УДК 539. 3

МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ИЗОТРОПНЫХ МЕЖФАЗНЫХ СЛОЁВ В ТЕОРИИ СРЕД С ПОЛЯМИ ДЕФЕКТОВ

Белов П.А.[*], Лурье С.А.[**], Харченко К.Д.[***], Лыкосова Е.Д.[**]

[*]*Научно-инновационный центр "Институт развития исследований, разработок и трансферта технологий", г. Москва, Россия*
[**]*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*
[***]*Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

В работе развивается модель функциональных межфазных слоев на основе общей теории сред с полями сохраняющихся дислокаций (ССД). Доказывается, что все известные градиентные модели изотропных сред первого порядка являются строгими частными случаями теории ССД. Формулируется теорема об эквивалентности деформирования изотропных сред с полями дефектов и функциональных градиентных сред, в которых переменность свойств определяется полями дефектов, построенными по нелокальным решениям теории ССД. Физический смысл переменности свойств среды следует связавать с поврежденностью свойств исходного изотропного материала от полей дефектов. Доказанная теорема эквивалентности фактически дает метод определения эффективных свойств поврежденной среды как функционально-градиентного изотропного материала. Так как поля дефектов локализованы в окрестности зон концентраций напряжений, границ областей, то и переменность свойств функционально-градиентных структур, связанных с полями дефектов, также локализованы. Поэтому такие структуры условно называются межфазными слоями. Доказывается утверждение о том, что имеет место эквивалентность между моделями градиентной теории упругости для изотропного материала с постоянными свойствами и моделями классической теории упругости для функционального градиентного материала с переменными свойствами. Переменность свойств функционально-градиентного материала при этом полностью определяется решениями нелокальной градиентной теории упругости. На основе установленной эквивалентности приводится объяснение переменности механических свойств межфазных изотропных слоёв (функционально-градиентных слоев) и отсутствия у них фиксированных геометрических границ. Отмечается зависимость эффективных свойств межфазных слоев от условий нагружения. Приведен иллюстративный пример существования переменного модуля Юнга межфазного слоя для составного стержня.

Ключевые слова*:* механика дефектных сред; масштабные эффекты; когезионные взаимодействия; адгезионные взаимодействия; теория межфазного слоя; композиты; неклассические упругие характеристики

MODELING OF MECHANICAL PROPERTIES OF ISOTROPIC INTERPHASE LAYERS IN THE THEORY OF CONTINUA WITH DEFECT FIELDS

Belov P.A.[*], Lurie S.A.[**], Kharchenko K.D.[***], Lykosova E.D.[**]

*Scientific-innovation Center "Institute of Research, Development and Technology Transfer ", Moscow, Russia
**Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
***Moscow Aviation Institute (Technical Research University), Moscow, Russia

ABSTRACT

A model of functional interphase layers is developed on the basis of the general theory of continua with conserved dislocation fields (CCD). It is proven that all known models of gradient media are special cases of the CCD theory. The theorem on the equivalence of deformation of CCD and functionally graded materials is formulated. The variability of the properties of functionally graded materials is defined by the defect fields which are established using nonlocal solutions of the CCD theory. The physical meaning of the variability of the functionally graded materials properties can be connected with the damage of the isotropic material by the defect fields. The proven equivalence theorem provides the effective method for determining of the properties of the damaged continua as an isotropic functionally graded material. Since the defect fields are localized in the neighborhood of stress concentrators or boundaries, then the areas of the variability of properties of functionally graded structures associated with defects are localized. Therefore such structures are conventionally known as “interfacial layers”. The equivalence of the gradient elasticity theory for isotropic materials with constant properties and the classical elasticity theory for functionally graded materials with varying properties is proven. The variability of the properties of functionally graded materials are fully defined by solutions of the nonlocal gradient elasticity theory. The variability of mechanical properties of isotropic interphase layers (functionally graded layers) and the absence of their fixed boundaries is shown on the basis of the proven equivalence. The dependence of the effective properties of interphase layers on the loading conditions is found. The existence of the variable Young modulus of the interphase layer in the compounded bar is presented as an example of the developed theory.

Keywords: mechanics of defective media; scale effects; cohesive interaction; adhesion interaction; theory of interfacial layer; composites; non-classical elastic characteristics

ВВЕДЕНИЕ

Мы будем обсуждать свойства дефектных сред, которые намного сложнее и многообразнее свойств сплошных (бездефектных) сред. Свойства полей дефектов состоит в том, что, как правило, они концентрируются в зонах концентрации напряжений и в результате, изменяют свойства материалов, что связано с ростом поврежденности. Такие поврежденные структуры мы будем называть межфазными слоями. Одним из результатов статьи является моделирование механических свойств межфазных слоев.

Исторически модели сред с полями дефектов, градиентные теорий деформаций начали свое развитие благодаря оригинальным работам [1-7]. Прикладные обобщенные теории были разработаны первоначально для задач теории пластичности [8-10], а затем и для теории упругости [11-16]. В противоположность классической теории упругости, для которой в определяющих уравнениях не принимаются во внимание какие-либо масштабные параметры, эти теории деформации включают параметры размерности длины, и поэтому вполне подходят для моделирования масштабных эффектов. Вариационные модели сред с полями дефектов и градиентные теории упругости в последние годы активно развивались в работах [17-18]. В этих статьях строятся корректные модели сред с микроструктурой, определяемые тензором свободных деформаций, и обобщающие известные модели Миндлина, Коссера и Аэро-Кувшинского. Предлагаемые модели не только учитывают масштабные эффекты, но также являются основой для описания широкого спектра адгезионных взаимодействий.

Свойства реальных материалов сложнее и многообразнее свойств сплошных (бездефектных) сред. Экспериментально подобные масштабные эффекты подтверждаются, для различных материалов, например, для алюминия, эпоксидной смолы, полипропилена [19-21]. Тем не менее, обобщенные теории деформации в первую очередь привлекались для моделирования аномальных физико-механических свойств гетерогенных сред с микроструктурой, дисперсных композитов с микро-нановключениями, керамик и пр. [22-25]. Отметим, что для моделирования масштабных эффектов в различных физико-механических процессах, как правило, используются градиентные теории первого порядка в силу их относительной простоты.

Решения краевых задач в теории сред с полями дефектов и градиентных теориях деформаций обладают свойством локализации в окрестности границ раздела фаз, особых точек смены типа, граничных условий, иных особых точек и линий возмущения и поэтому допускают трактовку пограничных слоев в их окрестности как зон повреждений, вызванных локализацией полей дефектов или градиентных масштабных эффектов.

В данной работе предлагается новая трактовка сред с полями дефектов и локальных деформированных структур, описываемых с помощью градиентной упругости для однородных изотропных материалов в окрестности особых точек как некоторых межфазных слоев с переменными свойствами. В общем случае свойства таких функциональных межфазных слоев с переменными свойствами зависят от координат, а также от условий нагружений и краевых условий. Среды с изотропными и неизменными в отношении координат свойствами будем называть однородными средами. Поэтому будем говорить о возможности эквавалентной трактовки однородных сред, локализованное деформированное состояние которых описывается в рамках обобщенных моделей деформирования и сред с переменными свойствами функциональных сред, описываемых в рамках классической теории упругости. Отметим, что в работе [26] уже была сделана попытка сравнивать решения градиентной теории упругости с решениями классической теории упругости тел с переменными свойствами около границ раздела фаз.

Первые два раздела работы являются сжатым, формализованным и, в некотором смысле, обобщенным изложением полученных ранее вариационных формулировок рассматриваемых моделей сред, которые далее используются для построения моделей межфазных слоев. В третьем разделе доказывается утверждение об эквивалентности вариационных модели межфазного слоя с переменными характеристиками и модели среды с полями дефектов. Наконец, в последнем разделе настоящей статьи на основе модели дисперсных сред демонстрируется возможность использования градиентных решений для описания свойств неоднородных структур в окрестности контакта фаз как функционального материала с переменными свойствами.

1. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА

Запишем вариационную модель сред с полями дефектов. Лагранжиан L общей модели имеет вид

$$L = A - U = A - \iiint U_V dV - \oiint U_F dF - \sum \oint U_S ds - \sum U_P \tag{1}$$

Здесь: A – работа внешних сил, U_V – объёмная плотность потенциальной энергии, U_F – поверхностная плотность потенциальной энергии (энергии адгезии), U_S – погонная плотность потенциальной энергии ребер (если они есть), U_P – потенциальная энергия угловых точек (если они есть).

$$U_V = U_V(D^1_{ij}, D^2_{ij}, D^1_{ijn}, D^2_{ijn}) \tag{2}$$

$$U_F = U_F(D^1_{ij}, D^2_{ij}, D^1_{ijq}\delta^*_{qk}, D^2_{ijn}\delta^*_{qk}) \tag{3}$$

$$U_S = U_S(D^1_{ij}, D^2_{ij}, D^1_{ijn}s_n, D^2_{ijn}s_n) \tag{4}$$

$$U_P = U_P(D^1_{ij}, D^2_{ij}) \tag{5}$$

Здесь D^1_{ij}, D^2_{ij} – кинематические переменные второго ранга, которые в [25] трактовались соответственно как интегрируемая (стесненная, сорт-1) и неинтегрируемая (свободная, сорт-2) дисторсия. D^1_{ijn}, D^2_{ijn} – кинематические переменные третьего ранга, которые трактовались соответственно как кривизны двух сортов: градиенты интегрируемой и неинтегрируемой дисторсии. δ_{ij} - тензор Кронекера. $\delta^*_{ij} = (\delta_{ij} - n_i n_j)$ – «плоский» тензор Кронекера, определенный на поверхности тела с ортом нормали n_i, s_i – орт касательной к ребру поверхности, если таковое имеется. Верхние индексы кинематических переменных являются номером сорта переменных. В соответствии с [25], между кинематическими переменными установлены соотношения, аналогичные соотношениям Коши

$$D^1_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial x_j} = R_{i,j} \quad D^1_{ijk} = \frac{\partial D^1_{ij}}{\partial x_k} = R_{i,jk} \quad D^2_{ijk} = \frac{\partial D^2_{ij}}{\partial x_k} = D^2_{ij,k} \tag{6}$$

Здесь R_i – непрерывная часть вектора перемещений. Соотношения (6) в совокупности определяют кинематическую модель изучаемой среды.

Для каждой плотности потенциальной энергии выведены свои формулы Грина, определяющие силовые факторы соответственно: в объёме тела, на поверхности, ребрах и угловых точках.

Для силовых факторов в объеме среды формулы Грина дают определения напряжений двух сортов $\sigma^1_{ij}, \sigma^2_{ij}$ и моментных напряжений двух сортов $\sigma^1_{ijk}, \sigma^2_{ijk}$

$$\sigma^1_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial D^1_{ij}} \quad \sigma^2_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial D^2_{ij}} \quad \sigma^1_{ijk} = \frac{\partial U_V}{\partial D^1_{ijk}} \quad \sigma^2_{ijk} = \frac{\partial U_V}{\partial D^2_{ijk}} \tag{7}$$

Для силовых факторов на поверхности среды формулы Грина дают определения адгезионных напряжений двух сортов a^1_{ij}, a^2_{ij} и адгезионных моментных напряжений двух сортов a^1_{ijk}, a^2_{ijk}

$$a^1_{ij} = \frac{\partial U_F}{\partial D^1_{ij}} \quad a^2_{ij} = \frac{\partial U_F}{\partial D^2_{ij}} \quad a^1_{ijk} = \frac{\partial U_F}{\partial D^1_{ijk}} \quad a^2_{ijk} = \frac{\partial U_F}{\partial D^2_{ijk}} \tag{8}$$

Для силовых факторов на ребрах поверхности среды

$$b_{ij}^1 = \frac{\partial U_S}{\partial D_{ij}^1} \quad b_{ij}^2 = \frac{\partial U_S}{\partial D_{ij}^2} \quad B_{ij}^1 = \frac{\partial U_S}{\partial (D_{ijn}^1 s_n)} \quad B_{ij}^2 = \frac{\partial U_S}{\partial (D_{ijn}^2 s_n)} \tag{9}$$

Спектр силовых факторов в угловых точках ребер поверхности

$$f_{ij}^1 = \frac{\partial U_P}{\partial D_{ij}^1} \quad f_{ij}^2 = \frac{\partial U_P}{\partial D_{ij}^2} \tag{10}$$

Таким образом, следуя алгоритму построения модели в рамках «кинематического» вариационного принципа [17,18,22-24], достаточно формально была получена структура потенциальной энергии (1)-(5), формулы Грина и силовая модель (7)-(10), соответствующие выбранной кинематической модели (6).

В предположении физической линейности уравнений закона Гука, объёмная плотность потенциальной энергии U_V была получена как положительно определенная изотропная квадратичная форма своих аргументов.

$$2U_V = C_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + C_{ijkmnl}^{ab} D_{ijk}^a D_{mnl}^b \tag{11}$$

В [25] были построены тензоры модулей четвертого ранга C_{ijmn}^{ab} и шестого ранга C_{ijkmnl}^{ab}. Установлены их структуры и соответствующее этим структурам количество модулей. С учетом (11) из обобщенных формул Грина (7) были получены уравнения закона Гука для силовых факторов в объеме среды

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^1 &= C_{ijmn}^{11} R_{m,n} + C_{ijmn}^{12} D_{mn}^2 \quad & \sigma_{ijk}^1 &= C_{ijkmnl}^{11} R_{m,nl} + C_{ijkmnl}^{12} D_{mn,l}^2 \\ \sigma_{ij}^2 &= C_{ijmn}^{21} R_{m,n} + C_{ijmn}^{22} D_{mn}^2 \quad & \sigma_{ijk}^2 &= C_{ijkmnl}^{21} R_{m,nl} + C_{ijkmnl}^{22} D_{mn,l}^2 \end{aligned} \tag{12}$$

В предположении физической линейности уравнений закона Гука, поверхностная плотность потенциальной энергии U_F была построена как положительно определенная трансверсально-изотропная квадратичная форма своих аргументов.

$$2U_F = A_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + 2A_{ijmnl}^{ab} D_{ij}^a D_{mnl}^b + A_{ijkmnl}^{ab} D_{ijk}^a D_{mnl}^b \tag{13}$$

В [17,18,24] были построены тензоры адгезионных модулей четвертого ранга A_{ijmn}^{ab}, а в работе [25] – шестого ранга A_{ijkmnl}^{ab}. Построены и тензоры модулей пятого ранга A_{ijmnl}^{ab}. Установлены их структуры и соответствующее этим структурам количество модулей.

С учетом (13) уравнения закона Гука для силовых факторов на поверхности среды можно получить из обобщенных формул Грина (8)

$$\begin{aligned} a_{ij}^1 &= A_{ijmn}^{11} R_{m,n} + A_{ijmn}^{12} D_{mn}^2 + A_{ijmnl}^{11} R_{m,nl} + A_{ijmnl}^{12} D_{mn,l}^2 \\ a_{ijk}^1 &= A_{mnijk}^{11} R_{m,n} + A_{mnijk}^{21} D_{mn}^2 + A_{ijkmnl}^{11} R_{m,nl} + A_{ijkmnl}^{12} D_{mn,l}^2 \\ a_{ij}^2 &= A_{ijmn}^{21} R_{m,n} + A_{ijmn}^{22} D_{mn}^2 + A_{ijmnl}^{21} R_{m,nl} + A_{ijmnl}^{22} D_{mn,l}^2 \\ a_{ijk}^2 &= A_{mnijk}^{12} R_{m,n} + A_{mnijk}^{22} D_{mn}^2 + A_{ijkmnl}^{21} R_{m,nl} + A_{ijkmnl}^{22} D_{mn,l}^2 \end{aligned} \tag{14}$$

Используя формулировки плотностей потенциальной энергии (11) и (13), в [25] был построен лагранжиан теории в следующем виде

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2} \iiint (C_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + C_{ijkmnl}^{ab} D_{ijk}^a D_{mnl}^b) dV - \\ - \frac{1}{2} \oiint (A_{ijmn}^{ab} D_{ij}^a D_{mn}^b + 2A_{ijmnl}^{ab} D_{ij}^a D_{mnl}^b + A_{ijkmnl}^{ab} D_{ijk}^a D_{mnl}^b) dF \end{aligned} \tag{15}$$

Здесь, в целях лаконичности, не выписаны потенциальные энергии ребер поверхности и их угловых точек. Поэтому лагранжиан в выписанной форме (15) описывает упругие свойства тел без учета индивидуальных физических свойств ребер и угловых точек.

2. ЛАГРАНЖИАН И УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Представим лагранжиан исследуемой здесь теории (15) в развернутом относительно суммирования по индексам сортности виде

$$\begin{aligned}
L = A - \frac{1}{2}\iiint \, &[C^{11}_{ijmn}D^1_{ij}D^1_{mn} + 2C^{12}_{ijmn}D^1_{ij}D^2_{mn} + C^{22}_{ijmn}D^2_{ij}D^2_{mn} + \\
&+C^{11}_{ijkmnl}D^1_{ijk}D^1_{mnl} + 2C^{12}_{ijkmnl}D^1_{ijk}D^2_{mnl} + C^{22}_{ijkmnl}D^2_{ijk}D^2_{mnl}]dV - \\
&-\frac{1}{2}\oiint \, [A^{11}_{ijmn}D^1_{ij}D^1_{mn} + 2A^{12}_{ijmn}D^1_{ij}D^2_{mn} + A^{22}_{ijmn}D^2_{ij}D^2_{mn} + \\
&+2A^{11}_{ijmnl}D^1_{ij}D^1_{mnl} + 2A^{12}_{ijmnl}D^1_{ij}D^2_{mnl} + 2A^{21}_{ijmnl}D^2_{ij}D^1_{mnl} + 2A^{22}_{ijmnl}D^2_{ij}D^2_{mnl} + \\
&+A^{11}_{ijkmnl}D^1_{ijk}D^1_{mnl} + 2A^{12}_{ijkmnl}D^1_{ijk}D^2_{mnl} + A^{22}_{ijkmnl}D^2_{ijk}D^2_{mnl}]dF
\end{aligned} \tag{16}$$

<u>Теория Миндлина.</u> Если в лагранжиане общей теории тензоры «объемных» модулей $C^{11}_{ijkmnl}, C^{12}_{ijkmnl}$ и все тензоры адгезионных модулей положить равными нулю, лагранжиан сформулированной теории совпадет с лагранжианом теории Миндлина [2]

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \, [C^{11}_{ijmn}D^1_{ij}D^1_{mn} + 2C^{12}_{ijmn}D^1_{ij}D^2_{mn} + C^{22}_{ijmn}D^2_{ij}D^2_{mn} + C^{22}_{ijkmnl}D^2_{ijk}D^2_{mnl}]dV$$

Как было доказано в [26], из теории Миндлина, в свою очередь, следуют как строгие частные случаи: «простейшая» теория сред с сохраняющимися дислокациями, теория сред Коссера (теория сред с ω – дислокациями), теория пористых сред (теория сред с θ – дислокациями) и теория сред с γ – дислокациями [10,11].

<u>Теория Тупина.</u> Пусть все тензоры модулей, содержащие индекс сортности 2, равны нулю. Тогда лагранжиан теории принимает вид, совпадающий с лагранжианом идеальной (бездефектной) среды Тупина с адгезионными свойствами поверхности [17], а при $A^{11}_{ijmn} = 0$, $A^{11}_{ijmnl} = 0$ и $A^{11}_{ijkmnl} = 0$ – с «классической» теорией Тупина-Миндлина [1,4]

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \, [C^{11}_{ijmn}D^1_{ij}D^1_{mn} + C^{11}_{ijkmnl}D^1_{ijk}D^1_{mnl}]dV$$

Сформулированная теория радикально меняет точку зрения на место теории Тупина в иерархии градиентных моделей. Теперь она занимает, наравне с теорией Миндлина, положение строгого частного случая более общей теории, а не является приближенным (при гипотезе $D^2_{ij} \approx a_{ijmn}D^1_{mn}$) частным случаем теории Миндлина. Из неё, в свою очередь, вытекают как строгие частные случаи: «простейшая» теория когезионного поля, теория Аэро-Кувшинского [17,25] и др.

Таким образом, в этом разделе показано, что любая теорема, доказанная в рамках общей теории, будет справедлива и для любой известной градиентной теории, имеющей ту же или более простую структуру, чем (16).

В соответствии с (7), (8) вариация лагранжиана (16) может быть записана в виде

$$\delta L = \delta A - \iiint [\sigma^1_{ij}\delta D^1_{ij} + \sigma^2_{ij}\delta D^2_{ij} + \sigma^1_{ijk}\delta D^1_{ijk} + \sigma^2_{ijk}\delta D^2_{ijk}]dV -$$
$$- \oiint [a^1_{ij}\delta D^1_{ij} + a^2_{ij}\delta D^2_{ij} + a^1_{ijk}\delta D^1_{ijk} + a^2_{ijk}\delta D^2_{ijk}]dF$$

В соответствии с (6) вариация лагранжиана (16) может быть записана в виде

$$\delta L = \delta A - \iiint [\sigma^1_{ij}\delta R_{i,j} + \sigma^2_{ij}\delta D^2_{ij} + \sigma^1_{ijk}\delta R_{i,jk} + \sigma^2_{ijk}\delta D^2_{ij,k}]dV -$$
$$- \oiint [a^1_{ij}\delta R_{i,j} + a^2_{ij}\delta D^2_{ij} + a^1_{ijk}\delta R_{i,jk} + a^2_{ijk}\delta D^2_{ij,k}]dF$$

Взяв слагаемые, содержащие кривизны по частям, получим

$$\delta L = \delta A - \iiint [(\sigma^1_{ij} - \sigma^1_{ijk,k})\delta R_{i,j} + (\sigma^2_{ij} - \sigma^2_{ijk,k})\delta D^2_{ij}]dV -$$
$$- \oiint [(a^1_{ij} + \sigma^1_{ijk}n_k - a^1_{ijk,k})\delta R_{i,j} + (a^2_{ij} + \sigma^2_{ijk}n_k - a^2_{ijk,k})\delta D^2_{ij}]dF -$$
$$- \sum \oint \{a^1_{ijk}\nu_k\delta R_{i,j} + a^2_{ijk}\nu_k\delta D^2_{ij}\}ds$$

Введем определения обобщенных силовых факторов

$$\begin{cases}(\sigma^1_{ij} - \sigma^1_{ijk,k}) = \tau^1_{ij}\\ (\sigma^2_{ij} - \sigma^2_{ijk,k}) = \tau^2_{ij}\end{cases} \quad \begin{cases}(a^1_{ij} + \sigma^1_{ijk}n_k - a^1_{ijk,k}) = \tilde{a}^1_{ij}\\ (a^2_{ij} + \sigma^2_{ijk}n_k - a^2_{ijk,k}) = \tilde{a}^2_{ij}\end{cases} \quad \begin{cases}a^1_{ijk}\nu_k = p^1_{ij}\\ a^2_{ijk}\nu_k = p^2_{ij}\end{cases} \qquad (17)$$

Вариационное уравнение в обобщенных силовых факторах, выраженных через исходные кинематические переменные

$$\delta L = \iiint [(\tau^1_{ij,j} + P^V_i)\delta R_i - \tau^2_{ij}\delta D^2_{ij}]dV -$$
$$+ \oiint \{[P^F_i - \tau^1_{ij}n_j + (\tilde{a}^1_{ij}\delta^*_{kj})_{,k}]\delta R_i - \tilde{a}^1_{ij}n_j\delta\dot{R}_i - \tilde{a}^2_{ij}\delta D^2_{ij}\}dF -$$
$$- \sum \oint \{[\tilde{a}^1_{ij}\nu_j - (p^1_{ij}s_j s_k)_{,k}]\delta R_i + p^1_{ij}\delta R_{i,k}(\nu_k\nu_j + n_k n_j) + p^2_{ij}\delta D^2_{ij}\}ds -$$
$$- \sum p^1_{ij}s_j\delta R_i = 0$$
$$(18)$$

3. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ССД И НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ МИНДЛИНА-ТУПИНА

Теорема-1: «Лагранжиан общей теории сред с полями сохраняющихся дислокаций можно представить в виде лагранжиана неоднородной среды Тупина».

Доказательство.

Пусть основные неизвестные R_i и D^2_{ij} удовлетворяют решению некоторой краевой задачи, вытекающей из требования стационарности лагранжиана (16). Другими словами положим, что построено точное решение теории дефектных сред (16) для некоторой краевой задачи.

Введем в качестве промежуточных переменных вместо компонентов тензора свободной дисторсии D^2_{ij} компоненты тензора относительной поврежденности t_{ij} соотношениями

$$D^2_{ij} = t_{ip}R_{p,j} \quad D^2_{ijk} = t_{ip}R_{p,jk} + t_{ip,k}R_{p,j} \qquad (19)$$

Из определения (19) следует, что тензор t_{ij} тоже является известной функцией координат, единственным образом соответствующий выбранной краевой задаче, если определитель тензора $R_{p,j}$ не равен нулю.

Подставляя (19) в (16), получим

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint [(C^{11}_{pjqn} + 2C^{12}_{pjmn}t_{mq} + C^{22}_{ijmn}t_{ip}t_{mq} + C^{22}_{ijkmnl}t_{ip,k}t_{mq,l})R_{p,j}R_{q,n} +$$
$$+ 2(C^{12}_{pjkmnl}t_{mq,l} + C^{22}_{ijkmnl}t_{ip}t_{mq,l})R_{q,n}R_{p,jk} +$$
$$+ (C^{11}_{pjkqnl} + 2C^{12}_{pjkmnl}t_{mq} + C^{22}_{ijkmnl}t_{ip}t_{mq})R_{p,jk}R_{q,nl}]dV -$$
$$- \frac{1}{2}\oiint [(A^{11}_{pjqn} + 2A^{12}_{pjmn}t_{mq} + 2A^{12}_{pjmnl}t_{mq,l} +$$
$$+ A^{22}_{ijmn}t_{ip}t_{mq} + 2A^{22}_{ijmnl}t_{ip}t_{mq,l} + A^{22}_{ijkmnl}t_{ip,k}t_{mq,l})R_{p,j}R_{q,n} +$$
$$+ (2A^{11}_{pjqnl} + 2A^{12}_{pjmnl}t_{mq} + 2A^{12}_{qnlijk}t_{ip,k} + 2A^{21}_{ijqnl}t_{ip} +$$
$$+ 2A^{22}_{ijmnl}t_{ip}t_{mq} + A^{22}_{ijkmnl}t_{ip,k}t_{mq} + A^{22}_{ijkmnl}t_{mq}t_{ip,k})R_{p,j}R_{q,nl} +$$
$$+ (A^{11}_{pjkqnl} + 2A^{12}_{pjkmnl}t_{mq} + A^{22}_{ijkmnl}t_{ip}t_{mq})R_{p,jk}R_{q,nl}]dF$$

Введем определения переменных по координатам тензорных полей упругих $\tilde{C}_{ijmn}, \tilde{C}_{ijmnl}, \tilde{C}_{ijkmnl}$ и адгезионных $\tilde{A}_{ijmn}, \tilde{A}_{ijmnl}, \tilde{A}_{ijkmnl}$ свойств:

$$\begin{cases} \tilde{C}_{ijmn} = C^{11}_{ijmn} + 2C^{12}_{ijbn}t_{bm} + C^{22}_{ajbn}t_{ai}t_{bm} + C^{22}_{ajkbnl}t_{ai,k}t_{bm,l} \\ \tilde{C}_{ijmnl} = (C^{12}_{mnlbjk} + C^{22}_{anlbjk}t_{am})t_{bi,k} \\ \tilde{C}_{ijkmnl} = C^{11}_{ijkmnl} + 2C^{12}_{ijkbnl}t_{bm} + C^{22}_{ajkbnl}t_{ai}t_{bm} \end{cases}$$
$$\begin{cases} \tilde{A}_{ijmn} = A^{11}_{ijmn} + 2A^{12}_{ijbn}t_{bm} + A^{22}_{ajbn}t_{ai}t_{bm} + (2A^{12}_{ijbnl} + 2A^{22}_{ajbnl}t_{ai} + A^{22}_{ajkbnl}t_{ai,k})t_{bm,l} \\ \tilde{A}_{ijmnl} = A^{11}_{ijmnl} + A^{12}_{ijbnl}t_{bm} + A^{21}_{ajmnl}t_{ai} + A^{22}_{ajbnl}t_{ai}t_{bm} + (A^{12}_{mnlajk} + A^{22}_{ajkbnl}t_{bm})t_{ai,k} \\ \tilde{A}_{ijkmnl} = (A^{11}_{ijkmnl} + 2A^{12}_{ijkbnl}t_{bm} + A^{22}_{ajkbnl}t_{ai}t_{bm}) \end{cases} \quad (20)$$

Используя (19), (20), можно привести лагранжиан общей теории (16) к лагранжиану неоднородной среды Тупина

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \{\tilde{C}_{ijmn}R_{i,j}R_{m,n} + 2\tilde{C}_{ijmnl}R_{i,j}R_{m,nl} + \tilde{C}_{ijkmnl}R_{i,jk}R_{m,nl}\}dV -$$
$$- \frac{1}{2}\oiint \{\tilde{A}_{ijmn}R_{i,j}R_{m,n} + 2\tilde{A}_{ijmnl}R_{i,j}R_{m,nl} + \tilde{A}_{ijkmnl}R_{i,jk}R_{m,nl}\}dF \quad (21)$$

Таким образом, доказано, что лагранжианы (16) и (21) эквивалентны, если справедливы соотношения (19).

Получим вариационное уравнение, соответствующее условию стационарности лагранжиана (21), в новых переменных с учетом определений обобщенных силовых факторов (17)

$$\delta L = \iiint \{[\tau^1_{ij,j} + P^V_i + (\tau^2_{kj}t_{ki})_{,j}]\delta R_i - \tau^2_{ij}R_{p,j}\delta t_{ip}\}dV -$$
$$+ \oiint \{[P^F_i - \tau^1_{ij}n_j + (\tilde{a}^1_{ij}\delta^*_{kj})_{,k} - \tau^2_{kj}t_{ki}n_j + (\tilde{a}^2_{kj}t_{ki}\delta^*_{qj})_{,q}]\delta R_i -$$
$$- (\tilde{a}^1_{ij}n_j + \tilde{a}^2_{kj}t_{ki}n_j)\delta\dot{R}_i - \tilde{a}^2_{ij}R_{p,j}\delta t_{ip}\}dF -$$
$$- \sum \oint \{[\tilde{a}^1_{ij}\nu_j - (p^1_{ij}s_j s_k)_{,k} + \tilde{a}^2_{kj}t_{ki}\nu_j - (p^2_{qj}t_{qi}s_k s_j)_{,k}]\delta R_i +$$
$$+ (p^1_{ij} + p^2_{qj}t_{qi})\delta R_{i,k}(\nu_k\nu_j + n_k n_j) + p^2_{ij}R_{p,j}\delta t_{ip}\}ds -$$
$$- \sum [p^1_{ij}s_j + p^2_{qj}t_{qi}s_j]\delta R_i = 0 \quad (22)$$

Сравнение уравнений Эйлера в старых (18) и новых (22) переменных приводит к следующему заключению: уравнения Эйлера совпадают, если определитель тензора стесненной дисторсии $R_{p,j}$ не равен нулю.

В старых переменных

$$\begin{cases} \tau^1_{ij,j} + P^V_i = 0 \\ \tau^2_{ij} = 0 \end{cases}$$

В новых переменных

$$\begin{cases} \tau^1_{ij,j} + P^V_i + (\tau^2_{kj} t_{ki})_{,j} = 0 \\ \tau^2_{ij} R_{p,j} = 0 \end{cases}$$

Сравнение краевых задач в старых и новых переменных приводит к следующему заключению: краевые задачи совпадают, если определитель тензора стесненной дисторсии $R_{p,j}$ не равен нулю.

Формулировка спектра краевых задач в старых переменных

$$\oiint \{[P^F_i - \tau^1_{ij} n_j + (\tilde{a}^1_{ij}\delta^*_{kj})_{,k}]\delta R_i - \tilde{a}^1_{ij} n_j \delta\dot{R}_i - \tilde{a}^2_{ij}\delta D^2_{ij}\} dF -$$
$$- \sum \oint \{[\tilde{a}^1_{ij} v_j - (p^1_{ij} s_j s_k)_{,k}]\delta R_i + p^1_{ij}\delta R_{i,k}(v_k v_j + n_k n_j) + p^2_{ij}\delta D^2_{ij}\} ds -$$
$$- \sum p^1_{ij} s_j \delta R_i = 0$$

Формулировка спектра краевых задач в новых переменных

$$\oiint \{[P^F_i - \tau^1_{ij} n_j + (\tilde{a}^1_{ij}\delta^*_{kj})_{,k} - \tau^2_{kj} t_{ki} n_j + (\tilde{a}^2_{kj} t_{ki}\delta^*_{qj})_{,q}]\delta R_i -$$
$$- (\tilde{a}^1_{ij} n_j + \tilde{a}^2_{kj} t_{ki} n_j)\delta\dot{R}_i - \tilde{a}^2_{ij} R_{p,j}\delta t_{ip}\} dF -$$
$$- \sum \oint \{[\tilde{a}^1_{ij} v_j - (p^1_{ij} s_j s_k)_{,k} + \tilde{a}^2_{kj} t_{ki} v_j - (p^2_{qj} t_{qi} s_k s_j)_{,k}]\delta R_i +$$
$$+ (p^1_{ij} + p^2_{qj} t_{qi})\delta R_{i,k}(v_k v_j + n_k n_j) + p^2_{ij} R_{p,j}\delta t_{ip}\} ds -$$
$$- \sum [p^1_{ij} s_j + p^2_{qj} t_{qi} s_j]\delta R_i = 0$$

Таким образом, теорема доказана для всех возможных кинематических состояний, удовлетворяющих условию

$$\left| R_{p,q} \right| = R_{i,m} R_{j,n} R_{k,l} Э_{ijk} Э_{mnl} \neq 0$$

Обратим внимание на то, что формулировка общей теории сред с полями сохраняющихся дислокаций в форме (21) не содержит в явном виде тензор свободных дисторсий D^2_{ij} или тензор относительной поврежденности t_{ij}. Эти переменные оказались «спрятанными» в тензорные поля упругих и адгезионных свойств. Так как для каждой конкретной краевой задачи тензор относительной поврежденности t_{ij} известен как функция координат, то в соответствии с (20) и поля упругих и адгезионных свойств также известны как функции координат. Учтем тот факт, что свободная дисторсия D^2_{ij} и, следовательно, относительная поврежденность t_{ij} концентрируются вблизи поверхностей возмущения и носят локальный характер. Тогда с точки зрения определений (19) можно утверждать, что переменность механических свойств, обусловленная тензорными полями $\tilde{C}_{ijmn}, \tilde{C}_{ijmnl}, \tilde{C}_{ijkmnl}$ и $\tilde{A}_{ijmn}, \tilde{A}_{ijmnl}, \tilde{A}_{ijkmnl}$, также носит локальный характер.

Следствие 1.

Области изотропной среды вблизи поверхностей возмущения можно трактовать с точки зрения неоднородной среды Тупина как межфазные слои (в силу локальности тензорных полей механических свойств).

Следствие 2.

Межфазные слои являются неклассическими изотропными неоднородными объектами, не имеющими фиксированной толщины. В то же время они обладают определенными геометрическими параметрами, связанными с отношениями неклассических модулей разной физической размерности (с характерными длинами когезионных и адгезионных взаимодействий).

Здесь уместна аналогия с краевыми эффектами теории пластин Тимошенко. Краевой эффект не имеет фиксированной длины, так как определяется затухающей экспонентой, но имеет соответствующую характерную длину, связанную с отношением жесткости на сдвиг и цилиндрической жесткости. В отличие от краевых эффектов, масштабные эффекты зависят только от материала среды и имеют абсолютный характер. Поэтому для макротел они пренебрежимо малы по сравнению с краевыми эффектами, для мезоструктур они имеют тот же порядок, что и краевые эффекты, а для наноструктур они, как правило, доминируют.

Следствие 3. В силу единственности решения краевой задачи, межфазные слои для различных краевых задач будут разными.

Следствие 4. При однопараметрическом нагружении в силу (19), тензор относительной поврежденности t_{ij} не зависит от параметра нагрузки. Соответственно, от параметра нагрузки не будут зависеть и поля механических свойств межфазных слоев в силу (20).

Следствие 5. При многопараметрическом нагружении в силу (19), тензор относительной поврежденности t_{ij} будет уже рациональной функцией параметров нагрузок. Соответственно и поля механических свойств межфазных слоев в силу (20) будут зависеть от конкретной комбинации внешних нагрузок [27-29].

4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ МОДЕЛИ ГРАДИЕНТНОЙ УПРУГОСТИ И МОДЕЛИ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА

Установим эквивалентность модели градиентной упругости для изотропных сред с постоянными свойствами и модели классической упругости для функционально-градиентного материала. Рассмотрим вариационную модель градиентной деформаций ($m_{ijk} = m_{jik}$), которая определяется следующим вариационным равенством

$$\begin{aligned} \delta L = \delta A - \iiint [\sigma_{ij}\delta d_{ij} + m_{ijk}\delta d_{ij,k}]dV = \\ = \iiint [(\sigma_{ij,j} + P_i^V)\delta R_i + m_{ijk,k}\delta d_{ij}]dV + \\ + \oint\!\!\oint \{[P_i^F - \sigma_{ij}n_j]\delta R_i - m_{ijk}n_k\delta D_{ij}\}dF = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

Исследуем проблему эквивалентности модели среды, задаваемой вариационным равенством (23) и классической теории упругости. Для этого приведем вариационную постановку (23) к вариационной постановке классической упругости. Полагаем, что поля перемещений и дисторсий являются решениями краевой задачи, следующей из (23). Перепишем лагранжиан (23) в следующем виде

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint [\sigma_{ij}R_{i,j} + m_{ijk,k}d_{ij} + (m_{ijk,k}d_{ij} + m_{ijk}d_{ij,k})]dV =$$
$$= A - \frac{1}{2}\iiint [(\sigma_{ij} + m_{ijk,k})R_{i,j}]dV - \frac{1}{2}\oiint (m_{ijk}n_k)d_{ij}dV \tag{24}$$

В соответствии с вариационным уравнением (23) поверхностный интеграл в правой части (24) равен нулю в силу неклассических граничных условий в уравнении (23) $(m_{ijk}n_k)\delta d_{ij} = 0$. Таким образом, потенциальная энергия в (24) приобретает классический вид

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint t_{ij}R_{i,j}dV, \quad t_{ij} = \sigma_{ij} + m_{ijk,k} \tag{25}$$

Далее отметим, что всегда можно определить тензорное поле податливостей так, чтобы выполнялось соотношение

$$(R_{i,j} + R_{j,i})/2 = E^{-1}_{ijpq}t_{pq} \tag{26}$$

Следовательно, равенство (25) можно переписать в форме плотности потенциальной энергии классической неоднородной среды, т.е. классической теории с переменными свойствами

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \{E^{-1}_{ijmn}\, t_{ij}\, t_{mn}\}dV \tag{27}$$

5. ПРИМЕР

В качестве примера рассмотрим решение в биплоской 2D-постановке «простейшей» теории когезионного поля для задачи растяжения составного стержня и реализуем алгоритм (25)-(27). Стержень представлен как периодическая структура, с постоянным поперечным сечением F, состоящий из N фрагментов матрицы и армирующего материала с модулями Юнга $E_{M,D}$, «моментными» модулями $C_{M,D}$ и длинами $\rho_{M,D}$.

$$L = (P_iX_i)r\,|_{x=0}^{x=l} - \frac{1}{2}\int_0^l EF[r'r' + \frac{E}{C}r''r'']dx \tag{28}$$

Преобразуем лагранжиан (28) к виду, соответствующему лагранжиану классической неоднородной среды

$$L = (P_iX_i)r\,|_{x=0}^{x=l} - \frac{1}{2}\int_0^l EF[(r' - \frac{E}{C}r''')r' + \frac{E}{C}r'''r' + \frac{E}{C}r''r'']dx =$$
$$= (P_iX_i)r\,|_{x=0}^{x=l} - \frac{1}{2}\int_0^l EF[(r' - \frac{E}{C}r''')r' + \frac{E}{C}(r''r')']dx =$$
$$= (P_iX_i)r\,|_{x=0}^{x=l} - \frac{F}{2}\int_0^l E(r' - \frac{E}{C}r''')r'dx =$$
$$= (P_iX_i)r\,|_{x=0}^{x=l} - \frac{F}{2}\int_0^l E(1 - \frac{E}{C}r'''/r')r'r'dx =$$
$$= (P_iX_i)r\,|_{x=0}^{x=l} - \frac{F}{2}\int_0^l \tilde{E}r'r'dx \tag{29}$$

Решение для составного стержня, вытекающее из (29)

$$
\begin{cases}
r_D(x) = \dfrac{P}{E_D F}\{x + x_f \dfrac{sh(a_D x)}{sh(a_D \rho_D / 2)}\} \\
r_M(x) = \dfrac{P}{2F}(\dfrac{\rho_M}{E_M} + \dfrac{\rho_D}{E_D}) - \dfrac{P}{F}(\dfrac{1}{E_M} - \dfrac{1}{E_D})x_f + \\
+\dfrac{P}{E_M F}(x - (\rho_D / 2 + \rho_M / 2)) - \dfrac{P}{E_M F} x_f \dfrac{sh(a_M(x - (\rho_D / 2 + \rho_M / 2))}{sh(a_M \rho_M / 2)}
\end{cases}
$$

Здесь $a_{D,M} = \sqrt{C_{D,M} / E_{D,M}}$, $\quad x_f = \dfrac{(E_D - E_M)}{(E_M \beta_D + E_D \beta_M)}$, $\quad \beta_{D,M} = \dfrac{a_{D,M}}{th(a_{D,M} \rho_{D,M} / 2)}$

В соответствии с определением модуля Юнга неоднородной классической среды, вытекающего из (29), можно получить его явное выражение

$$
\tilde{E}(x) = \begin{cases}
E_D / [1 + x_f \beta_D ch(a_D x) / ch(a_D \rho_D / 2)] & - \textit{внутри включения} \\
(E_M \beta_D + E_D \beta_M) / (\beta_D + \beta_M) & - \textit{на границе контакта} \\
E_M / [1 - x_f \beta_M ch(a_M(x - (\rho_D + \rho_M) / 2) / ch(a_M \rho_M / 2)] & - \textit{в матрице}
\end{cases}
\qquad (30)
$$

Из выражения (30) видно, что модуль Юнга классической неоднородной среды является непрерывной функцией координаты x, и асимптотически приближается к значениям модулей матрицы E_M и включения E_D при удалении от границы контакта $\rho_D / 2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эквивалентность моделей (16), (21) даёт возможность утверждать следующее:

1. Любая градиентная теория упругости позволяет описать межфазные слои как неклассические изотропные объекты, локализованные в области материала, примыкающей к поверхности тела (в том числе и к границе контакта тел). В общем случае межфазные слои можно описать в рамках модели неоднородной среды Тупина-Миндлина (21).
2. Межфазные слои нельзя рассматривать как классические ортотропные или трансверсально изотропные объекты.
3. Межфазные слои нельзя рассматривать как объекты с фиксированной толщиной.
4. Механические свойства межфазных слоев с точки зрения классической механики сплошной среды являются переменными (зависят от координат).
5. Механические свойства межфазных слоев зависят как от условий нагружения, так и от условий закрепления тела – от формулировки краевой задачи.
6. Одна и та же составная конструкция или композиционный материал будут иметь разные эффективные жесткости при разных расчетных случаях, если учет межфазных слоев дает существенный вклад в эффективную жесткость конструкции или композиционного материала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Toupin R.A.: *Elastic materials with couple stresses* // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1962. – Vol.11. – P.385-414.

2. Mindlin R.D. *Micro-structure in linear elasticity* // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1964. – Vol.16. – P.51-78.
3. Mindlin R.D. *Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity* // Int. J. Solids Struct. – 1965. – Vol.1. – P.417-438.
4. Mindlin R.D., Eshel N.N. *On first strain-gradient theories in linear elasticity* // Int. J. Solids Struct. – 1968. – Vol.4. – P.109-124.
5. Aifantis E.C. *Gradient effects at the macro, micro and nano scales* // J. Mech. Behav. Mater. – 1994. – Vol.5. – N3. – P.355-375.
6. Altan B.S., Aifantis E.C. *On some aspects in the special theory of gradient elasticity* // J. Mech. Behav. Mater. – 1997. – Vol.8. – N3. – P.231-282.
7. Maugin G.A., Alshits V.I., Kirchner H.O.K.: *Elasticity in multilayers. Properties of the propagation matrix and some applications* // Math. Mech. Solids. – 2001. – Vol.6. – P.481-502.
8. Aifantis E.C. *On the microstructural origin of certain inelastic models* // Trans ASME. J. Engng. Mat. Tech. – 1986. – N106. – P.326-330.
9. Aifantis E.C. *The physics of plastic deformation* // Int. J. Plastisity. – 1987. – N3. – P.211-247.
10. Fleck N.A., Hutchinson J.W. *Strain gradient plasticity* // Advances in Applied Mechanics. – 1997. – Vol.33. – P.295-361.
11. Aifantis E.C., *On the role of gradient in the localization of deformation and fracture* // Int. J. Engng. Sci. – 1992. – N30. – P.1279-1299.
12. Ru C.Q. Ru and Aifantis E.C. *A simple approach to solve boundary value problems in gradient elasticity* // Acta Mech. – 1993. –N101. – P.59-68.
13. Gao X.-L., Park S.K. *Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem* // Int. J. Solids Struct. – 2007. – N44. – P.7486-7499.
14. Forest S., Aifantis E.C. *Some links between recent gradient thermo-elasto-plasticity theories and the thermodynamics of generalized continua* // Int. J. Solids Struct. – 2010. – N47. – P.3367-3376.
15. Askes H., Aifantis E.C. *Gradient elasticity in statics and dynamics an overview of formulations, length, scale identifications procedures, finite element implementation procedures and new results* // Int. J. Solids Struct. – 2011. – N48. – P.1962-1990.
16. Mindlin R.D. *Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity* // Int. J. Solids Struct. – 1965. – N1. – P.417-438.
17. Belov P.A., Lurie S.A. *A continuum model of microheterogeneous media* // J. of Applied Math. and Mech. – 2009. – Vol.73. – N5. – P.599-608.
18. Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N.P. *Gradient theory of media with conserved dislocations: application to microstructured materials* // One hundred years after the Cosserats. Series: Advances in mechanics and mathematics. – 2010. – Vol.21. – P.223-234.
19. Kakunai S., Masaki J., Kuroda R., Iwata K., Nagata R. *Measurement of apparent Young's modulus in the bending of cantilever beam by heterodyne holographic interferometry* // Exp. Mech. – 1985. – Vol.25. – N4. – P.408-412.
20. Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P., *Experiments and theory in strain gradient elasticity* // J. Mech. Phys. Solids. – 2003. – Vol.51. – P.1477-1508.
21. McFarland A.W., Colton J.S. *Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors* // J. Micromech. Microeng. – 2005. – Vol.15. – P.1060-1067.

22. Lurie S., Belov P., Tuchkova N. *The application of the multiscale models for description of the dispersed composites* // Composites Part A. Appl. Science and Manufacturing. – 2005. – Vol.36. – N2. – P.145-152.
23. Lurie S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodsky D.B., Tuchkova N.P *Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials* // J. Mat. Sci. – 2006. – Vol.41. – N20. – P.6693-6707.
24. Lurie S.A., Volkov.-Bogorodsky D.B., Zubov V.I., Tuchkova N.P. *Advanced theoretical and numerical multiscale modeling of cohesion/adhesion interactions in continuum mechanics and its applications for filled nanocomposites* // Int. J. Comp. Mater. Sci. – 2009. – Vol.45. – N3. – P.709-714.
25. Белов П.А., Лурье С.А. *Математическая теория дефектных сред. Градиентные теории упругости, Формулировки. Иерархия. Сравнительный анализ. Приложения*. – Palmarium Academic Publishing, 2014. – 345 с.
26. Лурье С.А., Соляев Ю.О., Тарасов С.С., Фам Т. *Сопоставление модели градиентной теории упругости и классической модели сред с переменными свойствами* // Электромагнитные волны и электронные системы. – 2012. – №3. – С.25-30.
27. Lomakin E.V. *Plastic flow of dilatant solids with stress-state-dependent material properties* / In: Topical problems in solid mechanics. – New Delhi: Elite Publishing House Pvt., Ltd. – 2009. – P.122-132.
28. Lomakin E.V., Fedulov B. N. *Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites* // Meccanica. – 2015. – Vol.50. – P.1527-1535.
29. Ломакин Е.В. *Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами* // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т.10. – №5. – С.41-52.

REFERENCES

1. Toupin R.A. *Elastic materials with couple stresses.* Arch. Rat. Mech. Anal, 1962, Vol.11, Pp.385-414.
2. Mindlin R.D. *Micro-structure in linear elasticity.* Arch. Rat. Mech. Anal, 1964, Vol.16, Pp.51-78.
3. Mindlin R.D. *Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity.* Int. J. Solids Struct., 1965, Vol.1, Pp.417-438.
4. Mindlin R.D., Eshel N.N. *On first strain-gradient theories in linear elasticity.* Int. J. Solids Struct., 1968, Vol.4, Pp.109-124.
5. Aifantis E.C. *Gradient effects at the macro, micro and nano scales.* J. Mech. Behav. Mater., 1994, Vol.5, No.3, Pp.355-375.
6. Altan B.S., Aifantis E.C. *On some aspects in the special theory of gradient elasticity.* J. Mech. Behav. Mater., 1997, Vol.8, No.3, Pp.231-282.
7. Maugin G.A., Alshits V.I., Kirchner H.O.K.: *Elasticity in multilayers. Properties of the propagation matrix and some applications.* Math. Mech. Solids., 2001, Vol.6, Pp.481-502.
8. Aifantis E.C. *On the microstructural origin of certain inelastic models.* Trans ASME. J. Engng. Mat. Tech., 1986, No.106, Pp.326-330.
9. Aifantis E.C. *The physics of plastic deformation.* Int. J. Plastisity, 1987, No.3, Pp.211-247.
10. Fleck N.A., Hutchinson J.W. *Strain gradient plasticity.* Advances in Applied Mechanics, 1997, Vol.33, Pp.295-361.

11. Aifantis E.C., *On the role of gradient in the localization of deformation and fracture.* Int. J. Engng. Sci., 1992, No.30, Pp.1279-1299.
12. Ru C.Q., Aifantis E.C. *A simple approach to solve boundary value problems in gradient elasticity.* Acta Mech., 1993, No.101, Pp.59-68.
13. Gao X.-L., Park S.K. *Variational formulation of a simplified strain gradient elasticity theory and its application to a pressurized thick-walled cylinder problem.* Int. J. Solids Struct., 2007, No.44, Pp.7486-7499.
14. Forest S., Aifantis E.C. *Some links between recent gradient thermo-elasto-plasticity theories and the thermodynamics of generalized continua.* Int. J. Solids Struct., 2010, No.47, Pp.3367-3376.
15. Askes H., Aifantis E.C. *Gradient elasticity in statics and dynamics an overview of formulations, length, scale identifications procedures, finite element implementation procedures and new results.* Int. J. Solids Struct., 2011, No.48, Pp.1962-1990.
16. Mindlin R.D. *Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity.* Int. J. Solids Struct., 1965, No.1, Pp.417-438.
17. Belov P.A., Lurie S.A. *A continuum model of microheterogeneous media.* J. of Applied Math. and Mech., 2009, Vol.73, No.5, Pp.599-608.
18. Lurie S.A., Belov P.A., Tuchkova N.P. *Gradient theory of media with conserved dislocations: application to microstruc-tured materials.* One hundred years after the Cosserats. Series: Advances in mechanics and mathematics, 2010, Vol.21, Pp.223-234.
19. Kakunai S., Masaki J., Kuroda R., Iwata K., Nagata R. *Measurement of apparent Young's modulus in the bending of cantilever beam by heterodyne holographic interferometry.* Exp. Mech., 1985, Vol.25, No.4, Pp.408-412.
20. Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P. *Experiments and theory in strain gradient elasticity.* J. Mech. Phys. Solids, 2003, Vol.51, Pp.1477-1508.
21. McFarland A.W., Colton J.S. *Role of material microstructure in plate stiffness with relevance to microcantilever sensors,* J. Micromech. Microeng., 2005, Vol.15, Pp.1060-1067.
22. Lurie S., Belov P., Tuchkova N. *The application of the multiscale models for description of the dispersed composites.* Composites Part A. Appl. Science and Manufacturing, 2005, Vol.36, No.2, Pp.145-152.
23. Lurie, S.A., Belov, P.A., Volkov-Bogorodsky, D.B., Tuchkova, N.P. *Interphase layer theory and application in the mechanics of composite materials.* J. Mat. Sci., 2006, Vol.41, No.20, Pp.6693-6707.
24. Lurie S.A., Volkov-Bogorodsky D.B., Zubov V.I., Tuchkova N.P. *Advanced theoretical and numerical multiscale modeling of cohesion/adhesion interactions in continuum mechanics and its applications for filled nanocomposites.* Int. J. Comp. Mater. Sci., 2009, Vol.45, No.3, Pp.709-714.
25. Belov P.A., Lurie S.A. *Matematicheskaya teoria defectnyh sred. Gradientnye teorii uprugosti. Formulirovki. Ierarhiya. Sravnitelnyi analiz. [Mathematical theory of damaged media. Gradient theory of elasticity. Formulations hierarchy comparative analysis]*. Palmarium Academic Publishing, Germany, 2014, 345 p.
26. Lurie S.A., Solyaev. Yu.O. Tarasov S.S., Pham T. *Sopostavlenie modeli gradientnoi uprugosti i classicheskoi modeli sred s peremennymi svoistvami [Comparison of gradient elasticity theory and the classical model of media with variable properties]*. Elektromagnitnye volny i elektronnye sistemy, Izd. Radiotechnika, 2012, Vol.3, Pp.25-30.

27. Lomakin E.V. *Plastic flow of dilatant solids with stress-state-dependent material properties.* In: Topical problems in solid mechanics. New Delhi: Elite Publishing House Pvt., Ltd., 2009, Pp.122-132.
28. Lomakin E.V., Fedulov B.N. *Nonlinear anisotropic elasticity for laminate composites*. Meccanica, 2015, Vol.50, Pp.1527-1535.
29. Lomakin E.V. *Mekhanika sred s zavisishimi ot vida napriagennogo sosnoiania svoistvemi [Mechanics media depending on the type of the stress state properties]*. Fyzikal Mezomekhanika, 2007, Vol.10, No.5, Pp.41-52.

Поступила в редакцию 11 февраля 2016 года.

Сведения об авторах:

Белов Петр Анатольевич – д.ф.-м.н., начальник НИО Научно-инновационного центра "Институт развития исследований, разработок и трансферта технологий", г. Москва, Россия; e-mail: belovpa@yandex.ru

Лурье Сергей Альбертович – д.т.н., проф., гл.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: salurie@mail.ru

Харченко Кирилл Дмитриевич – асп., Московский авиационный институт (Национальный исследовательский Университет), г. Москва, Россия; e-mail: Kirill19Obninsk@yandex.ru

Лыкосова Елена Дмитриевна – н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: elykosova@mail.ru