concrete understanding of a physical phenomenon. It is noted that despite the specificity of the models, a number of them can be used to describe other processes different by their nature.

The classical models for problems of structural dynamics, elastic-plastic deformation, rheological fluids behavior are considered. The static friction models are summarized. There are marked peculiarities of the dynamic friction models, which take into account the Stribeck effect, hysteresis of surface microplastic deformations, irregular sliding, etc.

The phenomenological models under consideration are used to describe a variety of hysteresis effects in nature. In this case, the system is considered as a "black box" with experimental values of input and output parameters known. Correlations between them are established on the basis of mathematical functions, whose parameters are identified using experimental data. The models are often based on spectral resolution by the relay nonlinearities.

It is the Bouc-Wen model to be marked among the phenomenological ones, which is typically used in the frames of the "black box". Currently, this model and its analogues are successfully used in various scientific and technical fields due to their possibility of the analytical description of various shapes of hysteresis loops. There are formulated in literature the conditions which must be satisfied while applying the Bouc-Wen model. The main ones are the mathematical model adequacy to the physical process under consideration and stability.

The article also pointed out a number of original hysteresis models, whose possibilities go beyond the specialized application.

The article also points out a number of original hysteresis models, whose possibilities go beyond the frames of their specialized application.

**Keywords:** hysteresis; models of dissipation; the models of friction; phenomenological models; the Bouc-Wen model; identification of parameters

Особенности гистерезиса (форма петлеобразных траекторий, асимптотическое подобие или симметрия прямого и обратного процессов, и др.) определяются природой процесса [1-11]. Поэтому для математического описания гистерезиса авторы, как правило, предлагают модели, опираясь на конкретные представления о физическом явлении. Однако, несмотря на специфику моделей, ряд из них может претендовать на определённую общность, выходящую за область специализированного исследования. Такие модели после некоторых обобщений могут быть применены для описания гистерезиса в других системах. Это свидетельствует не только о «глубине» математических моделей, но и, в большей степени, – об общих чертах различных по природе гистерезисных процессов. Поэтому представляется целесообразным кратко остановиться на нескольких известных подходах, которые применяются для описания гистерезиса в различных областях науки и техники.

В динамике деформируемых систем широкое распространение получила гипотеза Фойгта [12,13], в соответствии с которой рассеяние энергии зависит от частоты процесса деформирования системы. Однако для большинства конструктивных материалов, и тем более, сложных механизмов с трением, это не подтверждается экспериментально [14]. Физически обоснованной являются модель Н.Н. Давиденкова [15], предложенная в 1938 г. при анализе зависимости интенсивности поглощения звука в кристаллических твёрдых телах от амплитуды

колебаний. Автор выдвинул гипотезу, что эта зависимость есть результат гистерезиса микропластической деформации, и что нелинейность микропластической деформации может быть аппроксимирована степенной функцией.

Для описания гистерезиса в металлах Рид [16,17] впервые связал амплитудные зависимости внутреннего трения (АЗВТ) и дефект модуля упругости в цинке и меди непосредственно с движением дислокаций. Поскольку микропластическая деформация есть результат малого и, как правило, обратимого перемещения дислокаций, и можно сказать, что эксперименты Рида явились первым подтверждением гипотезы Давиденкова. Кроме того, Рид впервые экспериментально обнаружил пропорциональность между амплитудно-зависимым декрементом и дефектом модуля упругости. Это положение было развито далее в работах Новика [18]. Пропорциональность также следует из теории Гранато-Люкке [19].

Наибольшее распространение получили теории АЗВТ, основанные на «струнной» модели дислокации Келера-Гранато-Люкке [19,20]. В таких теориях дислокационный гистерезис формируется в результате периодического процесса «отрыва-закрепления» для распределённой системы «стопоров». В других модификациях теориях АЗВТ дислокация преодолевает не один, а несколько рядов «стопоров» [21] с учётом внутренних напряжений [22]. По классификации Асано [23], теории первого типа называют теориями отрыва, а второго – теориями трения, поскольку торможение дислокаций в этих теориях можно ассоциировать с некоторой эффективной силой трения.

Модели трения занимают важное место в теории гистерезиса. В современной литературе трение рассматривается как процесс, состоящий из последовательности двух стадий: трение предскольжения (presliding friction), которое проявляется в виде микроперемещений контактирующих тел относительно друг друга в результате упругопластических деформаций неровностей трущихся поверхностей, и трение скольжения (sliding friction) как результата возникающих сил сопротивления тангенциальному смещению трущихся шероховатых поверхностей. Важной характеристикой трения предскольжения является гистерезис зависимости относительного смещения от силы трения [24-26]. Сила трения скольжения, как известно, зависит от силы давления тел друг на друга (силы реакции опоры), от материалов трущихся поверхностей, их микрорельефа, наличия и типа смазки, от скорости относительного движения.

С таким представлениями логично связаны модели трения, которые условно разделяют на две группы – статические и динамические.

Терминами статических моделей являются: трение покоя (the stiction friction), сила трения Кулона (the Coulomb force), сила вязкостного сопротивления (the viscous force) и эффект Штрибека (the Stribeck effect). Модели статического трения симметричны относительно направления смещения, имеют разрывы при нулевой скорости [27-28].

Модели динамического трения учитывают свойства, которые не могут быть описаны в рамках статических моделей: микросмещения в режиме предскольжения, фрикционное запаздывание (задержка изменения силы трения при изменении скорости скольжения), скачкообразность движения – спонтанные подергивания, возникающее при скольжении одного объекта по поверхности другого [29].

В настоящее время наибольшее распространение получили несколько моделей трения. Первой в хронологическом плане является статическая модель Даля

(the Dahl friction model) [30], которая является обобщением модели кулоновского трения [31]. Устойчивое состояние по модели Даля в точности соответствует модели кулоновского трения. Однако модель Даля не описывает эффект Штрибека и ряд других существенных свойств трения [31].

Динамическая модель LuGre является в значительной мере развитием модели трения Даля [32]. С её помощью можно учесть эффект Штрибека, гистерезис, скачкообразность скольжения [25,33]. Поэтому в настоящее время она широко используется для моделирования трения в разнообразных механических системах [33,34]. При линеаризации по скорости в окрестности нуля [32] модель LuGre описывает колебания элементарного осциллятора с демпфером. Необходимые и достаточные условия применения этой модели к системам с демпфированием описаны в [35]. Такая модель популярна при решении задач о компенсации трения [36-39]. Способы идентификации параметров модели рассмотрены в [40-42].

В динамике сложных механических систем, составные элементы которых взаимодействуют друг с другом силами различной природы, построение теоретических моделей с идентификацией их параметров представляет собой непростую задачу. В таких случаях механическую систему можно рассматривать как «чёрный ящик» с известными из эксперимента значениями входных и выходных параметров. Взаимосвязи между этими параметрами устанавливаются на основе феноменологических моделей, параметры которых идентифицируются с использованием экспериментальных данных [43-45,66-71].

В этом направлении особое место занимают модели, которые строятся с использованием спектральных разложений по релейным нелинейностям. Такой подход был предложен в 1935 г. немецким физиком Ф. Прейзахом (Ferenc Preisach) в работах по магнетизму [46-48], в которых процесс намагничивания рассматривается как статистический результат перемагничивания отдельных элементарных областей (доменов). Считается, что каждая такая область может находиться только в состоянии насыщения с направлением намагниченности вдоль или против действия внешнего поля. Соответственно этому намагниченность каждой области описывается с помощью функций-переключателей, определяющих петлю гистерезиса в виде прямоугольника. Важной составляющей модели Ф. Прейзаха является функция распределения ориентаций доменов, с помощью которой определяются значения намагниченности в произвольном поле.

В настоящее время идеи Ф. Прейзаха превращены в строгий математический аппарат и существенно развиты в работах М.А.Красносельского, А.В.Покровского и их последователей [49]. Схожие феноменологические представления предложены и развиваются в различных областях механики и физики [50-53]. Однако для идентификации параметров таких моделей часто требуются сложные экспериментальные исследования и интерпретации полученных данных.

В 1967 г. Бук (R. Bouc) предложил способ решения задачи о вынужденных колебаниях механической системы с гистерезисом зависимости восстанавливающей силы от перемещения [54]. Траектория гистерезиса описывалась с помощью нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, для которого идентификация коэффициентов осуществлялась с использованием опорных экспериментальных данных. В 1971 г. Бук представил модель гистерезиса уже для абстрактной физической системы, рассматривая её как «чёрный ящик» с известными данными на её входе и выходе [55]. В 1976 г. и далее модель была

обобщена в работах Вена (Y.-K. Wen) [56,57], и с тех пор она известна как модель Бук-Вена [43].

В настоящее время модель Бук-Вена привлекает повышенный интерес благодаря возможности аналитического описания разнообразных по форме гистерезисных петель, возникающих в различных системах с демпфированием [58]. В частности, модель успешно была использована для моделирования гистерезиса пьезоэлектрических элементов [59], магнитореологических амортизаторов [60], деревянных соединений [61], изоляции фундаментов зданий и сооружений [62] и пр.

В современной литературе, модель Бук-Вэна используется, как правило, в рамках подхода "черного ящика" [43,63]. Применение методов идентификации позволяет определить параметры модели так, чтобы ошибка (расхождение) между выходными данными, полученными из эксперимента и вычислениями по алгоритмам модели, было достаточно мала. Расчёты осуществляют для заданного (опорного) входного сигнала. После этого модель используется для моделирования гистерезиса при других входных сигналах. Однако известны примеры, когда найденные параметры модели не обеспечивают соответствие результатов вычислений данным, полученных из экспериментов для иных входных сигналов. Такие примеры говорят о неоднозначности идентификации, которая может приводить к неустойчивости модели относительно входного сигнала.

В литературе сформулированы условия, которым должна удовлетворять модель Бук-Вена [43,63-65]. Основными являются адекватность математической модели физическому процессу и её устойчивость. Модель считается устойчивой по входу, если из ограниченности сигнала на входе системы следует ограниченность сигнала на её выходе при любых начальных условиях (bounded input, bounded output (BIBO) stability).

Рассмотрим систему с гистерезисом, преобразующую входной сигнал  $q$ , зависящий от времени  $t$ , в сигнал  $f$  на выходе. В соответствии с моделью Бук-Вена отображение  $q(t) \rightarrow f(q(t))$  устанавливается с использованием нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения, в состав которого входят функции-переключатели направления процесса. Общей формой записи модели Бук-Вена является дифференциальная связь между входным и выходным сигналами в виде [63]

$$\frac{df}{dq} = g\left(q, f, \operatorname{sgn}\left(\frac{dq}{dt}\right)\right) \cdot \frac{dq}{dt}, \quad (1)$$

где  $g$  – выбранная кусочно-гладкая функция, идентификация которой осуществляется по экспериментальным данным опорного сигнала. Уравнение (1) включается в общую систему уравнений динамики системы, содержащие  $q(t)$  и  $f(q(t))$  в качестве неизвестных функций. В результате интегрирования этой системы строится зависимость  $f(q(t))$ , определяющая кусочно-гладкую непрерывную траекторию гистерезиса. Значения  $q$ , когда  $dq/dt = 0$ , формируют последовательность точек  $q_k$ , где  $k$  – порядковый номер при возрастании  $t$  от начала развития процесса. При переходе через эти точки производная  $dq/dt$  последовательно меняет знак и происходит смена ветви гистерезисного процесса, как это показано на рис.1. Жирные стрелки во 2-ом и 4-ом квадрантах показывают

соответственно прямое и обратное направления гистерезисного процесса, соответствующие росту или убыванию  $q(t)$ , когда  $dq/dt > 0$  или  $dq/dt < 0$ .

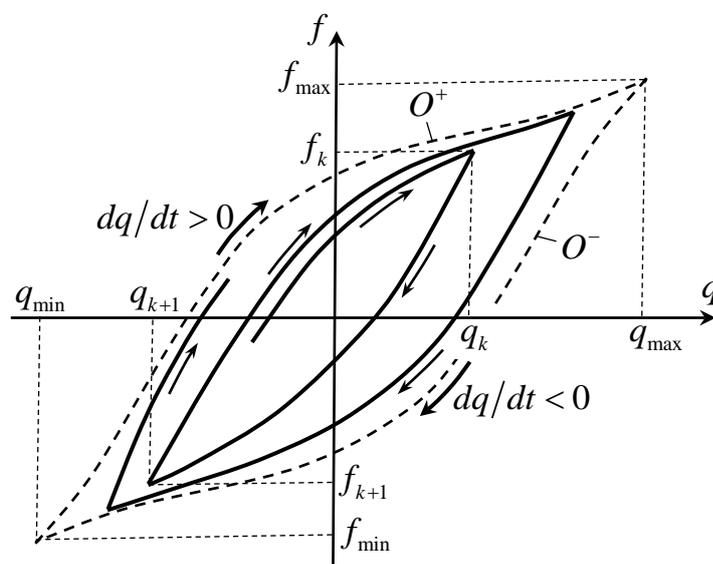


Рис.1. Гистерезисная траектория внутри объемлющего цикла.

В работах [11,66-68] физическая связь между параметрами системы, описывающими процесс гистерезиса, устанавливается с использованием дифференциального уравнения (1). В качестве правой части (1) используется полином от двух переменных  $q$  и  $f$ . Неизвестные коэффициенты полинома определяются по экспериментальным данным для объемлющего цикла, область которого содержит любую возможную траекторию гистерезиса. На рис.1 объемлющий цикл показан двумя пунктирными кривыми  $O^-$  и  $O^+$ , соответствующими прямому и обратному процессам. Поэтому матрица полиномиальных коэффициентов имеет два набора значений, которые выбираются в зависимости от знака  $dq/dt$ . Число членов полиномиального представления подбирается в результате простых численных экспериментов.

В качестве примеров авторами рассмотрена задача об аппроксимации кривых течения сложных реологических сред [11], об оценке эффективности энергорассеяния гасителей колебаний проводов воздушных ЛЭП [66-68].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящий обзор не претендует на полноту охвата работ по моделированию гистерезисных процессов и анализу свойств гистерезисных моделей. Эта тематика обширна, чему свидетельствует большое число публикаций, обзоров, монографий и учебных курсов. Тематика охватывает различные физические процессы с многообразными по геометрической форме и свойствам гистерезисными зависимостями. К гистерезисной тематике также имеют отношение работы по изучению математических свойств моделей, анализу их устойчивости, определению областей изменения параметров. Авторам не удалось также вместить в рамки обзора описание многочисленных приложений, демонстрирующих особенности моделей и их общие черты.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Mayergoyz I.D. *Mathematical models of hysteresis and their applications: 2nd edn. (Electromagnetism)*. – Amsterdam: Elsevier, Academic Press, 2003. – 498 p.
2. Bertotti G. *Hysteresis in magnetism: for physicists, materials scientists, and engineers, Ch. 2*. – Boston: Elsevier, Academic Press, 1998. – 558 p.
3. Rieger M.O. *Young measure solutions for nonconvex elastodynamics* // SIAM Journal on Mathematical Analysis. – 2003. – Vol.34. – N6. – P.1380-1398.
4. Rieger M.O. *A model for hysteresis in mechanics using local minimizers of Young measures* // Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. – 2005. – Vol.63. – P.403-414.
5. Mielke A. *Analysis of energetic models for rate-independent materials* // Intern. Congr. of Mathematicians. Proceedings. – Beijing, China, 2002. – Vol.3. – P.817-828.
6. Mielke A., Roubíček T. *A rate-independent model for inelastic behavior of shape-memory alloys* // Multiscale Modeling and Simulation. – 2003. – Vol.1. – N4. – P.571-597.
7. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием монотонно меняющихся напряжений* // Известия РАН. МТТ. – 2014. – №1. – С.37-53.
8. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. МТТ. – 2015. – №2. – С.78-95.
9. Gong X., Xu Ya., Xuan S., Guo C., Zong L. *The investigation on the nonlinearity of plasticine-like magnetorheological material under oscillatory shear rheometry* // J. of Rheology. – 2012. – Vol.56. – N6. – P.1375-1391.
10. Tong Z., Sun W.X., Yang Y.R., Wang T., Liu X.X., Wang C.Y. *Large amplitude oscillatory shear rheology for nonlinear viscoelasticity in hectorite suspensions containing poly(ethylene glycol)* // Polymer. – 2011. – Vol.52. – N6. – P.1402-1409.
11. Danilin A.N., Yanovsky Yu.G., Semenov N.A., Shalashilin A.D. *Kinematic model of the rheological behavior of non-Newtonian fluids in conditions of nonstationary cyclic loading* // Composites: Mechanics, Computations, Applications. – 2012. – Vol.3. – Iss.4. – P.1-15.
12. Meyers M.A., Chawla K.K. *Mechanical behavior of materials*. – Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2009. – 856 p.
13. Reiner M. *Rheology* / In book: *Elasticity and Plasticity* (Ed. Flügge S.). – Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag OHG, 1958. – P.434-550.
14. Пановко Я.Г. *Внутреннее трение при колебаниях упругих систем*. – М.: Физматгиз, 1960. – 193 с.
15. Давиденков Н.Н. *О рассеянии энергии при вибрациях* // Журнал технической физики. – 1938. – Т.8. – №6. – С.15-21.
16. Read T.A. *The internal friction of single metal crystals* // Physical Review. – 1940. – Vol.58. – №4. – P.371-380.
17. Read T.A. *Internal friction of single crystals of copper and zinc* // Trans. AIME. – 1941. – Vol.143. – P.30-44.

18. Nowick A.S. *Variation of amplitude-dependent internal friction in single crystals of copper with frequency and temperature* // Physical Review. – 1950. – Vol.80. – P.249-257.
19. Granato A., Lücker K. *Theory of mechanical damping due to dislocations* // J. of Applied Physics. – 1956. – Vol.27. – P.583-593.
20. Hollomon J.H., Maurer R., Seitz F. *Imperfections in Nearly Perfect Crystals*. – N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1952. – 502 p.
21. Ishii K. *Modulus change associated with amplitude-dependent internal friction in crystals* // J. of the Physical Society of Japan. – 1983. – Vol.52. – N1. – P.141-148.
22. Lazan B.J. *Damping of Materials and Members in Structural Mechanics*. – Oxford: Pergamon Press, 1968. – 317 p.
23. Asano S. *Theory of nonlinear damping due to dislocation hysteresis* // J. of the Physical Society of Japan. – 1970. – Vol.29. – N4. – P.952-963.
24. Al-Bender F., Lampaert V., Swevers J. *Modeling of dry sliding friction dynamics: from heuristic models to physically motivated models and back* // Chaos. – 2004. – Vol.14. – N2. – P.446-445.
25. Rizos D.D., Fassois S. *Presliding friction identification based upon the Maxwell slip model structure* // Chaos. – 2004. – Vol.14. – N2. – P.431-445.
26. Swevers J., Al-Bender F., Ganseman C.G., Projogo T. *An integrated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2000. – Vol.45. – N4. – P.675-686.
27. Marques M. *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems: Shocks and Dry Friction*. – Cambridge, MA: Birkhauser, 1993. – 182 p.
28. Virgala I., Frankovsky P., Kenderova M. *Friction effect analysis of a DC motor* // American J. of Mechanical Engineering. – 2013. – Vol.1. – N1. – P.1-5.
29. De Wit C.C., Olsson H., Astrom K.J., Lischinsky P. *Dynamic friction models and control design* // American Control Conference. – 1993. – P.1920-1926.
30. Dahl P.R. *A solid friction model*. – California: The Aerospace Corporation El Segundo, TOR-0158 (3107-18), 1968.
31. Dahl P.R. *Solid friction damping of mechanical vibration* // AIAA J. – 1976. – Vol.14. – N2. – P.1675-1682.
32. Canudas de Wit C., Olsson H., Astrom K., Lischinsky P. *A new model for control of systems with friction* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1995. – Vol.40. – N3. – P.419-425.
33. Astrom K.J., Canudas de Wit C. *Revisiting the LuGre friction model* // IEEE Control Systems Magazine. – 2008. – Vol.28. – N6. – P.101-114.
34. Padthe A.K., Drincic B., Oh J., Rizos D.D., Fassois S.D., Berstein D.S. *Duhem modeling of friction-induced hysteresis* // IEEE Control Systems Magazine. – 2008. – Vol.28. – N5. – P.90-107.
35. Barahanov N., Ortega R. *Necessary and sufficient conditions for passivity of the LuGre friction model* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2000. – Vol.45. – N4. – P.830-832.
36. Freidovich L., Robertsson A., Shiriaev A., Johansson R. *LuGre-model-based friction compensation* // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2010. – Vol.18. – N1. – P.194-200.
37. San P.P., Ren B., Ge S.S., Lee T.H., Liu J.-K. *Adaptive neural network control of hard disk drives with hysteresis friction nonlinearity* // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2011. – Vol.19. – N2. – P.351-358.

38. Lian K.-Y., Hung C.-Y., Chiu C.-S., Liu P. *Induction motor control with friction compensation: an approach of virtual-desired-variable synthesis* // IEEE J. of Emerging and Selected Topics in Power Electronics. – 2005. – Vol.20. – N5. – P.1066-1074.
39. Tan Y., Chang J., Tan H. *Adaptive backstepping control and friction compensation for AC servo with inertia and load uncertainties* // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2003. – Vol.50. – N5. – P.944-952.
40. Wu X.D., Zuo S.G., Lei L., Yang X. W., Li Y. *Parameter identification for a LuGre model based on steady-state tire conditions* // Intern. J. of Automotive Technology. – 2011. – Vol.12. – N5. P.671-677.
41. Rizos D., Fassois S. *Friction identification based upon the LuGre and Maxwell slip models* // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2009. – Vol.17. – N1. – P.153-160.
42. Shirazi F.A., Mohammadpour J., Grigoriadis K.M., Song G. *Identification and control of an MR damper with stiction effect and its application in structural vibration mitigation* // IEEE Transactions on Control Systems Technology. – 2012. – Vol.20. – N5. – P.1285-1301.
43. Visintin A. *Differential Models of hysteresis (Applied Mathematical Sciences)*. – Berlin: Springer, 1994. – 418 p.
44. Nová I., Zemánek I. *Analytical model with flexible parameters for dynamic hysteresis loops modeling* // J. of Electrical Engineering. – 2010. – Vol.61. – N7. – P.46-49.
45. Danilin A.N., Shalashilin V.I. *A method to identify hysteresis by an example of an antigalloping device* // Intern. Applied Mechanics. – 2010. – Vol.46. – N5. – P.588-595.
46. Preisach F. *Über die magnetische Nachwirkung* // Zeitschrift für Physik. – 1935. – P.277-302.
47. Parker S.F.H., Faunce C.A., Grundy P.J., Maylin M.G., Ludlow J.L.C., Lane R. *Preisach modeling of magnetization changes in steel* // J. of Magnetism and Magnetic Materials. – 1995. – Vol.145. – P.51-56.
48. Torre E.D. *A Preisach model for accommodation* // IEEE Transactions on Magnetics. – 1994. – Vol.30. – N5. – P.2701-2707.
49. Красносельский М.А., Покровский А.В. *Системы с гистерезисом*. – М.: Наука, 1983. – 271 с.
50. Smith R. *Smart material systems: model development*. – Philadelphia: SIAM, 2005. – 525 p.
51. Leenen R. *The modeling and identification of an hysteretic system. The wire-rope as a nonlinear shock vibration isolator*. – Eindhoven University of Technology: Dept. Mechanical Engineering, DCT 2002.72, 2002.
52. Rosensweig R.E. *Ferrohydrodynamics*. – New York: Dover Publications, Inc., 2014. – 348 p.
53. Berkovski B., Bashtovoy V. *Magnetic Fluids and Applications*. – New York: Begell House Inc. Publishers, 1996. – 350 p.
54. Bouc R. *Forced vibrations of a mechanical system with hysteresis* // 4<sup>th</sup> Conf. on Nonlinear Oscillations. Proceedings. – Prague. Czechoslovakia, 1967. – P.315-321.
55. Bouc R. *Modèle mathématique d'hystérésis (A mathematical model for hysteresis)* // Acustica. – 1971. – Vol.21. – P.16-25.
56. Wen Y.K. *Method for random vibration of hysteretic systems* // J. of the Engineering Mechanics Division. – 1976. – Vol.102 (EM2). – P.246-263.

57. Wen Y.K. *Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation* // J. of Applied Mechanics. – 1980. – Vol.47. – P.150-154.
58. Smyth A.W., Masri S.F., Kosmatopoulos E.B., Chassiakos A.G., Caughey T.K. *Development of adaptive modeling techniques for non-linear hysteretic systems* // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. – 2002. – Vol.37. – P.1435-1451.
59. Low T., Guo W. *Modelling of a three-layer piezoelectric bimorph beam with hysteresis* // IEEE J. of Microelectromechanical Systems. – 1995. – Vol.4. – N4. – P.230-237.
60. Yoshioka H., Ramallo J.C., Spencer Jr. B.F. “Smart” base isolation strategies employing magnetorheological dampers // J. of Engineering Mechanics. – 2002. – Vol.128. – N5. – P.540-551.
61. Foliente G.C. *Hysteresis modelling of wood joints and structural systems* // ASCE J. of Structural Engineering. – 1995. – Vol.121. – N6. – P.1013-1022.
62. Nagarajaiah S., Xiaohong S. *Response of base-isolated USC hospital building in Northridge earthquake* // ASCE J. of Structural Engineering. – 2000. – Vol.126. – N10. – P.1177-1186.
63. Ismail M., Ikhouane F., Rodellar J. *The hysteresis Bouc-Wen model, a survey* // Archives of Computational Methods in Engineering. – 2009. – Vol.16. – P.161-188.
64. Ikhouane F., Mañosa V., Rodellar J. *Dynamic properties of the hysteretic Bouc-Wen model* // Systems & Control Letters. – 2007. – Vol.56. – P.197-205.
65. Ikhouane F., Rodellar J. *On the hysteretic Bouc-Wen model* // Nonlinear Dynamics. – 2005. – Vol.42. – P.63-78.
66. Danilin A.N., Vinogradov A.A., Lilien J.-L. *Kinematic model for hysteretic dissipation of vibration energy for Torsional Damper and Detuner* // 7<sup>th</sup> Intern. Symp. on Cable Dynamics. Proceedings. – Vienna, Austria, 10-13 December 2007. – P.247-253.
67. Данилин А.Н., Козлов К.С. *Моделирование нестационарных колебаний гасителя вибрации с учётом гистерезиса диссипации энергии* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т.19. – №1. – С.34-47.
68. Данилин А.Н., Кузнецова Е.Л., Рабинский Л.Н. *Модель гистерезиса энерго-рассеяния при колебаниях механических систем* // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2014. – №4. – С.45-67.
69. Hagedorn P., Gutzler U. *On the mechanical hysteresis and bending stiffness of conductors and cables* // 6<sup>th</sup> Intern. Offshore and Polar Engineering Conf. Proceedings. – Los Angeles, 1996. – Vol.2. – P.175-181.
70. Sauter D., Hagedorn P. *On the hysteresis of wire cables in Stockbridge dampers* // Intern. J. of Nonlinear Mechanics. – 2002. – Vol.37. – P.1453-1459.
71. Leenen R. *The modelling and identification of an hysteretic System. The wire-rope as a nonlinear shock vibration isolator.* – Report DCT 2002.72 (December 2002). Department of Mechanical Engineering Eindhoven University of Technology. – 2002.

## REFERENCES

1. Mayergoyz I.D. *Mathematical models of hysteresis and their applications: 2nd edn. (Electromagnetism)*. Amsterdam: Elsevier, Academic Press, 2003, 498 p.
2. Bertotti G. *Hysteresis in magnetism: for physicists, materials scientists, and engineers, Ch.2*. Boston: Elsevier, Academic Press, 1998, 558 p.
3. Rieger M.O. *Young measure solutions for nonconvex elastodynamics*. SIAM J. on Mathematical Analysis, 2003, Vol.34, No.6, Pp.1380-1398.

4. Rieger M.O. *A model for hysteresis in mechanics using local minimizers of Young measures*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 2005, Vol.63, Pp.403-414.
5. Mielke A. *Analysis of energetic models for rate-independent materials*, Intern. Congr. of Mathematicians. Proceedings. Beijing, China, 2002, Vol.3, Pp.817-828.
6. Mielke A., Roubíček T. *A rate-independent model for inelastic behavior of shape-memory alloys*. Multiscale Modeling and Simulation, 2003, Vol.1, No.4, Pp.571-597.
7. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modelirovanie fazovykh i strukturnykh prevrashchenii v splavakh s pamiat'iu formy, proiskhodiashchikh pod deistviem nemono-tonno meniaiushchikhsia napriazhenii* [Modeling of phase and structural transformations in shape memory alloys under the action of non-monotonic stresses]. Izvestiia RAN. MTT, 2014, No.1, Pp.37-53.
8. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog teorii plasticheskogo techeniia dlia opisaniia deformatsii martensitnoi neuprugosti v splavakh s pamiat'iu formy* [Analog of plastic flow theory to describe the deformation of the martensite inelasticity in shape memory alloys]. Izvestiia RAN. MTT, 2015, No.2, Pp.78-95.
9. Gong X., Xu Ya., Xuan S., Guo C., Zong L. *The investigation on the nonlinearity of plasticine-like magnetorheological material under oscillatory shear rheometry*. J. of Rheology, 2012, Vol.56, No.6, Pp.1375-1391.
10. Tong Z., Sun W.X., Yang Y.R., Wang T., Liu X.X., Wang C.Y. *Large amplitude oscillatory shear rheology for nonlinear viscoelasticity in hectorite suspensions containing poly(ethylene glycol)*. Polymer, 2011, Vol.52, No.6, Pp.1402-1409.
11. Danilin A.N., Yanovsky Yu.G., Semenov N.A., Shalashilin A.D. *Kinematic model of the rheological behavior of non-Newtonian fluids in conditions of nonstationary cyclic loading*. Composites: Mechanics, Computations, Applications, 2012, Vol.3, Iss.4, Pp.1-15.
12. Meyers M.A., Chawla K.K. *Mechanical behavior of materials*. Cambridge, New York: Cambridge University Press, 2009, 856 p.
13. Reiner M. *Rheology*: in book: *Elasticity and Plasticity*. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer-Verlag OHG, 1958, Pp.434-550.
14. Panovko Ia.G. *Vnutrennee trenie pri kolebaniikh uprugikh system* [The internal friction at vibrations of elastic systems]. M.: Fizmatgiz, 1960, 193 p.
15. Davidenkov N.N. *O rasseianii energii pri vibratsiakh* [About the energy dissipation during the vibrations]. Zhurnal tekhnicheskoi fiziki, 1938, Vol.8, No.6, Pp.15-21.
16. Read T.A. *The internal friction of single metal crystals*. Physical Review, 1940, Vol.58, No.4, Pp.371-380.
17. Read T.A. *Internal friction of single crystals of copper and zinc*. Trans. AIME, 1941, Vol.143, Pp.30-44.
18. Nowick A.S. *Variation of amplitude-dependent internal friction in single crystals of copper with frequency and temperature*. Physical Review, 1950, Vol.80, Pp.249-257.
19. Granato A., Lücke K. *Theory of mechanical damping due to dislocations*. J. of Applied Physics, 1956, Vol.27, Pp.583-593.
20. Hollomon J.H., Maurer R., Seitz F. *Imperfections in Nearly Perfect Crystals*. N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1952, 502 p.
21. Ishii K. *Modulus change associated with amplitude-dependent internal friction in crystals*. J. of the Physical Society of Japan, 1983, Vol.52, No.1, Pp.141-148.

22. Lazan B.J. *Damping of Materials and Members in Structural Mechanics*. Oxford: Pergamon Press, 1968, 317 p.
23. Asano S. *Theory of nonlinear damping due to dislocation hysteresis*. J. of the Physical Society of Japan, 1970, Vol.29, No.4, Pp.952-963.
24. Al-Bender F., Lampaert V., Swevers J. *Modeling of dry sliding friction dynamics: from heuristic models to physically motivated models and back*. Chaos, 2004, Vol.14, No.2, Pp.446-445.
25. Rizos D.D., Fassois S. *Presliding friction identification based upon the Maxwell slip model structure*. Chaos, 2004, Vol.14, No.2, Pp.431-445.
26. Swevers J., Al-Bender F., Ganseman C.G., Projogo T. *An integrated friction model structure with improved presliding behavior for accurate friction compensation*. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, Vol.45, No.4, Pp.675-686.
27. Marques M. *Differential Inclusions in Nonsmooth Mechanical Problems: Shocks and Dry Friction*. Cambridge, MA: Birkhauser, 1993, 182 p.
28. Virgala I., Frankovsky P., Kenderova M. *Friction effect analysis of a DC motor*. American J. of Mechanical Engineering, 2013, Vol.1, No.1, Pp.1-5.
29. De Wit C.C., Olsson H., Astrom K.J., Lischinsky P. *Dynamic friction models and control design*. American Control Conference, 1993, Pp.1920-1926.
30. Dahl P.R. *A solid friction model*. California: The Aerospace Corporation El Segundo, TOR-0158 (3107-18), 1968.
31. Dahl P.R. *Solid friction damping of mechanical vibration*. AIAA J., 1976, Vol.14, No.2, Pp.1675-1682.
32. Canudas de Wit C., Olsson H., Astrom K., Lischinsky P. *A new model for control of systems with friction*. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, Vol.40, No.3, Pp.419-425.
33. Astrom K.J., Canudas de Wit C. *Revisiting the LuGre friction model*. IEEE Control Systems Magazine, 2008, Vol.28, No.6, Pp.101-114.
34. Padthe A.K., Drincic B., Oh J., Rizos D.D., Fassois S.D., Berstein D.S. *Duhem modeling of friction-induced hysteresis*. IEEE Control Systems Magazine, 2008, Vol.28, No.5, Pp.90-107.
35. Barahanov N., Ortega R. *Necessary and sufficient conditions for passivity of the LuGre friction model*. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, Vol.45, No.4, Pp.830-832.
36. Freidovich L., Robertsson A., Shiriaev A., Johansson R. *LuGre-model-based friction compensation*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2010, Vol.18, No.1, Pp.194-200.
37. San P.P., Ren B., Ge S.S., Lee T.H., Liu J.-K. *Adaptive neural network control of hard disk drives with hysteresis friction nonlinearity*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2011, Vol.19, No.2, Pp.351-358.
38. Lian K.-Y., Hung C.-Y., Chiu C.-S., Liu P. *Induction motor control with friction compensation: an approach of virtual-desired-variable synthesis*. IEEE J. of Emerging and Selected Topics in Power Electronics, 2005, Vol.20, No.5, Pp.1066-1074.
39. Tan Y., Chang J., Tan H. *Adaptive backstepping control and friction compensation for AC servo with inertia and load uncertainties*. IEEE Transactions on Industrial Electronics, 2003, Vol.50, No.5, Pp.944-952.
40. Wu X.D., Zuo S.G., Lei L., Yang X. W., Li Y. *Parameter identification for a LuGre model based on steady-state tire conditions*. Intern. J. of Automotive Technology, 2011, Vol.12, No.5, Pp.671-677.

41. Rizos D., Fassois S. *Friction identification based upon the LuGre and Maxwell slip models*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2009, Vol.17, No.1, Pp.153-160.
42. Shirazi F.A., Mohammadpour J., Grigoriadis K.M., Song G. *Identification and control of an MR damper with stiction effect and its application in structural vibration mitigation*. IEEE Transactions on Control Systems Technology, 2012, Vol.20, No.5, Pp.1285-1301.
43. Visintin A. *Differential Models of hysteresis (Applied Mathematical Sciences)*. – Berlin: Springer, 1994, 418 p.
44. Nová I., Zemánek I. *Analytical model with flexible parameters for dynamic hysteresis loops modeling*. J. of Electrical Engineering, 2010, Vol.61, No.7, Pp.46-49.
45. Danilin A.N., Shalashilin V.I. *A method to identify hysteresis by an example of an antigalloping device*. Intern. Applied Mechanics, 2010, Vol.46, No.5, Pp.588-595.
46. Preisach F. *Über die magnetische Nachwirkung*. Zeitschrift für Physik, 1935, Pp.277-302.
47. Parker S.F.H., Faunce C.A., Grundy P.J., Maylin M.G., Ludlow J.L.C., Lane R. *Preisach modeling of magnetization changes in steel*. J. of Magnetism and Magnetic Materials, 1995, Vol.145, Pp.51-56.
48. Torre E.D. *A Preisach model for accommodation*. IEEE Transactions on Magnetics, 1994, Vol.30, No.5, Pp.2701-2707.
49. Krasnosel'skii M.A., Pokrovskii A.V. *Sistemy s gisterezisom [Systems with hysteresis]*. – M.: Nauka, 1983, 271 p.
50. Smith R. *Smart material systems: model development*. Philadelphia: SIAM, 2005, 525 p.
51. Leenen R. *The modeling and identification of an hysteretic system. The wire-rope as a nonlinear shock vibration isolator*. Eindhoven University of Technology: Dept. Mechanical Engineering, DCT 2002.72, 2002.
52. Rosensweig R.E. *Ferrohydrodynamics*. New York: Dover Publications, Inc., 2014, 348 p.
53. Berkovski B., Bashtovoy V. *Magnetic Fluids and Applications*. New York: Begell House Inc. Publishers, 1996, 350 p.
54. Bouc R. *Forced vibrations of a mechanical system with hysteresis*. 4<sup>th</sup> Conf. on Non-linear Oscillations. Proceedings. Prague, Czechoslovakia, 1967, Pp.315-321.
55. Bouc R. *Modèle mathématique d'hystérésis (A mathematical model for hysteresis)*. Acustica, 1971, Vol.21, Pp.16-25.
56. Wen Y.K. *Method for random vibration of hysteretic systems*. J. of the Engineering Mechanics Division, 1976, Vol.102 (EM2), Pp.246-263.
57. Wen Y.K. *Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation*. J. of Applied Mechanics, 1980, Vol.47, Pp.150-154.
58. Smyth A.W., Masri S.F., Kosmatopoulos E.B., Chassiakos A.G., Caughey T.K. *Development of adaptive modeling techniques for non-linear hysteretic systems*. Intern. J. of Non-Linear Mechanics, 2002, Vol.37, Pp.1435-1451.
59. Low T., Guo W. *Modelling of a three-layer piezoelectric bimorph beam with hysteresis*. IEEE J. of Microelectromechanical Systems, 1995, Vol.4, No.4, Pp.230-237.
60. Yoshioka H., Ramallo J.C., Spencer Jr. B.F. *"Smart" base isolation strategies employing magnetorheological dampers*. J. of Engineering Mechanics, 2002, Vol.128, No.5, Pp.540-551.
61. Foliente G.C. *Hysteresis modelling of wood joints and structural systems*. ASCE J. of Structural Engineering, 1995, Vol.121, No.6, Pp.1013-1022.

62. Nagarajaiah S., Xiaohong S. *Response of base-isolated USC hospital building in Northridge earthquake*. ASCE J. of Structural Engineering, 2000, Vol.126, No.10, Pp.1177-1186.
63. Ismail M., Ikhoulane F., Rodellar J. *The hysteresis Bouc-Wen model, a survey*. Archives of Computational Methods in Engineering, 2009, Vol.16, Pp.161-188.
64. Ikhoulane F., Mañosa V., Rodellar J. *Dynamic properties of the hysteretic Bouc-Wen model*. Systems & Control Letters, 2007, Vol.56, Pp.197-205.
65. Ikhoulane F., Rodellar J. *On the hysteretic Bouc-Wen model*. Nonlinear Dynamics, 2005, Vol.42, Pp.63-78.
66. Danilin A.N., Vinogradov A.A., Lilien J.-L. *Kinematic model for hysteretic dissipation of vibration energy for Torsional Damper and Detuner // 7<sup>th</sup> Intern. Symp. on Cable Dynamics*. Proceedings. Vienna, Austria, 10-13 December 2007, Pp.247-253.
67. Danilin A.N., Kozlov K.S. *Modelirovanie nestatsionarnykh kolebaniy gasitelia vibratsii s uchetom gisterezisa dissipatsii energii [Modeling of nonstationary vibrations of a damper with hysteresis energy dissipation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2013, Vol.19, No.1, Pp.34-47.
68. Danilin A.N., Kuznetsova E.L., Rabinskii L.N. *Model' gisterezisa energorasseianiia pri kolebaniiaakh mekhanicheskikh sistem [Modeling hysteresis of energy dissipation at vibration of mechanical systems]*. Vestnik PNIPU. Mekhanika, 2014, No.4, Pp.45-67.
69. Hagedorn P., Gutzler U. *On the mechanical hysteresis and bending stiffness of conductors and cables*. 6<sup>th</sup> Intern. Offshore and Polar Engineering Conf. Proceedings. Los Angeles, 1996, Vol.2, Pp.175-181.
70. Sauter D., Hagedorn P. *On the hysteresis of wire cables in Stockbridge dampers // Intern. J. of Nonlinear Mechanics*, 2002, Vol.37, Pp.1453-1459.
71. Leenen R. *The modelling and Identification of an Hysteretic System. The Wire-Rope as a Nonlinear Shock Vibration Isolator*. – Report DCT 2002.72 (December 2002). Department of Mechanical Engineering Eindhoven University of Technology, 2002.

*Поступила в редакцию 16 мая 2016 года*

---

Сведения об авторах:

Данилин Александр Николаевич – д.ф.-м.н., проф., зам. дир. по научной работе, ФГБУН Институт прикладной механики РАН, зав. каф. «Механика наноструктурных материалов и систем» МАИ, г. Москва, Россия; e-mail: [andanilin@yandex.ru](mailto:andanilin@yandex.ru)

Виноградов Александр Абрамович – к.т.н., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

Карнет Юлия Николаевна – к.ф.-м.н., уч. секр., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [iam@iam.ras.ru](mailto:iam@iam.ras.ru)