

ПРИМЕРЫ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ С РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ*

Меньшова И.В.¹, Ворокова М.Н.²

¹ФГБУН Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия

²ФГБОУ ВПО Чувашский государственный педагогический университет им.И.Я.Яковлева, г. Чебоксары, Россия

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена примерам точных решений, симметричных относительно продольной оси, краевых задач теории упругости в прямоугольнике $\{P: |x| \leq d, |y| \leq 1\}$, продольные стороны которого подкреплены ребрами жесткости, работающими только на растяжение-сжатие. Относительно вертикальной оси рассматриваются как четно-симметричная, так и нечетно-симметричная деформации. Решение ищется в виде рядов по функциям Фадля-Папковича. Базисные свойства систем функций Фадля-Папковича исследовались ранее в работе [1]. Для них были построены соотношения биортогональности и найдены биортогональные функции, с помощью которых определяются искомые коэффициенты разложений. Это делается также, как и в известных решениях Файлона-Рибьера в тригонометрических рядах. Окончательные выражения для коэффициентов разложений имеют вид интегралов Фурье от заданных граничных функций. Ряды для точных решений сходятся к раскладываемым функциям с той же скоростью, что и тригонометрические ряды для этих функций (равномерно равносходятся с ними). В то же время, приближенные решения в рядах по функциям Фадля-Папковича, как правило, сходятся плохо. Это обстоятельство не раз отмечалось в периодической литературе.

Рассмотрены примеры, когда на торцах прямоугольника приложены нормальная и касательная нагрузки, в том числе сосредоточенные силы, действующие на концах ребер. Приведены численные результаты, иллюстрирующие влияние жесткости ребра на распределение напряжений и перемещений в прямоугольнике. Полученные формулы, описывающие напряженно-деформированное состояние прямоугольника, просты, удобны в инженерных приложениях.

Приближенным решениям рассматриваемой задачи всегда уделялось первостепенное значение. Обширный обзор расчетных схем, методов решений, используемых при этом допущений можно найти в книгах [2-6].

Ключевые слова: краевая задача; прямоугольник; ребра жесткости; точное решение; функции Фадля-Папковича

* Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта №15-41-02-644 р_поволжье_a.

A RECTANGLE WITH LONGITUDINAL RIBS, WORKING IN TENSION-COMPRESSION. EXAMPLES OF EXACT SOLUTIONS OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Menshova I.V.¹, Vorokova M.N.²

¹*Institute of Earthquake Prediction Theory and Mathematical Geophysics, Russian
Academy of Sciences, Moscow, Russia*

²*I.Yakovlev Chuvash state pedagogical University, Cheboksary, Russia*

ABSTRACT

The article is devoted to examples of exact solutions of boundary value problems of the elasticity theory in a rectangle $\{\Pi: |x| \leq d, |y| \leq 1\}$ (symmetric deformation relative to the longitudinal axis). The longitudinal sides of a rectangle have strengthening ribs, which have stiffness in tension only. Relative to a vertical axis the even-symmetric and odd-symmetric deformations were studied. The solution sought in the form of a series on Fadde-Papkovich functions. The basic properties of systems of Fadde-Papkovich functions were studied in [1] earlier. For them were constructed the biorthogonality relation and was found the biorthogonal functions. Using the biorthogonal functions are not difficult to determine the required expansions coefficients. This is done in the same way as in the known solutions to Filon-Ribiere in the trigonometric series. Final expressions for the coefficients of expansions have the form of Fourier integrals from the boundary functions. A series of exact solutions converge to boundary functions as the trigonometric series for these functions (uniformly converge with them). At the same time, approximate solutions in series on the Fadde-Papkovich functions, poor converge to boundary functions usually. It was repeatedly noticed in periodical literature.

Normal and tangential loads actions at the end faces of rectangle, including concentrated forces acting at the ends of the ribs. Numerical results, illustrating the effect of rib's stiffness on the distribution of stresses and displacements in the rectangle, are given.

Always it is paid a special attention to an approximate solution of the problem under consideration. An extensive overview of numerical schemes, methods and assumptions can be found in the books [2-6].

Keywords: boundary value problem; rectangle; stiffening ribs, tension; Fadde-Papkovich functions.

1. ФОРМУЛИРОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Рассмотрим прямоугольник $\{\Pi: |x| \leq d, |y| \leq 1\}$, продольные стороны которого усилены ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие, считая, что деформация прямоугольника четно-симметрична относительно горизонтальной оси x .

Граничные условия на сторонах $y = \pm 1$ складываются из известного условия контакта ребра и пластины [7], к которому добавим условие отсутствия внешних нормальных напряжений

$$D \frac{d^2 U(x, \pm 1)}{dx^2} - \tau_{xy}(x, \pm 1) = 0, \quad \sigma_y(x, \pm 1) = 0. \quad (1.1)$$

На поперечных сторонах (торцах) прямоугольника $x = \pm d$ могут быть заданы нормальные и касательные напряжения

$$\sigma_x(\pm d, y) = \sigma(y), \tau_{xy}(\pm d, y) = \tau(y). \quad (1.2)$$

По симметрии задачи функции $\sigma(y)$ – четна, а $\tau(y)$ – нечетна. Кроме того, к концам ребер жесткости могут быть приложены растягивающие (сжимающие) силы. В формуле (1.1) $D = E_1 f / Gt$, где E_1 – модуль упругости ребра, f – площадь его поперечного сечения, G – модуль сдвига пластины, t – толщина пластины; $U(x, y) = Gu(x, y)$ – умноженное на G продольное перемещение в пластине. Коэффициент Пуассона ν одинаков для ребра и пластины.

Пользуясь соотношениями метода начальных функций [7], уравнения (1.1) можно записать так

$$\begin{cases} (D\alpha^2 L_{UU}(\alpha, 1) - L_{XU}(\alpha, 1))U_0(x) + \\ \quad + (D\alpha^2 L_{UY}(\alpha, 1) - L_{XY}(\alpha, 1))Y_0(x) = 0; \\ L_{YU}(\alpha, 1)U_0(x) + L_{YY}(\alpha, 1)Y_0(x) = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $L_{vU}(\alpha, 1)$, $L_{vY}(\alpha, 1)$ и т.д. – операторы метода начальных функций, определенные при $y = 1$, $U_0(x) = Gu(x, 0)$, $Y_0(x) = \sigma_y(x, 0)$ – начальные функции, $\alpha = d / dx$ – оператор дифференцирования. Выражения для операторов можно найти в книге [7].

Введем разрешающую функцию $\Phi(x)$ по формулам

$$U_0(x) = L_{YY}(\alpha, 1)\Phi(x), Y_0(x) = -L_{YU}(\alpha, 1)\Phi(x). \quad (1.4)$$

При этом второе уравнение (1.3) будет тождественно удовлетворено, а первое примет вид

$$L(\alpha)\Phi(x) = \alpha^2 \left[D \cos^2 \alpha + (1 + \nu) \left(1 + \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha} \right) \right] \Phi(x) = 0. \quad (1.5)$$

Разыскивая его решение в виде $\Phi(x) = \text{ch } \lambda x$, получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$L(\lambda) = \lambda^2 \left[D \cos^2 \lambda + (1 + \nu) \left(1 + \frac{\sin 2\lambda}{2\lambda} \right) \right] = 0, \quad (1.6)$$

которое имеет два нулевых корня и бесконечное множество комплексных корней $\{\pm \lambda_k, \pm \bar{\lambda}_k\}_{k=1}^{\infty} = \Lambda$. Тогда функцию $\Phi(x)$ можно представить в виде ряда

$$\Phi(x) = C_0 + C_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \text{ch } \lambda_k x + \bar{a}_k \text{ch } \bar{\lambda}_k x), \quad (1.7)$$

где C_0, C_1, a_k, \bar{a}_k ($k \geq 1$) – искомые коэффициенты разложений.

Подставляя (1.7) в формулы (1.4), найдем начальные функции, а затем, в соответствии с зависимостями метода начальных функций [7]

$$\begin{aligned} U(x, y) &= L_{vU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{vY}(\alpha, y)Y_0(x), \\ V(x, y) &= L_{vU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{vY}(\alpha, y)Y_0(x), \\ \sigma_x(x, y) &= A_U(\alpha, y)U_0(x) + A_Y(\alpha, y)Y_0(x), \\ Y(x, y) &= L_{YU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{YY}(\alpha, y)Y_0(x), \\ X(x, y) &= L_{XU}(\alpha, y)U_0(x) + L_{XY}(\alpha, y)Y_0(x), \end{aligned} \quad (1.8)$$

все перемещения и напряжения

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= C_0 + C_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) \operatorname{sh} \lambda_k x + \bar{a}_k \xi(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k x, \\
V(x, y) &= -\nu C_1 y + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) \operatorname{ch} \lambda_k x + \bar{a}_k \chi(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k x, \\
\sigma_x(x, y) &= 2(1 + \nu) C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) \operatorname{ch} \lambda_k x + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k x, \\
\sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) \operatorname{ch} \lambda_k x + \bar{a}_k s_y(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k x, \\
\tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) \operatorname{sh} \lambda_k x + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k x.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

В формулах (1.8) введены следующие обозначения: $V(x, y) = Gv(x, y)$, где $v(x, y)$ – перемещение по y (поперечное), $Y(x, y) = \sigma_y(x, y)$, $X(x, y) = \tau_{xy}(x, y)$.

Входящие сюда функции Фадля-Папковича $\xi(\lambda_k, y)$, $\chi(\lambda_k, y)$ и т.д. получаются из порождающих [8] функций

$$\begin{aligned}
\xi(\lambda, y) &= \frac{1}{2} \left[(2 \cos \lambda + (\nu + 1) \lambda \sin \lambda) \cos \lambda y - (\nu + 1) \lambda y \cos \lambda \sin \lambda y \right], \\
\chi(\lambda, y) &= -\frac{1}{2} \left[((\nu - 1) \cos \lambda + (\nu + 1) \lambda \sin \lambda) \sin \lambda y + (\nu + 1) \lambda y \cos \lambda \cos \lambda y \right], \\
s_x(\lambda, y) &= (\nu + 1) \lambda \left[(2 \cos \lambda + \lambda \sin \lambda) \cos \lambda y - \lambda y \cos \lambda \sin \lambda y \right], \\
s_y(\lambda, y) &= -(\nu + 1) \lambda^2 (\sin \lambda \cos \lambda y - y \cos \lambda \sin \lambda y), \\
t_{xy}(\lambda, y) &= -(\nu + 1) \lambda (\lambda y \cos \lambda \cos \lambda y + (\cos \lambda + \lambda \sin \lambda) \sin \lambda y)
\end{aligned} \tag{1.10}$$

заменой параметра λ на λ_k .

2. ЧЕТНО-СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ

Рассмотрим четно-симметричную деформацию прямоугольника относительно его вертикальной оси. Будем считать, что элементарное решение, отвечающее постоянной C_1 известно и примем вначале $C_0 = C_1 = 0$. Удовлетворяя граничным условиям на торцах прямоугольника (1.2), приходим к задаче определения неизвестных коэффициентов из разложений

$$\begin{cases} \sigma(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) \operatorname{ch} \lambda_k d + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d; \\ \tau(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) \operatorname{sh} \lambda_k d + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d. \end{cases} \tag{1.11}$$

Окончательные формулы для перемещений и напряжений в прямоугольнике в случае четно-симметричной деформации относительно центральных осей, независимо от вида однородных граничных условий на его продольных сторонах, были даны в работах [9, 10]. Приведем их.

1) На торцах прямоугольника $x = \pm d$ заданы только нормальные напряжения $\sigma_x(\pm d, y) = \sigma(y)$, а касательные $\tau_{xy}(\pm d, y) = 0$

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= C_0 + C_1 x - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\
V(x, y) &= -\nu y C_1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\
\sigma_x(x, y) &= 2(1 + \nu) C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\
(1.12) \quad \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{M_k \lambda_k^2} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \bar{\lambda}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\};
\end{aligned}$$

2) на торцах прямоугольника $x = \pm d$ заданы только касательные напряжения $\tau_{xy}(\pm d, y) = \tau(y)$, а нормальные $\sigma_x(\pm d, y) = 0$

$$\begin{aligned}
U(x, y) &= C_0 + C_1 x - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\
V(x, y) &= -\nu y C_1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(\operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\
\sigma_x(x, y) &= 2(1 + \nu) C_1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(\operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\
(1.13) \quad \sigma_y(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2 \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}, \\
\tau_{xy}(x, y) &= - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k d)} \right\}.
\end{aligned}$$

Здесь $M_k = L'(\lambda_k) / 2\lambda_k^2$, где $L'(\lambda)$ – производная функции $L(\lambda)$. Числа σ_k, τ_k – коэффициенты Лагранжа [11] соответствующих раскладываемых функций, определяются по формулам

$$\sigma_k = \int_{-1}^1 \sigma(y) x_k(y) dy, \quad \tau_k = \int_{-1}^1 \tau(y) t_k(y) dy,$$

(1.14)

в которых функции

$$x_k(y) = \frac{1}{2\lambda_k^2} \left(\frac{\cos \lambda_k y}{\cos \lambda_k} - 1 \right), \quad t_k(y) = -\frac{\sin \lambda_k y}{2\lambda_k \cos \lambda_k}.$$

(1.15)

Они были получены в статье [1].

Составляя уравнение равновесия элемента ребра, легко получить формулу для силы в ребре

$$P(x) = t \int_{-d}^x \tau_{xy}(s, 1) ds + C.$$

(1.16)

Постоянная C в этой формуле находится из условий на концах ребер жесткости. Если, например, силы на концах ребер отсутствуют, т.е. $P(d) = 0$, то, в силу самоуравновешенности касательных напряжений

$$\int_{-d}^d \tau_{xy}(s, 1) ds = 0.$$

И, значит, $C = P(d) = 0$. Подставляя в (2.6) выражения для касательных напряжений (2.2) и (2.3), получим формулы для силы в ребре: при заданных на торцах прямоугольника нормальных напряжениях

$$P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, 1)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}\{\overline{\lambda_k} \operatorname{sh} \overline{\lambda_k} d (\operatorname{ch} \lambda_k x - \operatorname{ch} \lambda_k d)\}}{\operatorname{Im}\{\overline{\lambda_k} \operatorname{sh} \overline{\lambda_k} d \operatorname{ch} \lambda_k d\}} \right\} + C$$

(1.17)

и при заданных на торцах прямоугольника касательных нагрузках

$$P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, 1)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}\{\operatorname{ch} \overline{\lambda_k} d (\operatorname{ch} \lambda_k x - \operatorname{ch} \lambda_k d)\}}{\operatorname{Im}\{\overline{\lambda_k} \operatorname{sh} \overline{\lambda_k} d \operatorname{ch} \lambda_k d\}} \right\} + C.$$

(1.18)

Рассмотрим примеры, считая, что $t = 1$.

Пример 1. К торцам прямоугольника приложены самоуравновешенные нормальные напряжения

$$\sigma(y) = 5y^4 - 6y^2 + 1,$$

а силы к ребрам не приложены. По формулам (2.4), (2.5) найдем

$$\sigma_k = \frac{120(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k) - 8\lambda_k^2 (6 \sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k)}{\lambda_k^7 \cos \lambda_k}.$$

Подставляя это выражение в формулы (2.2) и (2.7) ($C = 0$), получим решение задачи.

Пример 2. К торцам прямоугольника приложены постоянные напряжения

$$\sigma(y) = -1,$$

(1.19)

а к концам ребер жесткости – уравновешивающие эти напряжения сосредоточенные силы $P(d) = 1$. В этом случае в формулах (2.2) и (2.7) надо считать $C = P(d) = 1$, а

$$\sigma_k = -\frac{1}{\lambda_k^2} \left(\frac{\sin \lambda_k}{\lambda_k \cos \lambda_k} - 1 \right). \quad (1.20)$$

Добавим к полученному решению элементарное решение, снимающее нормальные напряжения (2.9) на торцах, приняв в формулах (2.2) $C_1 = 1/2(1 + \nu)$. В результате получим решение для прямоугольника, у которого к концам ребер жесткости приложены одинаковые растягивающие силы, равные 1.

Влияние соотношения длин сторон прямоугольника и жесткости ребра на распределение напряжений в прямоугольнике проиллюстрировано на рис.3-7 при $d = 1$ и $d = 3$. Сплошные кривые соответствуют $D = 4$, пунктирные

– $D = 160$. На рис.8-9 показано, как от этих параметров зависит распределение силы в ребре.

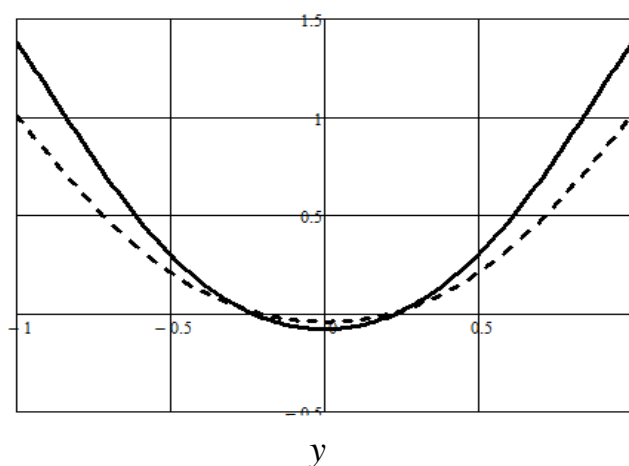


Рис.3. Распределение нормальных напряжений $\sigma_x(0, y)$ вдоль вертикальной оси прямоугольника при $D = 4$ (сплошная кривая) и $D = 160$ (пунктир) ($d = 1$).

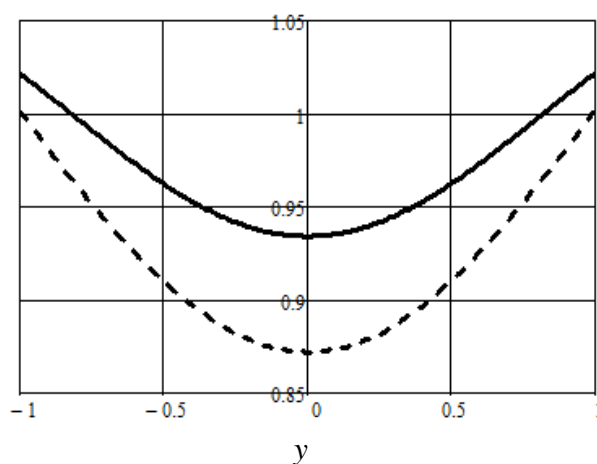


Рис.4. Распределение нормальных напряжений $\sigma_x(0, y)$ вдоль вертикальной оси прямоугольника при $D = 4$ (сплошная кривая) и $D = 160$ (пунктир) ($d = 3$).

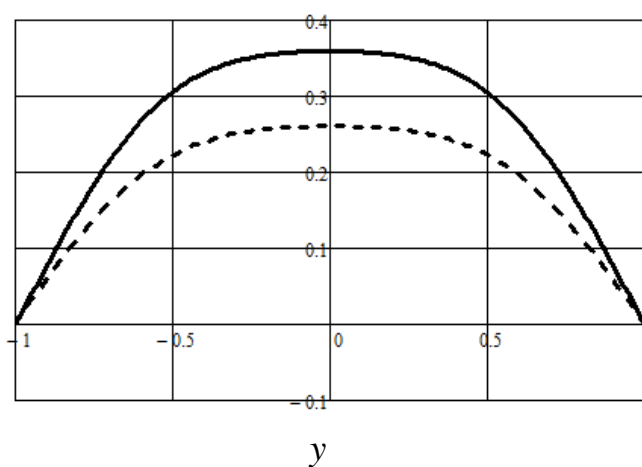


Рис.5. Распределение нормальных напряжений $\sigma_y(0, y)$ вдоль вертикальной оси прямоугольника при $D = 4$ (сплошная кривая) и $D = 160$ (пунктир) ($d = 1$).

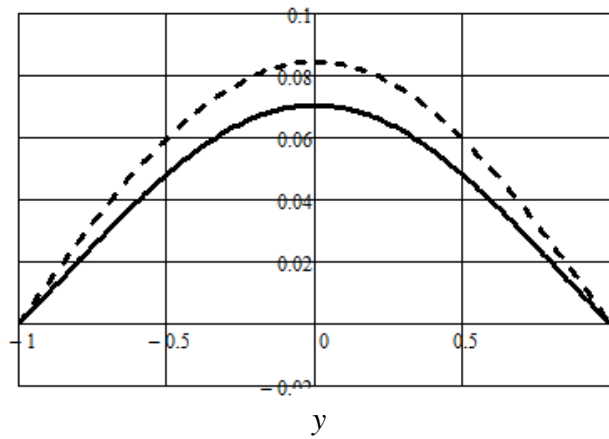


Рис.6. Распределение нормальных напряжений $\sigma_y(0, y)$ вдоль вертикальной оси прямоугольника при $D = 4$ (сплошная кривая) и $D = 160$ (пунктир) ($d = 3$).

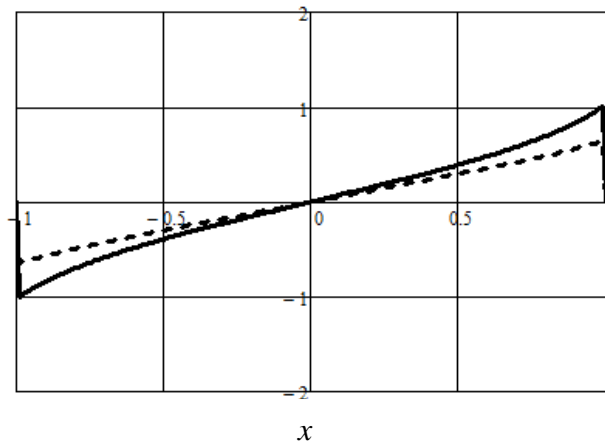


Рис.7. Распределение касательных напряжений $\tau_{xy}(x, 1)$ вдоль ребра прямоугольника при $D = 4$ (сплошная кривая) и $D = 160$ (пунктир) ($d = 1$).

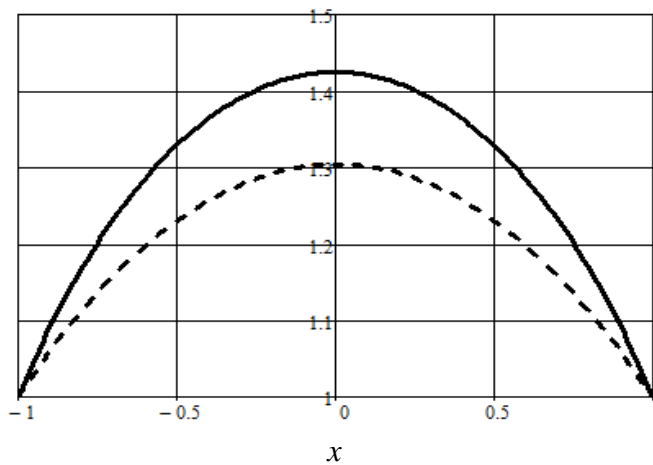


Рис.8. Распределение силы в ребре при $D = 4$ (сплошная кривая) и $D = 160$ (пунктир) ($d = 1$).

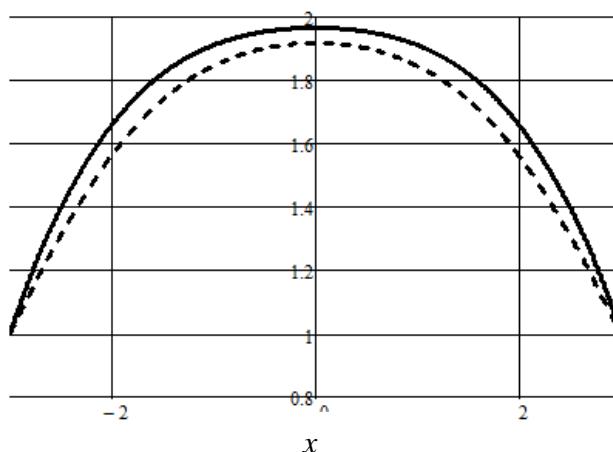


Рис.9. Распределение силы в ребре при $D = 4$ (сплошная кривая) и $D = 160$ (пунктир) ($d = 3$).

Пример 3. Пусть на торцах прямоугольника задана только касательная нагрузка, обращающаяся в нуль на концах отрезка $[-1, 1]$,

$$\tau(y) = y(y^2 - 1).$$

Воспользовавшись формулами (2.4), найдем

$$\tau_k = - \frac{2(\lambda_k^2 \sin \lambda_k - 3(\sin \lambda_k - \lambda_k \cos \lambda_k))}{\lambda_k^5 \cos \lambda_k}. \tag{1.21}$$

На рис.10 показано, как в этом случае изменяется сила в ребре в зависимости от его жесткости ($d = 3$).

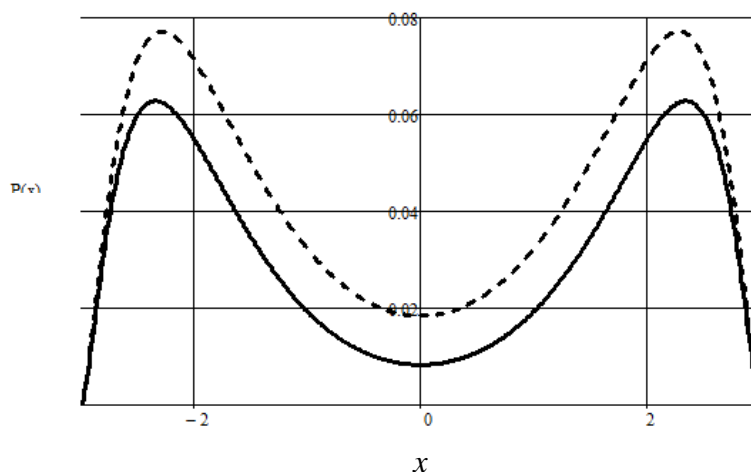


Рис.10. Распределение силы в ребре при жесткости ребра $D = 4$ (сплошная кривая) и $D = 160$ (пунктир) ($d = 3$).

2. НЕЧЕТНО-СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПРЯМОУГОЛЬНИКА ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕРТИКАЛЬНОЙ ОСИ

Рассмотрим нечетно-симметричную деформацию прямоугольника относительно вертикальной оси y .

Решение дифференциального уравнения (1.5) ищем в виде

$$\Phi(x) = C_0 + C_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \operatorname{sh} \lambda_k x + \bar{a}_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k x).$$

Тогда решение краевой задачи в виде разложений по функциям Фадля-Папковича примет вид

$$\begin{aligned} U(x, y) &= C_0 + C_1 x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi(\lambda_k, y) \operatorname{ch} \lambda_k x + \bar{a}_k \xi(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k x, \\ V(x, y) &= -\nu y C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \chi(\lambda_k, y) \operatorname{sh} \lambda_k x + \bar{a}_k \chi(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k x, \\ \sigma_x(x, y) &= 2(1 + \nu) C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) \operatorname{sh} \lambda_k x + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k x, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_y(\lambda_k, y) \operatorname{sh} \lambda_k x + \bar{a}_k s_y(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k x, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) \operatorname{ch} \lambda_k x + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k x. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Удовлетворяя граничным условиям на торцах прямоугольника, приходим к следующей системе

$$\begin{cases} \sigma(y) = 2(1 + \nu) C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k s_x(\lambda_k, y) \operatorname{sh} \lambda_k d + \bar{a}_k s_x(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \\ \tau(y) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k t_{xy}(\lambda_k, y) \operatorname{ch} \lambda_k d + \bar{a}_k t_{xy}(\bar{\lambda}_k, y) \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \end{cases} \quad (2.2)$$

где $\sigma(y)$ – четна, а $\tau(y)$ – нечетна. Окончательное решение рассматриваемой краевой задачи таково:

1) на торцах прямоугольника $x = \pm d$ заданы нормальные самоуравновешенные напряжения $\sigma_x(\pm d, y) = \sigma(y)$, а касательные $\tau_{xy}(\pm d, y) = 0$

$$\begin{aligned} U(x, y) &= C_0 + C_1 x - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{\xi(\lambda_k, y) \operatorname{Im}(\lambda_k \bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\lambda_k M_k \operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}, \\ V(x, y) &= -\nu y C_1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{\chi(\lambda_k, y) \operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{M_k \operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}, \\ \sigma_x(x, y) &= 2(1 + \nu) C_1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{s_x(\lambda_k, y) \operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{M_k \operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}, \\ \sigma_y(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{s_y(\lambda_k, y) \operatorname{Im}(\lambda_k^2 \bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{M_k \lambda_k^2 \operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}, \\ \tau_{xy}(x, y) &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y) \operatorname{Im}(\lambda_k \bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\lambda_k M_k \operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}; \end{aligned} \quad (2.3)$$

2) на торцах прямоугольника $x = \pm d$ заданы касательные напряжения $\tau_{xy}(\pm d, y) = \tau(y)$, а нормальные $\sigma_x(\pm d, y) = 0$:

$$U(x, y) = C_0 + C_1 x - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{\xi(\lambda_k, y) \operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\lambda_k M_k \operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\},$$

$$\begin{aligned}
 V(x, y) &= -\nu y C_1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{\chi(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(\operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}, \\
 \sigma_x(x, y) &= 2(1 + \nu) C_1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{s_x(\lambda_k, y)}{M_k} \frac{\operatorname{Im}(\operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}, \quad (2.4) \\
 \sigma_y(x, y) &= -\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{s_y(\lambda_k, y)}{\lambda_k^2 M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k^2 \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}, \\
 \tau_{xy}(x, y) &= -\sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, y)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}(\lambda_k \operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d \operatorname{ch} \lambda_k x)}{\operatorname{Im}(\bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d)} \right\}
 \end{aligned}$$

Как и в четно-симметричной относительно вертикальной оси задаче, числа σ_k и τ_k вычисляются по формулам (2.4).

Формулы для силы в ребре при заданных на торцах прямоугольника нормальных напряжениях имеют вид

$$P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \sigma_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, 1)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}\{\bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d (\operatorname{sh} \lambda_k x - \operatorname{sh} \lambda_k d)\}}{\operatorname{Im}\{\bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d\}} \right\} + C, \quad (2.5)$$

а при заданных на торцах прямоугольника касательных нагрузках

$$P(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re} \left\{ \tau_k \frac{t_{xy}(\lambda_k, 1)}{\lambda_k M_k} \frac{\operatorname{Im}\{\operatorname{sh} \bar{\lambda}_k d (\operatorname{sh} \lambda_k x - \operatorname{sh} \lambda_k d)\}}{\operatorname{Im}\{\bar{\lambda}_k \operatorname{ch} \bar{\lambda}_k d \operatorname{sh} \lambda_k d\}} \right\} + C. \quad (2.6)$$

Пример 4. Пусть к правому торцу прямоугольника приложены постоянные напряжения $\sigma(y) = -1$, а к концам ребер жесткости – сосредоточенные силы $P(d) = 1$. К его левому торцу приложены те же нагрузки, взятые с обратным знаком. Числа σ_k такие же, что и в задаче 2 (2.10).

На рис.11,12 при $d = 1$ показано распределение касательных напряжений и продольных перемещений в сечении $x = 0$. Как и выше, сплошные кривые соответствуют $D = 4$, пунктирные – $D = 160$.

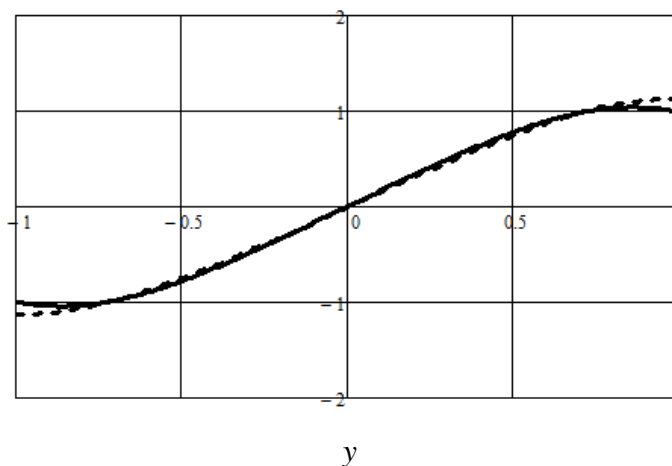


Рис.11. Распределение касательных напряжений $\tau_{xy}(0, y)$ вдоль вертикальной оси прямоугольника при $D = 4$ (сплошная кривая) и $D = 160$ (пунктир) ($d = 1$).

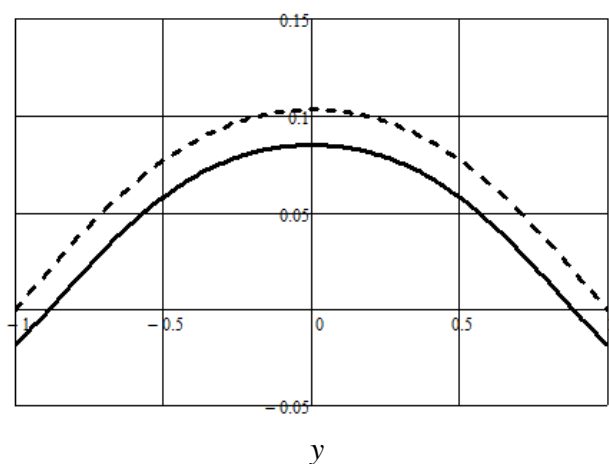


Рис.12. Распределение продольных перемещений $U(0, y)$ вдоль вертикальной оси прямоугольника при $D = 4$ (сплошная кривая) и $D = 160$ (пунктир) ($d = 1$).

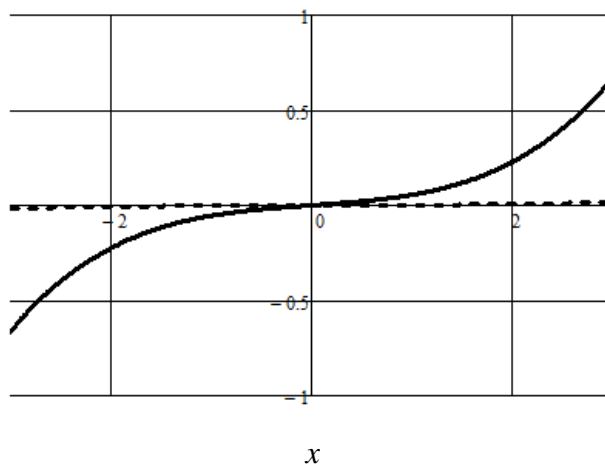


Рис.13. Распределение нормальных напряжений $\sigma_x(x, 1)$ вдоль ребра прямоугольника при $D = 4$ (сплошная кривая) и $D = 160$ (пунктир) ($d = 3$).

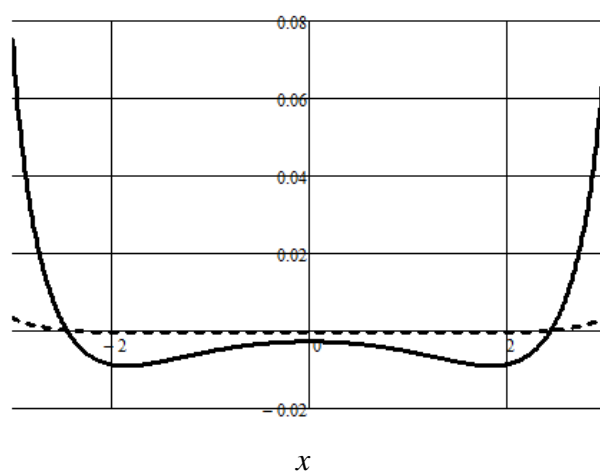


Рис.14. Распределение перемещений $U(x, 1)$ в ребре при $D = 4$ (сплошная кривая) и $D = 160$ (пунктир) ($d = 3$).

На рис.13-14 приведены кривые распределения нормальных напряжений и продольных перемещений в месте стыка ребра и пластины $y=1$ при $d=3$. Графики изменения продольных перемещений в сечении $x=0$, когда $d=3$ показаны на рис.15. На рис.16 показано изменение силы в ребре при $d=3$.

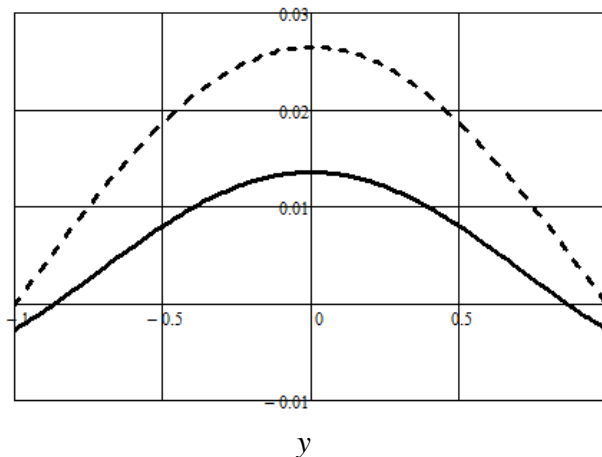


Рис.15. Распределение продольных перемещений $U(0, y)$ вдоль вертикальной оси прямоугольника при $D=4$ (сплошная кривая) и $D=160$ (пунктир) ($d=3$).

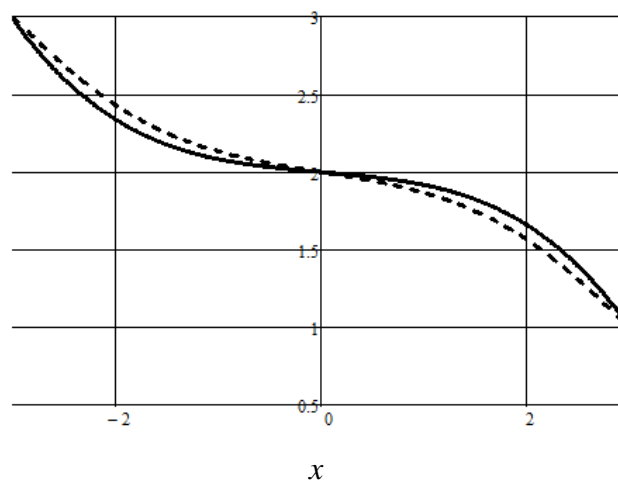


Рис.16. Распределение силы в ребре при $D=4$ (сплошная кривая) и $D=160$ (пунктир) ($d=3$).

Пример 5. Пусть на торцах прямоугольника задана касательная нагрузка

$$\tau(y) = y(y^2 - 1).$$

Графики распределения силы в ребре при $D=4$ (сплошная кривая) и $D=160$ (пунктир) представлены на рис.17.

Пример 6. Рассмотрим тот случай, когда касательная нагрузка $\tau(y) = y(y^2 - 1)$ приложена только к правому торцу прямоугольника, а левый – не нагружен. Решение этой задачи получается по принципу суперпозиции, как полусумма решений (2.3) и (3.4) с коэффициентами (2.11). Ниже приведены кривые изменения силы в ребре для $D=4$ (сплошная кривая) и $D=160$ (пунктир), когда $d=3$.

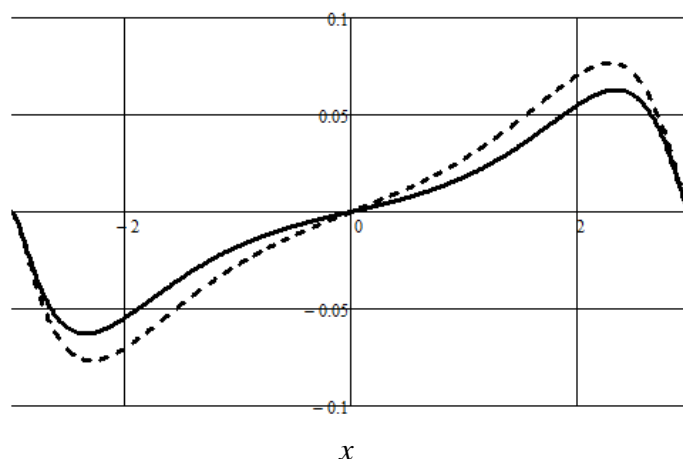


Рис.17. Распределение силы в ребре при $D = 4$ (сплошная кривая) и $D = 160$ (пунктир) ($d=3$).

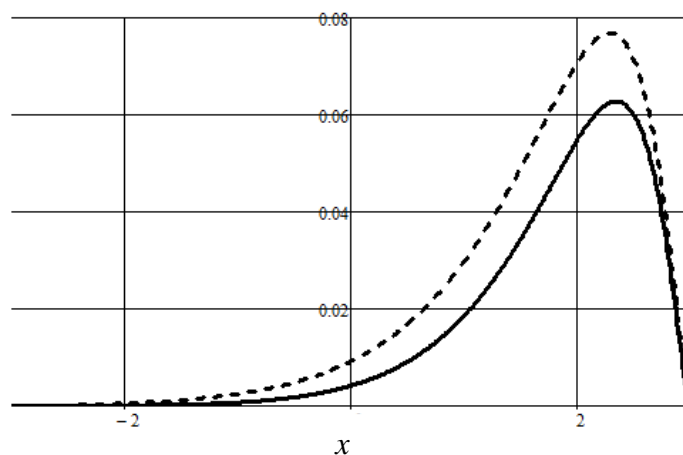


Рис.18. Распределение силы в ребре при $D = 4$ (сплошная кривая) и $D = 160$ (пунктир) ($d=3$).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получены простые, удобные в инженерных приложениях формулы, описывающие напряженно-деформированное состояние прямоугольника, две противоположные стороны которого подкреплены ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие. На поперечных сторонах прямоугольника приложены нормальные и касательные напряжения, в том числе, сосредоточенные силы, действующие вдоль ребер. Рассмотрена только четносимметричная деформация относительно продольной оси x . Относительно оси y рассмотрены случаи, как четносимметричной, так и нечетносимметричной деформаций. Собственные числа краевой задачи, зависящие от соотношения жесткостей ребра и пластины, определялись в MAPLE.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лапикова Е.С., Юринкина М.Н., Кержаев А.П., Никитин А.В. *Полуполоса с продольными ребрами жесткости, работающими на растяжение-сжатие.*

- Разложения Лагранжа // Вестник Чувашского государственного педагогического университета им.И.Я. Яковлева. Серия: Механика предельного состояния. – 2013. – №4 (18). – С.80-97.*
2. Григолюк Э.И, Толкачев В.М. *Контактные задачи теории пластин и оболочек.* – М.: Машиностроение, 1980. – 416 с.
 3. Попов Г.Я. *Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений.* – М.: Наука, 1982. – 344 с.
 4. Александров В.М., Мхитарян С.М. *Контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками.* – М.: Наука, 1983. – 487 с.
 5. Александров В.М., Коваленко Е.В. *Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями.* – М.: Наука, 1986. – 334 с.
 6. *Развитие теории контактных задач в СССР.* – М.: Наука, 1976. – 493 с.
 7. Власов В.В. *Метод начальных функций в задачах теории упругости и строительной механики.* – М.: Стройиздат, 1975. – 224 с.
 8. Ибрагимов И.И. *Методы интерполяции функций и некоторые их применения.* – М.: Наука, 1971. – 518 с.
 9. Коваленко М.Д., Меньшова И.В., Шуляковская Т.Д. *Разложения по функциям Фадля-Папковича. Примеры решений в полуполосе // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2013. – №5. – С.136-158.*
 10. Коваленко М.Д., Меньшова И.В. *Аналитические решения двумерных краевых задач теории упругости в конечных областях с угловыми точками границы.* – Чебоксары : изд-во Чуваш. гос. пед. ун-та, 2014. – 123 с.
 11. Коваленко М.Д. *Разложения Лагранжа и нетривиальные представления нуля по однородным решениям // Доклады Академии наук. – 1997. – Т.352. – №4. – С.480-482.*

REFERENCES

1. Lapikova E.S., Yurinkina M.N., Kerzhaev A.P., Nikitin A.V. *Polupolosa s prodol'nymi rebrami zhestkosti, rabotaiushchimi na rastiazhenie-szhatie. Razlozheniia Lagranzha [The semistrip with longitudinal stiffening ribs. The Lagrange expansions]. Vestnik I. Yakovlev Chuvash State Pedagogical University. Series : Mechanics of a limit state, 2013, No.18, Pp.86-103.*
2. Grigoluk E.I., Tolkachev V.M. *Kontaktnie zadachi teorii plastin i obolochek [Contact problems of the theory of plates and shells]. – Moskva: Mashinostroenie, 1980, 416 p.*
3. Popov G.P. *Koncentraciya uprugih napryagenii vozle shtampov, razrezov, tonkih vkluchenii i podkreplenii [Concentration of elastic stresses near stamps, cuts, thin inclusions and reinforcements]. Moskva: Nauka, 1982, 344 p.*
4. Alexandrov V.M., Mkhitaryan S.M. *Kontaktne zadachi dly tel s tonkimi pokritiyami I prosloikami [Contact problems for bodies with thin coatings and interlayers]. Moskva: Nauka, 1983, 487 p.*
5. Aleksandrov V.M., Kovalenko E.V. *Zadachi mehaniki sploshnih sred so smeshannimi granichnimi usloviyami [Problems of continuum mechanics with mixed boundary conditions]. Moskva: Nauka, 1986, 334 p.*
6. *Pazvitie teorii kontaktnih zadach v SSSR [Development of theory of contact problems in the USSR]. Moskva: Nauka, 1976, 493 p.*

7. Vlasov V.V. *Metod nachalnih funktsii v zadachah teorii uprugosti I stroitelnoi mehaniki* [Method of initial functions in theory tasks elasticity and construction mechanics]. Moskva: Stroyizdat, 1975, 224 p.
8. Ibragimov I.I. *Metody interpoliatsii funktsii i nekotorye ikh primeneniia* [Methods of interpolation functions and some of their applications]. – Moskva: Nauka, 1971, 518 p.
9. Kovalenko M.D., I.V. Menshova, T.D. Shulyakovskaya. *Expansions in Fadde-Papkovich functions: Examples of solutions in a half-strip*. News of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of a solid body, 2013, No.5, Pp.136-158.
10. Kovalenko M.D., Menshova I.V. *Analiticheskie resheniia dvumernykh kraevykh zadach teorii uprugosti v konechnykh oblastiakh s uglovymi tochkami granitsy: monografiia* [Analytical solution of two-dimensional boundary value problems of elasticity theory in finite domains with corner points of the border: a monograph]. Cheboksary: izd-vo Chuvash. gos. ped. un-ta, 2014, 123 p.
11. Kovalenko M.D. *The Lagrange expansions and nontrivial representations in terms of homogeneous solutions*. Physics. Doklady, 1997, Vol.42, No.2, Pp.212-216.

Поступила в редакцию 7 июня 2016 года.

Сведения об авторах:

Меньшова Ирина Владимировна – к.ф.-м.н., с.н.с., Лаборатория геодинамики, ФГБУН Институт теории прогноза землетрясений и математической геофизики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: menshovairina@yandex.ru

Ворокова Мария Николаевна – асп., Кафедра математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВПО Чувашский государственный педагогический университет им.И.Я.Яковлева, г. Чебоксары, Россия; e-mail: maria.vorokova@gmail.com