

УДК 534.1

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ГИБКОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ СО СВЯЗЯМИ*

Данилин А.Н.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия
ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт, г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

В работе моделируется динамическое поведение движущейся конструкции, составленной из гибких стержневых элементов, которые соединяются через шарниры. Предполагается, что в шарнирах есть связи – жесткие и нежесткие, управляемые и неуправляемые. Математически они считаются дифференциальными в интегрируемой или неинтегрируемой формах.

Модель стержневой системы строится на основе метода конечных элементов, учитывая конечные деформации и нелинейности инерционных сил. Считается, что концы каждого стержневого элемента жестко соединены с твёрдыми телами, размеры которых малы по сравнению с длиной элемента. Каждый конечный элемент связывается с локальной системой координат, для которой перемещения, углы поворотов, поступательные и вращательные скорости учитываются строго. Функции формы выбираются в виде квазистатических аппроксимаций локальных перемещений и углов поворотов сечений стержневого элемента. В качестве обобщенных координат задачи принимаются абсолютные перемещения и углы поворотов краевых сечений конечных элементов модели.

Уравнения движения системы составляются на основе принципа Даламбера-Лагранжа. Считается, что на обобщенные координаты системы наложены связи, линейные относительно обобщенных скоростей. Вариация функционала задачи, для которого ищется стационарное значение, преобразуется путём прибавления уравнений связей, умноженных на неопределённые множителя Лагранжа. Вариационная задача для преобразованного функционала решается как свободная. Условия стационарности вместе с дифференциальными уравнениями связей определяют искомые значения обобщенных координат.

Рассматриваются варианты упрощения записи уравнений движения, основанные на использовании линейных функций формы и на методе сосредоточенных масс.

Ключевые слова: стержневая система; нелинейная динамика; конечные перемещения и повороты; гибкость; кинематические связи

FINITE ELEMENT MODELING OF PLANE MOTION OF THE FLEXIBLE ROD SYSTEM WITH CONSTRAINTS

Danilin A.N.

*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Moscow Aviation Institute, Moscow, Russia*

* Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-08-06259.

ABSTRACT

Dynamics of a structure composed of flexible rod elements connected via hinges is modeled. It is assumed that the hinges have constraints – rigid and non-rigid, controlled and uncontrolled. Mathematically, they are considered as differential ones in integrable or non-integrable forms.

Mathematical model is formulated on the finite element method, taking into account finite deformations and the nonlinearity of the inertial forces. The rod element ends are considered to be connected with rigid bodies whose dimensions are small relative to the element length. Each finite element is associated with a local coordinate system for which the displacements, angles of rotation, the translational and rotational speed are considered strictly. Shape functions are taken as quasi-static approximations of local displacement and rotation angles of element cross-sections. Absolute displacements and rotation angles of element boundary cross-sections are taken as generalized coordinates of the problem.

The dynamic equations are obtained using d'Alembert-Lagrange principle. It is considered that the generalized coordinates are subjected to the linear relations relative to the generalized velocities. Variation of the problem functional, for which we seek steady-state value, is transformed by the addition of the constraint equations, multiplied by the undefined Lagrange multipliers. A variational problem for the transformed functional is solved as a free. The stationarity conditions, together with the differential equations of constraints, determine the desired values of generalized coordinates.

Examples of deploying rod systems are considered. Nonlinear dynamic equations are integrated numerically using the integral curve length parameter as a problem argument. This transformation gives a system of resolving equations the best conditioning of the numerical solution process.

Keywords: rod system; nonlinear dynamics; finite displacements and rotations; flexibility; kinematic constraints

ВВЕДЕНИЕ

Проблемам математического моделирования нелинейной динамики составных стержневых систем посвящено большое число работ, и интерес к этой теме не ослабевает [1-16]. Рост числа публикаций и их тематическое разнообразие определяются, прежде всего, многочисленными практическими приложениями, сочетающими конструктивные особенности стержневых систем с условиями их применения.

Стержневые системы могут быть как жесткими, так и гибкими, значительно менять свою первоначальную конфигурацию в результате деформации или трансформирования с помощью исполнительных механизмов. В стержневых системах некоторые из элементов могут трактоваться как жесткие, упругие и неупругие связи, в том числе – односторонние, например, в виде троса или нити, сопротивляющиеся только растяжению [1,4,10].

Известно множество примеров использования стержневых систем в наземных условиях. Опыт показывает, что стержневые системы могут успешно применяться и в космических условиях [1,4-8,10,16]. В настоящее время представляют значительный научный интерес задачи о динамическом поведении космических конструкций, которые собираются или развёртываются в условиях орбитального движения с использованием стержневых элементов или секций. Примерами являются фермы большого удлинения, длинные штанги для точных физических измерений или гравитационной стабилизации, манипуляторы антропоморфного типа и пр. Условия невесомости позволяют создавать легкие

конструкции. Однако снижение погонных массовых характеристик приводит к увеличению гибкости, что необходимо учитывать в динамических моделях. Конструкции становятся чувствительными по отношению к внешним и внутренним возмущениям. Это ставит ряд проблем перед конструкторами и разработчиками систем управления. Трудности усугубляются возможностью изменения конфигурации, а также высокими требованиями к точности управления движением системы в целом и отдельными её элементами, или к точности сохранения формы (например, для телескопов или интерферометров).

Таким образом, динамическое деформирование стержневых конструкций может носить существенно нелинейный характер, сопровождаться большими перемещениями и углами поворотов, и конечными деформациями. Это ведет к проблеме создания адекватных математических моделей, опирающихся на нелинейные геометрические соотношения [5,11,12,16-18].

1. ФОРМУЛИРОВКА МОДЕЛИ. ОСНОВНЫЕ ДОПУЩЕНИЯ

В работе моделируется динамическое поведение движущейся конструкции, составленной из гибких стержневых элементов, которые соединяются через шарниры. Предполагается, что в шарнирах есть связи – жесткие и нежесткие, управляемые и неуправляемые. Математически они считаются дифференциальными в интегрируемой или неинтегрируемой формах.

Как известно, характерная особенность стержневых элементов – значительное превалирование одного габаритного размера над остальными. Это позволяет использовать в расчётах балочные модели, которые строятся на основе классической гипотезы плоских сечений или на её уточнённых вариантах [19].

Стержневые элементы могут иметь произвольную форму поперечного сечения, быть в виде тонкостенных или трубчатых стержней. Они могут быть изготовлены из композиционных материалов или иметь многослойную проволочную структуру подобно проводу воздушных линий электропередачи. В таких случаях деформации сдвига распределяются в поперечном сечении неравномерно, что приводит к его деформации. Гипотеза плоских сечений позволяет приближенно учесть деформацию сдвига на основе модели Тимошенко [19]. В этом случае сечения не остаются перпендикулярными выбранной осевой линии: оставаясь плоскими и недеформированными, они поворачиваются и сдвигаются друг относительно друга как абсолютно жесткие диски бесконечно малой толщины.

Рассмотрим произвольное сечение стержневого элемента. На рис.1 это сечение обозначено как S , штрихпунктирной линией изображена осевая линия. С сечением свяжем прямоугольную систему координат $O_c x_c y_c z_c$, совмещая начало координат O_c (полюс) с точкой сечения, принадлежащей осевой линии. Ось $O_c x_c$ направим перпендикулярно сечению. Обозначим, далее, через r_c радиус-вектор произвольной точки сечения P относительно полюса O_c .

Введем систему координат $\tilde{O}xyz$, движущуюся относительно некоторой неподвижной (инерциальной) координатной системы $OXYZ$. Через \tilde{r} и r обозначим радиус-векторы полюса O_c в системах $\tilde{O}xyz$ и $OXYZ$ соответственно. Пространственное положение подвижного полюса \tilde{O} в системе $OXYZ$ будем

определять радиус-вектором r_o . В этой же системе положение точки P будем определять радиус-вектором R .

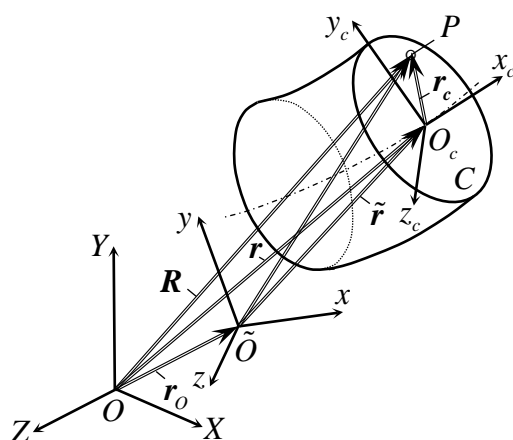


Рис.1. Взаимная ориентация координатных систем.

Очевидно, что

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_c, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_o + \tilde{\mathbf{r}}. \quad (1)$$

Модель стержневой системы будем строить на основе метода конечных элементов [5,17,18,20], учитывая конечные деформации и нелинейности инерционных сил.

Каждый конечный элемент связывается с местной системой координат $\tilde{O}xyz$, которая в дальнейшем называется также локальной или элементной. Перемещения, углы поворотов, поступательные и вращательные скорости этой системы, совершающей движение совместно с элементом относительно системы $OXYZ$, учитываются строго. Функции формы выбираются в виде квазистатических аппроксимаций локальных перемещений и углов поворотов сечений стержневого элемента в переменных $\tilde{O}xyz$.

В качестве обобщенных координат задачи $q_i(t)$ (t – время; i – порядковый номер) принимаются абсолютные перемещения и углы поворотов краевых сечений конечных элементов модели.

Уравнения движения системы составляются на основе принципа Даламбера-Лагранжа

$$\delta U - \delta A_p - \delta A_i = 0. \quad (2)$$

где δU – вариация потенциальной энергии системы; δA_p , δA_i – вариации работы внешних и инерционных сил.

Пусть V и S – объем и площадь поверхность стержневого элемента, \mathbf{p} и \mathbf{G} – вектора поверхностной и объемной внешней нагрузки, ρ – массовая плотность материала. Тогда

$$\delta A_p = \iint_S \mathbf{p} \cdot \delta \mathbf{R} dS + \iiint_V \mathbf{G} \cdot \delta \mathbf{R} dV, \quad \delta A_i = -\iiint_V \rho \ddot{\mathbf{R}} \cdot \delta \mathbf{R} dV, \quad (3)$$

где $\ddot{\mathbf{R}}$ и $\delta \mathbf{R}$ – ускорение точки P и вариация её положения.

Введем $\boldsymbol{\omega}$ – вектор угловой скорости сечения. Тогда в соответствии с (1) [21]

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_c + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_c). \quad (4)$$

Проекции $\boldsymbol{\omega}$ на оси системы $O_c x_c y_c z_c$ определяются через направляющие косинусы α_{mn} ($m, n = 1, 2, 3$) по формуле

$$\omega_q = \epsilon_{stq} \sum_{m=1}^3 \alpha_{tm} \dot{\alpha}_{sm}, \quad (5)$$

где ϵ_{stq} – символ Леви-Чивита.

Пусть $\boldsymbol{\theta}$ – вектор бесконечно малого поворота сечения. Тогда виртуальное перемещение точки M

$$\delta \mathbf{R} = \delta \mathbf{r} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}_c. \quad (6)$$

Если использовать углы прецессии $\hat{\psi}$, нутации $\hat{\vartheta}$ чистого сдвига $\hat{\phi}$, то

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{i}_3 \delta \hat{\psi} + \mathbf{n} \delta \hat{\vartheta} + \mathbf{i}_3^c \delta \hat{\phi}. \quad (7)$$

Здесь: \mathbf{i}_3 – единичный вектор первого поворота на угол $\hat{\psi}$ вокруг оси OZ ; \mathbf{n} – единичный вектор второго поворота на угол $\hat{\vartheta}$ вокруг оси узлов, в которую переходит ось OX в результате первого поворота; \mathbf{i}_3^c – единичный вектор третьего поворота на угол $\hat{\phi}$ вокруг оси $O_c z_c$, в которую переходит ось OZ при втором повороте.

Обозначим через $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ ортонормированный базис системы $OXYZ$ и через $\mathbf{i}_1^c, \mathbf{i}_2^c, \mathbf{i}_3^c$ – ортонормированный базис системы $O_c x_c y_c z_c$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \mathbf{i}_1 \cos \hat{\psi} + \mathbf{i}_2 \sin \hat{\psi}; \\ \mathbf{i}_1^c &= (\cos \hat{\psi} \cos \hat{\phi} - \sin \hat{\psi} \cos \hat{\vartheta} \sin \hat{\phi}) \mathbf{i}_1 + \\ &\quad + (\sin \hat{\psi} \cos \hat{\phi} + \cos \hat{\psi} \cos \hat{\vartheta} \sin \hat{\phi}) \mathbf{i}_2 + \sin \hat{\vartheta} \sin \hat{\phi} \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{i}_2^c &= (-\cos \hat{\psi} \sin \hat{\phi} - \sin \hat{\psi} \cos \hat{\vartheta} \cos \hat{\phi}) \mathbf{i}_1 + \\ &\quad + (-\sin \hat{\psi} \sin \hat{\phi} + \cos \hat{\psi} \cos \hat{\vartheta} \cos \hat{\phi}) \mathbf{i}_2 + \sin \hat{\vartheta} \cos \hat{\phi} \mathbf{i}_3, \\ \mathbf{i}_3^c &= \sin \hat{\psi} \sin \hat{\vartheta} \mathbf{i}_1 - \cos \hat{\psi} \sin \hat{\vartheta} \mathbf{i}_2 + \cos \hat{\vartheta} \mathbf{i}_3. \end{aligned} \quad (8)$$

Направляющие косинусы, входящие в (5), суть коэффициенты (8): $\alpha_{ij} = \mathbf{i}_i^c \cdot \mathbf{i}_j$.

Считается, что на обобщенные координаты $q_i(t)$ системы наложены m связей, линейных относительно скоростей $\dot{q}_i(t)$

$$\sum_{j=1}^n D_{ij}(q_1, \dots, q_n; t) \dot{q}_j + d_j(q_1, \dots, q_n; t) = 0; \quad i = 1, \dots, m. \quad (9)$$

Если связи голономны и имеют вид: $f_i(q_1, \dots, q_n) = 0$, то $D_{ij} = \partial f_i / \partial q_j$.

Применяя синхронное варьирование, запишем вариации связей в фиксированный момент времени. Аналогично (9) имеем

$$\sum_{j=1}^n D_{ij} \delta q_j = 0; \quad i = 1, \dots, m. \quad (10)$$

Вариация функционала полной энергии системы, для которого ищется стационарное значение, преобразуется путём прибавления левых частей дополнительных условий (10), умноженных на неопределённые множители Лагранжа. Вариационная задача для преобразованного функционала решается как

свободная. Условия стационарности вместе с дифференциальными условиями (9) определяют искомые значения обобщенных координат и множители Лагранжа.

Вывод уравнений движения из вариационного соотношения (2) с учётом связей в виде (9) представляет собой нетривиальную задачу. Интегрирование по S и V с учётом выбранных функций формы и нелинейных соотношений для деформаций и инерционных сил сопровождаются весьма сложными вычислениями. Для преодоления этих трудностей многие авторы пользуются достаточно «сильными» допущениями, редуцируя модель и пренебрегая рядом величин в уравнениях движения, считая их влияние несущественным.

Ниже предлагается подход, позволяющий избежать громоздких вычислений без упрощения физической модели и (или) изменения первоначальной структуры уравнений. Для простоты изложения ограничимся далее плоской задачей, считая, что упругие оси элементов совершают движение в одной плоскости. В недеформированном состоянии оси стержневых элементов считаются прямолинейными.

2. ДИНАМИКА В ПЛОСКОСТИ

Привязку местной системы $\tilde{O}xу$ к элементу можно осуществлять различным образом. Полюс \tilde{O} можно совместить с точкой пересечения продольной оси стержня и краевого поперечного сечения, направив ось $\tilde{O}x$ перпендикулярно сечению стержня. Возможны и другие варианты. В работе связь местной системы координат с элементом осуществляется так, чтобы ось $\tilde{O}x$ проходила через полюсы краевых сечений "0" и "1", как это показано на рис.2.

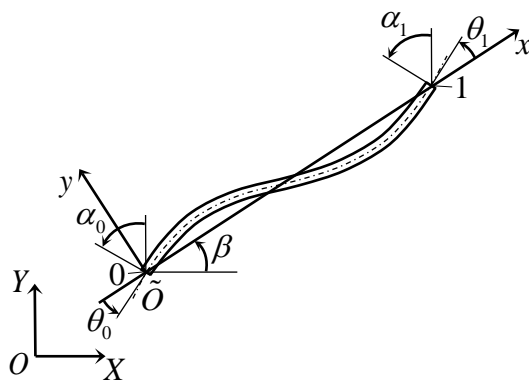


Рис.2. Конечный элемент и связанная с ним локальная система координат.

2.1. Функции формы.

Осевую линию стержневого элемента будем считать нейтральной. Рассмотрим в плоскости сечения $y_c z_c$ произвольную точку P , отстоящую от оси $O_c z_c$ на расстоянии y_c . Считая угол поворота сечения в системе $\tilde{O}xу$ малым, приближенно имеем $y_c \approx y - v$, где $v(x)$ – перемещение осевой точки сечения по оси $\tilde{O}у$ (см. рис.3).

Обозначим через $\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x)$ деформацию сдвига, осредненную по сечению, например, в энергетическом смысле. Эта величина представляет собой угол

отклонения нормали сечения от касательной к осевой линии. Если u – продольное перемещение точки P (вдоль оси $\tilde{O}x$), то $\gamma_{xy}(x) = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x$. Интегрирование этого соотношения по y с учётом преобразования $y = y_c + v$ даёт $u(x, y) = u_{\oplus}(x) - y_c \theta(x)$, где u_{\oplus} – продольное перемещение нейтральной линии $O_c z_c$, $\theta = v' - \gamma_{xy}$ – угол поворота сечения; $v' = dv/dx$. Здесь и далее величины со штрихом обозначают производные по локальной координате x .

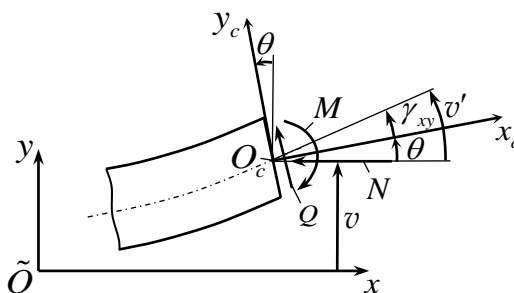


Рис.3. Кинематические и статические факторы в сечении стержня.

В пределах конечного элемента перемещением u_{\oplus} далее будем пренебрегать. Тогда $\epsilon_x = \partial u / \partial x = -y_c \theta'$, $\gamma_{xy} = v' - \theta$.

Получим выражения для изгибающего момента M , поперечной силы Q и продольной силы N , действующие в сечении стержня.

Напряжения σ_x и τ_{xy} связаны с деформациями ϵ_x и γ_{xy} соотношениями упругости: $\sigma_x = E \epsilon_x = -E y_c \theta'$, $\tau_{xy} = G \gamma_{xy} = G(v' - \theta)$; E и G – модули Юнга и сдвига. Поэтому

$$M = \int_F y_c \sigma_x dF = -E J_z \theta', \quad Q = G F_s (v' - \theta), \tag{11}$$

где $J_z = \int_F y_c^2 dF$ – момент инерции сечения; F_s – эквивалентная площадь поперечного сечения, работающая на сдвиг.

При вычислении продольной силы будем использовать нелинейное выражение для осевой деформации в виде [5]

$$\epsilon = u' + 1/2 \cdot v'^2. \tag{12}$$

Тогда

$$N = \int_F E \epsilon dF = E F (u' + 1/2 \cdot v'^2), \tag{13}$$

где F – площадь поперечного сечения.

С учётом (11), (13) потенциальная энергия стержневого элемента длины l записывается в виде

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{E F} + \frac{M^2}{E J_z} + \frac{Q^2}{G F_s} \right) dx. \tag{14}$$

Уравнения статического равновесия получим на основе вариационного принципа Лагранжа, минимизируя функционал (14) без учета энергии растяжения-сжатия (полагая $N \equiv 0$). Из условия равенства нулю вариации

потенциальной энергии U с использованием (11) приходим к однородной системе уравнений относительно $\theta(x)$ и $v(x)$

$$\theta''' = 0, \quad v' - \theta + \frac{l^2}{12} \frac{1-\alpha}{\alpha} \theta'' = 0. \quad (15)$$

Здесь α – безразмерный коэффициент, характеризующий осреднённый сдвиг

$$\alpha = \left(1 + 12 \frac{EJ_z}{l^2 GF_s} \right)^{-1}. \quad (16)$$

Если пренебречь сдвигом, т.е. $GF_s \rightarrow \infty$, тогда $\alpha = 1$.

Решением (15) является

$$\theta(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2, \quad v(x) = c_3 + \left(c_0 - \frac{l^2}{6} \frac{1-\alpha}{\alpha} c_2 \right) x + \frac{c_1}{2} x^2 + \frac{c_2}{3} x^3, \quad (17)$$

где c_0, c_1, c_2, c_3 – постоянные интегрирования. Их значения находятся из граничных условий: $v(0) = v(l) = 0$ и $\theta(0) = \theta_0$, $\theta(l) = \theta_1$. С учетом найденных значений для констант решение (17) записывается в виде

$$\theta(x) = \theta_0 \varphi_0(x) + \theta_1 \varphi_1(x), \quad v(x) = \theta_0 \psi_0(x) + \theta_1 \psi_1(x), \quad (18)$$

где функции формы

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) &= 1 - (1 + 3\alpha)\xi + 3\alpha\xi^2, & \varphi_1(x) &= (1 - 3\alpha)\xi + 3\alpha\xi^2; \\ \psi_0(x) &= l \left[\frac{1}{2}(1 + \alpha)\xi - \frac{1}{2}(1 + 3\alpha)\xi^2 + \alpha\xi^3 \right], \\ \psi_1(x) &= l \left[\frac{1}{2}(-1 + \alpha)\xi + \frac{1}{2}(1 - 3\alpha)\xi^2 + \alpha\xi^3 \right]; \end{aligned} \quad (19)$$

переменная $\xi = x/l$ – безразмерная локальная координата ($0 \leq \xi \leq 1$).

Определим продольную (осевую) деформацию ε , считая её величиной постоянной в пределах элемента. Из (12) имеем $u' = \varepsilon - 1/2 \cdot v'^2$, откуда следует выражение для продольного перемещения

$$u(x) = u_0 + \varepsilon x - \frac{1}{2} \int v'^2 dx. \quad (20)$$

Перемещения краевых сечений $u_0 = u(0) = 0$, $u_1 = u(l) \neq 0$. Тогда из (20), после интегрирования по координате x от 0 до l , получаем

$$u_1 = l \left\{ \varepsilon - \frac{1}{8} \left[\frac{1}{3}(\theta_1 - \theta_0)^2 + \frac{\alpha^2}{5}(\theta_1 + \theta_0)^2 \right] \right\}.$$

Отсюда следует выражение для деформации ε в виде

$$\varepsilon = \frac{u_1}{l} + \frac{1}{8} \left[\frac{1}{3}(\theta_1 - \theta_0)^2 + \frac{\alpha^2}{5}(\theta_1 + \theta_0)^2 \right]. \quad (21)$$

В свою очередь, продольное перемещение

$$u_1 = \tilde{l} - l, \quad (22)$$

где \tilde{l} – расстояние между полюсами краевых сечений, которое выражается через абсолютные координаты полюсов по формуле

$$\tilde{l} = \sqrt{(X_1 - X_0)^2 + (Y_1 - Y_0)^2}. \quad (23)$$

Угол наклона элементной системы координат β связан с этими координатами соотношениями

$$\sin \beta = \frac{Y_1 - Y_0}{\tilde{l}}, \quad \cos \beta = \frac{X_1 - X_0}{\tilde{l}}. \quad (24)$$

2.2. Вариация потенциальной энергии деформации.

Интегрирование в (14) с учётом выражений (11) и (21) приводит к выражению

$$U = \frac{1}{2} \frac{EJ_z}{l} [(\theta_1 - \theta_0)^2 + 3\alpha(\theta_1 + \theta_0)^2] + \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EF}, \quad (25)$$

где $N = EF\varepsilon$.

Из рис.2 следуют простые геометрические соотношения

$$\theta_0 = \alpha_0 - \beta, \quad \theta_1 = \alpha_1 - \beta. \quad (26)$$

Тогда $\theta_1 - \theta_0 = \alpha_1 - \alpha_0$, $\theta_1 + \theta_0 = \alpha_1 + \alpha_0 - 2\beta$ и вместо (25) имеем

$$U = \frac{1}{2} \frac{EJ_z}{l} [(\alpha_1 - \alpha_0)^2 + 3\alpha(\alpha_1 + \alpha_0 - 2\beta)^2] + \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EF}. \quad (27)$$

Продольная сила в (27)

$$N = EF \left\{ \frac{u_1}{l} + \frac{1}{8} \left[\frac{1}{3} (\alpha_1 - \alpha_0)^2 + \frac{\alpha^2}{5} (\alpha_1 + \alpha_0 - 2\beta)^2 \right] \right\}. \quad (28)$$

Введем вектор обобщенных координат элемента в виде

$$\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_6)^T = (X_0, Y_0, \alpha_0, \alpha_1, X_1, Y_1)^T. \quad (29)$$

Вариация

$$\delta U = \sum_i \frac{\partial U}{\partial q_i} \delta q_i = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \delta \mathbf{q}, \quad (30)$$

где вектор-столбец $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \left(\frac{\partial U}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial U}{\partial q_6} \right)^T. \quad (31)$

Дифференцируя (27) по обобщенным координатам, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial X_0} &= -\frac{\partial U}{\partial X_1} = -6\alpha \frac{EJ_z}{l} \theta^{(+)} \frac{\partial \beta}{\partial X_0} + Nl \frac{\partial \varepsilon}{\partial X_0}, \\ \frac{\partial U}{\partial Y_0} &= -\frac{\partial U}{\partial Y_1} = -6\alpha \frac{EJ_z}{l} \theta^{(+)} \frac{\partial \beta}{\partial Y_0} + Nl \frac{\partial \varepsilon}{\partial Y_0}, \\ \frac{\partial U}{\partial \alpha_0} &= \frac{EJ_z}{l} (-\theta^{(-)} + 3\alpha \theta^{(+)}) + Nl \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_0}, \\ \frac{\partial U}{\partial \alpha_1} &= \frac{EJ_z}{l} (\theta^{(-)} + 3\alpha \theta^{(+)}) + Nl \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha_1}. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь введены обозначения: $\theta^{(+)} = \theta_1 + \theta_0 = \alpha_1 + \alpha_0 - 2\beta$, $\theta^{(-)} = \theta_1 - \theta_0 = \alpha_1 - \alpha_0$.

Объединяя (32) в матричной форме, имеем также

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} = \frac{EJ_z}{l} \left[\theta^{(-)} (-\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4) + 3\alpha \theta^{(+)} \left(-2 \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4 \right) \right] + Nl \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}}. \quad (33)$$

где \mathbf{e}_k ($k = 3, 4$) – вектор-столбцы, элементы которых суть символы Кронекера

$$\mathbf{e}_k = (\delta_{1k}, \delta_{2k}, \dots, \delta_{6k})^T. \quad (34)$$

Вектор-столбцы $\partial\varepsilon/\partial\mathbf{q}$, $\partial\beta/\partial\mathbf{q}$ имеют вид, аналогичный (31) с заменой U на ε или β соответственно.

Дифференцирование (21) и (24) по обобщенным координатам приводит к выражениям

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varepsilon}{\partial X_0} &= -\frac{\partial\varepsilon}{\partial X_1} = -\frac{\cos\beta}{l} - \frac{\alpha^2}{10}\theta^{(+)}\frac{\partial\beta}{\partial X_0}, \\ \frac{\partial\varepsilon}{\partial Y_0} &= -\frac{\partial\varepsilon}{\partial Y_1} = -\frac{\sin\beta}{l} - \frac{\alpha^2}{10}\theta^{(+)}\frac{\partial\beta}{\partial Y_0}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha_0} &= \frac{1}{4}\left(-\frac{\theta^{(-)}}{3} + \frac{\alpha^2}{5}\theta^{(+)}\right), \quad \frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha_1} = \frac{1}{4}\left(\frac{\theta^{(-)}}{3} + \frac{\alpha^2}{5}\theta^{(+)}\right); \\ \frac{\partial\beta}{\partial X_0} &= -\frac{\partial\beta}{\partial X_1} = \frac{\sin\beta}{\tilde{l}}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial Y_0} = -\frac{\partial\beta}{\partial Y_1} = -\frac{\cos\beta}{\tilde{l}}, \quad \frac{\partial\beta}{\partial\alpha_0} = \frac{\partial\beta}{\partial\alpha_1} = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Тригонометрические функции в (35), (36) определяются формулами (24).

2.3. Вариация работы инерционных сил.

Проекциями векторов \mathbf{r} и \mathbf{r}_o на оси инерциальной координатной системы OXY являются X , Y и X_0 , Y_0 . Величины $x+u$ и v представляют собой проекции $\tilde{\mathbf{r}}$ на подвижные оси $\tilde{O}x$ и $\tilde{O}y$. Тогда

$$X = X_0 + (x+u)\cos\beta - v\sin\beta, \quad Y = Y_0 + (x+u)\sin\beta + v\cos\beta. \quad (37)$$

Учитывая (26), выражение для v из (18) перепишем в виде

$$v(x) = \alpha_0\psi_0(x) + \alpha_1\psi_1(x) - \beta\psi(x), \quad (38)$$

где введена вспомогательная функция

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \psi_1(x) = l\alpha\left(\xi - 3\xi^2 + 2\xi^3\right). \quad (39)$$

Принимая во внимание (20) и (38), вместо (37) имеем

$$\begin{aligned} X &= X_0 + (1+\varepsilon)x\cos\beta - (\alpha_0\psi_0 + \alpha_1\psi_1 - \beta\psi)\sin\beta, \\ Y &= Y_0 + (1+\varepsilon)x\sin\beta + (\alpha_0\psi_0 + \alpha_1\psi_1 - \beta\psi)\cos\beta. \end{aligned} \quad (40)$$

Ускорение $\ddot{\mathbf{R}}$ и вариация $\delta\mathbf{R}$ определяются формулами (4)-(7). Для записи их в координатной форме обозначим через R_1, R_2 проекции вектора $\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{r}_c$ на оси системы OXY . Тогда проекции ускорения точки P

$$\ddot{R}_1 = \ddot{X} - \dot{\omega}y_c, \quad \ddot{R}_2 = \ddot{Y} - \omega^2y_c. \quad (41)$$

Для плоского случая углы в (7) имеют простейший вид: $\hat{\psi}(x) = \beta + \theta(x)$, $\hat{\beta} = \hat{\phi} = 0$. Поэтому вариации координат точки P

$$\delta R_1 = \delta X - y_c\delta(\beta + \theta), \quad \delta R_2 = \delta Y. \quad (42)$$

На основании (41), (42) скалярное произведение

$$\ddot{\mathbf{R}} \cdot \delta\mathbf{R} = (\ddot{X} - \dot{\omega}y_c)\delta X + (\ddot{Y} - \omega^2y_c)\delta Y + (-\ddot{X}y_c + \dot{\omega}y_c^2)\delta(\beta + \theta). \quad (43)$$

Тогда вариация работы инерционных сил

$$\begin{aligned} \delta A_i = & - \int_0^l \int_F \rho \ddot{\mathbf{R}} \cdot \delta \mathbf{R} dF dx = -m \int_0^l (\ddot{X} \delta X + \ddot{Y} \delta Y) dx + m y_C \left[\int_0^l \dot{\omega} \delta X dx + \right. \\ & \left. + \int_0^l \omega^2 \delta Y dx + \int_0^l \ddot{X} \delta (\beta + \theta) dx \right] - I_z \int_0^l \dot{\omega} \delta (\beta + \theta) dx, \end{aligned} \quad (44)$$

где $m = \int_F \rho dF$ – погонная масса стержневого элемента, $y_C = \int_F \rho y_c dF / m$ – локальная координата центра массы сечения, $I_z = \int_F \rho y_c^2 dF$ – массовый момент инерции.

Для упрощения вычислений правой части (44) введем далее иерархическую систему матричных обозначений и воспользуемся теоремой о дифференцировании сложной функции.

Рассматривая X и Y как функции обобщенных координат (29), формально имеем

$$\dot{X} = \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial X}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{Y} = \dot{\mathbf{q}}^T \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{q}}. \quad (45)$$

Определим $\partial X / \partial \mathbf{q}$ и $\partial Y / \partial \mathbf{q}$. Из (40) видно, что координаты X и Y можно рассматривать как сложные функции вида

$$X = X(X_0, \varepsilon, \beta, \alpha_0, \alpha_1), \quad Y = Y(Y_0, \varepsilon, \beta, \alpha_0, \alpha_1). \quad (46)$$

Тогда

$$\frac{\partial X}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial X_q}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial X}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial Y_q}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial Y}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, \quad (47)$$

где X_q, Y_q – части X и Y , содержащие явно элементы $\mathbf{q} = (X_0, Y_0, \alpha_0, \alpha_1, X_1, Y_1)^T$.

Нетрудно видеть, что

$$X_q = X_0 - (\alpha_0 \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 - \beta \psi) \sin \beta, \quad Y_q = Y_0 + (\alpha_0 \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 - \beta \psi) \cos \beta.$$

Дифференцирование последних равенств по q_i , считая β величиной фиксированной, даёт

$$\frac{\partial X_q}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{e}_1 - (\psi_0 \mathbf{e}_3 + \psi_1 \mathbf{e}_4) \sin \beta, \quad \frac{\partial Y_q}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{e}_2 + (\psi_0 \mathbf{e}_3 + \psi_1 \mathbf{e}_4) \cos \beta; \quad (48)$$

Остальные элементы (47), зависящие от x , имеют вид

$$\frac{\partial X}{\partial \varepsilon} = x \cos \beta, \quad \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = x \sin \beta; \quad (49)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \beta} = -[(1 + \varepsilon)x - \psi] \sin \beta - (\alpha_0 \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 - \beta \psi) \cos \beta, \quad (50)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta} = [(1 + \varepsilon)x - \psi] \cos \beta - (\alpha_0 \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 - \beta \psi) \sin \beta.$$

Введём вектор, зависящий только от x

$$\boldsymbol{\psi}(x) = (1, x, \psi(x), \psi_0(x), \psi_1(x))^T. \quad (51)$$

Это позволяет переписать (48)-(50) следующим образом

$$\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial \mathbf{q}} &= (\mathbf{e}_1, 0, 0, -\sin \beta \mathbf{e}_3, -\sin \beta \mathbf{e}_4) \boldsymbol{\psi}, \\
\frac{\partial Y}{\partial \mathbf{q}} &= (\mathbf{e}_2, 0, 0, \cos \beta \mathbf{e}_3, \cos \beta \mathbf{e}_4) \boldsymbol{\psi}; \\
\frac{\partial X}{\partial \varepsilon} &= (0, \cos \beta, 0, 0, 0) \boldsymbol{\psi}, \quad \frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = (0, \sin \beta, 0, 0, 0) \boldsymbol{\psi}; \\
\frac{\partial X}{\partial \beta} &= (0, -(1 + \varepsilon) \sin \beta, \sin \beta + \beta \cos \beta, -\alpha_0 \cos \beta, -\alpha_1 \cos \beta) \boldsymbol{\psi}, \\
\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} &= (0, (1 + \varepsilon) \cos \beta, -\cos \beta + \beta \sin \beta, -\alpha_0 \sin \beta, -\alpha_1 \sin \beta) \boldsymbol{\psi},
\end{aligned}$$

где векторы \mathbf{e}_k ($k=1, \dots, 4$) даются (34). С учётом этих выражений формулы (47) запишем в матричной форме

$$\frac{\partial X(x)}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}(x), \quad \frac{\partial Y(x)}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{B} \boldsymbol{\psi}(x),$$

где матрицы $\mathbf{A}_{6 \times 5} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_5)$ и $\mathbf{B}_{6 \times 5} = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_5)$ формируются столбцами

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_1 &= \mathbf{e}_1, & \mathbf{b}_1 &= \mathbf{e}_2, \\
\mathbf{a}_2 &= \cos \beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}} - (1 + \varepsilon) \sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, & \mathbf{b}_2 &= \sin \beta \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}} + (1 + \varepsilon) \cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, \\
\mathbf{a}_3 &= (\sin \beta + \beta \cos \beta) \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, & \mathbf{b}_3 &= (-\cos \beta + \beta \sin \beta) \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, \\
\mathbf{a}_4 &= -\mathbf{e}_3 \sin \beta - \alpha_0 \cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, & \mathbf{b}_4 &= \mathbf{e}_3 \cos \beta - \alpha_0 \sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, \\
\mathbf{a}_5 &= -\mathbf{e}_4 \sin \beta - \alpha_1 \cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}, & \mathbf{b}_5 &= \mathbf{e}_4 \cos \beta - \alpha_1 \sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}}.
\end{aligned} \tag{52}$$

Теперь формулы (45) принимают вид

$$\dot{X}(x) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\psi}(x), \quad \dot{Y}(x) = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} \boldsymbol{\psi}(x). \tag{53}$$

Дифференцируя (53) по времени, получаем компоненты ускорения

$$\ddot{X}(x) = (\ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{A}}) \boldsymbol{\psi}(x), \quad \ddot{Y}(x) = (\ddot{\mathbf{q}}^T \mathbf{B} + \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{B}}) \boldsymbol{\psi}(x). \tag{54}$$

Дифференцирование по времени (52) даёт столбцы матриц $\dot{\mathbf{A}}$ и $\dot{\mathbf{B}}$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{a}}_1 &= 0, \\
\dot{\mathbf{a}}_2 &= \left\{ \cos \beta \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{q}^2} - (1 + \varepsilon) \left[\cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \sin \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial \mathbf{q}^2} \right] - \right. \\
&\quad \left. - \sin \beta \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right] \right\} \dot{\mathbf{q}},
\end{aligned}$$

$$\dot{\mathbf{a}}_3 = \left[(2 \cos \beta - \beta \sin \beta) \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + (\sin \beta + \beta \cos \beta) \frac{\partial^2 \beta}{\partial \mathbf{q}^2} \right] \dot{\mathbf{q}}, \quad (56)$$

$$\dot{\mathbf{a}}_4 = \left\{ -\cos \beta \left[\mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{e}_3^T \right] + \alpha_0 \left[\sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \cos \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial \mathbf{q}^2} \right] \right\} \dot{\mathbf{q}},$$

$$\dot{\mathbf{a}}_5 = \left\{ -\cos \beta \left[\mathbf{e}_4 \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{e}_4^T \right] + \alpha_1 \left[\sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T - \cos \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial \mathbf{q}^2} \right] \right\} \dot{\mathbf{q}};$$

$$\dot{\mathbf{b}}_1 = 0,$$

$$\dot{\mathbf{b}}_2 = \left\{ \sin \beta \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{q}^2} + (1 + \varepsilon) \left[-\sin \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \cos \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial \mathbf{q}^2} \right] + \cos \beta \left[\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \right] \right\} \dot{\mathbf{q}},$$

$$\dot{\mathbf{b}}_3 = \left[(2 \cos \beta - \beta \sin \beta) \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + (\sin \beta + \beta \cos \beta) \frac{\partial^2 \beta}{\partial \mathbf{q}^2} \right] \dot{\mathbf{q}}, \quad (57)$$

$$\dot{\mathbf{b}}_4 = \left\{ -\sin \beta \left[\mathbf{e}_3 \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{e}_3^T \right] - \alpha_0 \left[\cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \sin \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial \mathbf{q}^2} \right] \right\} \dot{\mathbf{q}},$$

$$\dot{\mathbf{b}}_5 = \left\{ -\sin \beta \left[\mathbf{e}_4 \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{e}_4^T \right] - \alpha_1 \left[\cos \beta \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{q}} \right)^T + \sin \beta \frac{\partial^2 \beta}{\partial \mathbf{q}^2} \right] \right\} \dot{\mathbf{q}}.$$

Здесь элементы $\partial \varepsilon / \partial \mathbf{q}$, $\partial \beta / \partial \mathbf{q}$ даются формулами (35), (36). В состав выражений (56), (57) входят также симметричные 6×6 -матрицы

$$\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \mathbf{q}^2} = \left\| \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial q_i \partial q_j} \right\|, \quad \frac{\partial^2 \beta}{\partial \mathbf{q}^2} = \left\| \frac{\partial^2 \beta}{\partial q_i \partial q_j} \right\|,$$

элементы которых вычисляются с использованием (35) и (36)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X_0^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X_1^2} = -\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X_0 \partial X_1} = \left(\frac{\tilde{l}}{l} + \frac{\alpha^2}{5} \right) \left(\frac{\partial \beta}{\partial X_0} \right)^2 - \frac{\alpha^2}{10} \theta^{(+)} \frac{\partial^2 \beta}{\partial X_0^2}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial Y_0^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial Y_1^2} = -\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial Y_0 \partial Y_1} = \left(\frac{\tilde{l}}{l} + \frac{\alpha^2}{5} \right) \left(\frac{\partial \beta}{\partial Y_0} \right)^2 - \frac{\alpha^2}{10} \theta^{(+)} \frac{\partial^2 \beta}{\partial Y_0^2}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X_0 \partial Y_0} &= \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X_1 \partial Y_1} = -\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X_1 \partial Y_0} = -\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X_0 \partial Y_1} = \\ &= \left(\frac{\tilde{l}}{l} + \frac{\alpha^2}{5} \right) \frac{\partial \beta}{\partial X_0} \frac{\partial \beta}{\partial Y_0} - \frac{\alpha^2}{10} \theta^{(+)} \frac{\partial^2 \beta}{\partial X_0 \partial Y_0}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X_0 \partial \alpha_0} &= \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X_0 \partial \alpha_1} = -\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X_1 \partial \alpha_0} = -\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial X_1 \partial \alpha_1} = -\frac{\alpha^2}{10} \frac{\partial \beta}{\partial X_0}, \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial Y_0 \partial \alpha_0} &= \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial Y_0 \partial \alpha_1} = -\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial Y_1 \partial \alpha_0} = -\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial Y_1 \partial \alpha_1} = -\frac{\alpha^2}{10} \frac{\partial \beta}{\partial Y_0}, \\
\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \alpha_0^2} &= \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \alpha_1^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} + \frac{\alpha^2}{5} \right), \quad \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_1} = \frac{1}{4} \left(-\frac{1}{3} + \frac{\alpha^2}{5} \right); \\
\frac{\partial^2 \beta}{\partial X_0^2} &= \frac{\partial^2 \beta}{\partial X_1^2} = -\frac{\partial^2 \beta}{\partial X_0 \partial X_1} = -\frac{\partial^2 \beta}{\partial Y_0^2} = -\frac{\partial^2 \beta}{\partial Y_1^2} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial Y_0 \partial Y_1} = \frac{\sin 2\beta}{\tilde{l}^2}, \\
\frac{\partial^2 \beta}{\partial X_0 \partial Y_0} &= \frac{\partial^2 \beta}{\partial X_1 \partial Y_1} = -\frac{\partial^2 \beta}{\partial X_1 \partial Y_0} = -\frac{\partial^2 \beta}{\partial X_0 \partial Y_1} = -\frac{\cos 2\beta}{\tilde{l}^2}.
\end{aligned} \tag{59}$$

Частные производные β по α_0, α_1 равны нулю.

Получим теперь выражения для инерционных членов, связанных с вращением сечения. Учитывая (26), формулу для θ из (18) перепишем в виде

$$\theta(x) = \alpha_0 \varphi_0(x) + \alpha_1 \varphi_1(x) - \beta(1 - \varphi(x)), \tag{60}$$

где введена вспомогательная функция

$$\varphi(x) = 1 - \varphi_0(x) - \varphi_1(x) = 6\alpha(\xi - \xi^2). \tag{61}$$

Тогда угол поворота сечения оказывается равным

$$\beta + \theta(x) = \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_0 \varphi_0(x) + \beta \varphi(x).$$

Введём вектор, зависящий только от x

$$\boldsymbol{\varphi}(x) = (\varphi(x), \varphi_0(x), \varphi_1(x))^T. \tag{62}$$

Тогда угловую скорость можно записать в виде

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\beta} + \dot{\theta} = (\dot{\beta}, \dot{\alpha}_0, \dot{\alpha}_1) \boldsymbol{\varphi} = \dot{\boldsymbol{q}}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}, \tag{63}$$

где матрица $\mathbf{C}_{6 \times 3} = \left(\frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{q}}, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4 \right)$. \tag{64}

Возводя в квадрат (63), имеем

$$\omega^2 = \dot{\boldsymbol{q}}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi} \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{C}^T \dot{\boldsymbol{q}}. \tag{65}$$

Дифференцируя (63) получаем угловое ускорение

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\ddot{\boldsymbol{q}}^T \mathbf{C} + \dot{\boldsymbol{q}}^T \dot{\mathbf{C}}) \boldsymbol{\varphi}, \tag{66}$$

причём

$$\dot{\mathbf{C}} = \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial \boldsymbol{q}^2} \dot{\boldsymbol{q}}, 0, 0 \right). \tag{67}$$

Получим выражения для вариаций δX , δY и $\delta(\beta + \theta)$, входящих в (44).

По аналогии с (53) имеем

$$\delta X = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{A}^T \delta \boldsymbol{q}, \quad \delta Y = \boldsymbol{\psi}^T \mathbf{B}^T \delta \boldsymbol{q}. \tag{68}$$

Вариация угла поворота сечения

$$\delta(\beta + \theta) = \boldsymbol{\varphi}^T \mathbf{C}^T \delta \boldsymbol{q}. \tag{69}$$

Подстановка (54), (65), (66), (68), (69) в (44) даёт

$$\begin{aligned}
\delta A_i &= -\dot{\boldsymbol{q}}^T \left\{ m \left[\mathbf{A} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{B}^T - y_c (\mathbf{C} \mathbf{Z} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{Z}^T \mathbf{C}^T) \right] + I_z \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{C}^T \right\} - \\
&\quad - \dot{\boldsymbol{q}}^T \left\{ m \left[\dot{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{A}^T + \dot{\mathbf{B}} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{B}^T - y_c (\dot{\mathbf{C}} \mathbf{Z} \mathbf{A}^T + \dot{\mathbf{A}} \mathbf{Z}^T \mathbf{C}^T + \mathbf{C} \dot{\mathbf{O}} \mathbf{B}^T) \right] + \right. \\
&\quad \left. + I_z \dot{\mathbf{C}} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{C}^T \right\} \delta \boldsymbol{q},
\end{aligned} \tag{70}$$

где матрицы $\Psi = \int_0^l \psi \psi^T dx$, $Z = \int_0^l \phi \psi^T dx$, $\Phi = \int_0^l \phi \phi^T dx$, $\Theta = \int_0^l \phi \phi^T C^T \dot{q} \psi^T dx$ (71)

2.4. Учёт сосредоточенных масс.

Стержневые конструкции, как правило, состоят из стержневых элементов и набора твёрдых тел. Для общности, будем считать, что концы каждого стержневого элемента жестко связаны с твёрдыми телами. Примем, что размеры их малы по сравнению с длиной элемента. Это позволяет массовые характеристики тел – массу, массовые статические моменты и массовый момент инерции, сосредоточить в полюсах узловых сечений.

Твёрдые тела будем обозначать «0» и «1» соответственно нумерации краевых сечений. Каждое тело свяжем с системой координат $O_k x_k y_k z_k$ ($k = 0, 1$) так, чтобы ось $O_k x_k$ была направлена по нормали к краевым сечениям стержня, как это показано на рис.4. В этом случае углы поворота твёрдых тел, ассоциированных с узлами «0» и «1», соответственно равны α_0 и α_1 .

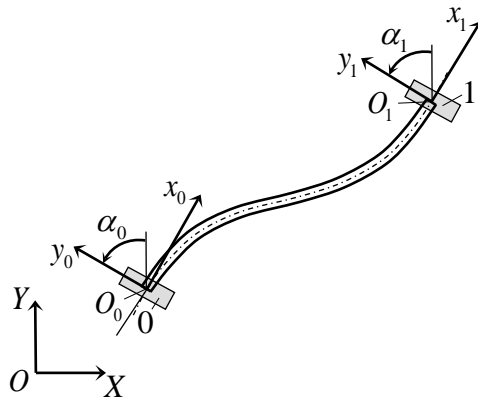


Рис.4. Массы элемента и связанные с ними координатные системы.

Для каждого твёрдого тела объёмом V_k , выполненного из условного материала с массовой плотностью ρ_k , имеем

$$\delta A_i^{(k)} = - \int_{V_k} \rho_k (\ddot{\mathbf{R}} \cdot \delta \mathbf{R}) dV_k = - \delta \mathbf{R}_k^T \left[M^{(k)} \ddot{\mathbf{R}}_k + \ddot{\alpha}_k \begin{pmatrix} -S_x^{(k)} \\ S_y^{(k)} \end{pmatrix} - \dot{\alpha}_k^2 \begin{pmatrix} S_y^{(k)} \\ S_x^{(k)} \end{pmatrix} \right] - \delta \alpha_k \left[(-S_x^{(k)}, S_y^{(k)}) \ddot{\mathbf{R}}_k + I_z^{(k)} \ddot{\alpha}_k \right]. \quad (72)$$

Здесь: $M^{(k)} = \int_{V_k} \rho_k dV_k$ – масса k -го тела; $S_x^{(k)} = \int_{V_k} \rho_k y_k dV_k$, $S_y^{(k)} = \int_{V_k} \rho_k x_k dV_k$ – массовые статические моменты тела относительно осей $O_k x_k$ и $O_k y_k$ соответственно; $I_z^{(k)} = \int_{V_k} \rho_k (x_k^2 + y_k^2) dV_k$ – массовый момент инерции тела относительно оси $O_k z_k$. Имеем также: $S_x^{(k)} = M^{(k)} y_C^{(k)}$, $S_y^{(k)} = M^{(k)} x_C^{(k)}$, $I_z^{(k)} = M^{(k)} i_z^{(k)2}$, где $x_C^{(k)}$, $y_C^{(k)}$ – координаты центра тяжести k -го тела, $i_z^{(k)}$ – его радиус инерции.

Представим вектор \mathbf{q} (29) в виде: $\mathbf{q} = (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}_1)^T$, где $\mathbf{q}_0 = (X_0, Y_0, \alpha_0)^T$, $\mathbf{q}_1 = (\alpha_1, X_1, Y_1)^T$. Тогда для твёрдых тел вместо (72) имеем

$$\delta A_i^{(k)} = -\delta \mathbf{q}_k^T [\mathbf{M}_k \ddot{\mathbf{q}}_k - \mathbf{S}_k \dot{\mathbf{q}}_k^T \mathbf{E}_k \dot{\mathbf{q}}_k]; \quad k = 0, 1. \quad (73)$$

Здесь матрицы

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} M^{(0)} & 0 & -S_x^{(0)} \\ 0 & M^{(0)} & S_y^{(0)} \\ -S_x^{(0)} & S_y^{(0)} & I_z^{(0)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_0 = \begin{pmatrix} S_y^{(0)} \\ S_x^{(0)} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (74)$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} I_z^{(1)} - S_x^{(1)} & S_y^{(1)} \\ -S_x^{(1)} & M^{(1)} & 0 \\ S_y^{(1)} & 0 & M^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ S_y^{(1)} \\ S_x^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для суммы $\delta A_i^b = \delta A_i^{(0)} + \delta A_i^{(1)}$ на основании (73) имеем выражение

$$\delta A_i^b = -\delta \mathbf{q}^T (\mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{q}} - \mathbf{S}_b \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{E}_b \dot{\mathbf{q}}), \quad (75)$$

в правой части которого матрицы

$$\mathbf{M}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_0 \\ \mathbf{S}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_b = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E}_1 \end{pmatrix}. \quad (76)$$

В итоге, вариация работы инерционных сил стержневого элемента с массами по его концам представляет собой сумму

$$\delta A_i^\Sigma = \delta A_i + \delta A_i^b, \quad (77)$$

где δA_i , δA_i^b определяются выражениями (70) и (75).

2.5. Упрощения при вычислении работы инерционных сил.

Как видно, инерционные члены содержат достаточно много коэффициентов, влияние которых на движение неравнозначно. Оценить это влияние можно на основе сравнительных вычислений. Однако можно сделать упрощающие физические предположения о характере деформирования элемента или распределения его массовых характеристик, считая длину элемента величиной малой. Это даёт возможность не только упростить вычисления, но и оценить влияние слагаемых в инерционных компонентах уравнений.

Возможны различные варианты упрощения. Наиболее удобными оказываются те, которые основаны на использовании линейных функций формы и на методе сосредоточенных масс, как показывается ниже.

Рассмотрим случай линейных функций формы

$$v(x) = v_0 + (v_1 - v_0)\xi, \quad \theta(x) = \theta_0 + (\theta_1 - \theta_0)\xi, \quad (78)$$

где, как и прежде, $\xi = x/l$ – безразмерная координата.

В силу выбора связи локальной системы координат $\tilde{O}x$ с элементом, ось $\tilde{O}x$ проходит через полюсы узловых сечений. Поэтому $v_1 = v_0 = 0$ и $v(x) \equiv 0$. Следовательно, функции формы $\psi_0(x) = \psi_1(x) = \psi(x) = 0$. Из сравнения выражений для θ из (18) и (78) следует, что функции формы $\varphi_0(x) = 1 - \xi$, $\varphi_1(x) = \xi$, $\varphi(x) = 1 - \varphi_0(x) - \varphi_1(x) = 0$. Это соответствует тому, что в формулах для

φ_0 и φ_1 в (19) отброшены члены, содержащие параметр α . В этом случае, в матрице Ψ ненулевыми остаются лишь элементы $\Psi_{11} = l$, $\Psi_{12} = \Psi_{21} = l^2/2$, $\Psi_{22} = l^3/3$. Ненулевыми элементами матриц Φ , Z и Φ^x соответственно являются: $\Phi_{22} = \Phi_{33} = l/3$, $\Phi_{23} = \Phi_{32} = l/6$; $Z_{21} = Z_{31} = l/2$, $Z_{22} = l^2/6$, $Z_{32} = l^2/3$; $\Phi_{22}^x = \Phi_{23}^x = \Phi_{32}^x = l^2/12$, $\Phi_{33}^x = l^2/4$. Матрицы Φ^ψ , Φ^{ψ_0} и Φ^{ψ_1} – нулевые.

Рассмотрим способ, когда в пределах элемента $v(x) \equiv 0$ и $\theta(x) \equiv 0$, $\alpha_0 = \alpha_1 = \beta$, т.е. при вычислении инерционных членов конечные элементы считаются абсолютно твёрдыми телами в виде прямолинейных стержней. Их упругость учитывается только через потенциальную энергию деформирования. В этом случае $\varphi_0(x) = \varphi_1(x) = 0$, $\varphi(x) = 1$, $\psi_0(x) = \psi_1(x) = \psi(x) = 0$. Тогда матрицы Ψ , Φ^ψ , Φ^{ψ_0} и Φ^{ψ_1} – нулевые, а ненулевые элементы матриц Φ , Z и Φ^x имеют соответственно вид: $\Phi_{11} = l$; $Z_{11} = l$, $Z_{12} = l^2/2$; $\Phi_{22}^x = l^2/2$.

Третий вариант приближенного вычисления инерционных членов уравнений основан на методе сосредоточенных масс, когда массовые характеристики стержневого элемента приводятся («стягиваются») к противолежащим узлам. Для этого каждый элемент условно делится на две части, которые далее принимаются равной длины. Массовые характеристики этих частей приводятся к узлам, принадлежащим этим частям. Приведение осуществляется для начального (недеформированного) состояния. При этом для частей стержня удобно использовать координатные системы присоединенных твёрдых тел, рассмотренных выше. В этом случае достаточно воспользоваться выражением (75), где матрицы M_b и S_b даются выражениями

$$M_b = \begin{pmatrix} M_0 + \tilde{M}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & M_1 + \tilde{M}_1 \end{pmatrix}, S_b = \begin{pmatrix} S_0 + \tilde{S}_0 \\ S_1 + \tilde{S}_1 \end{pmatrix}. \tag{79}$$

Здесь элементами матричных элементов $M_{0,1}$, $S_{0,1}$ являются массовые характеристики твёрдых тел, сосредоточенные в полюсах узловых сечений. Элементами $\tilde{M}_{0,1}$, $\tilde{S}_{0,1}$ являются массовые характеристики частей стержневого элемента, присоединенные к соответствующим характеристикам твёрдых тел.

Если погонная масса стержневого элемента m по его длине постоянна, то массы частей (равных по длине), их массовые статические моменты и моменты инерции соответственно равны

$$\tilde{M}^{(0)} = \tilde{M}^{(1)} = \tilde{M} = \frac{ml}{2}; \quad \tilde{S}_x^{(0)} = \tilde{S}_x^{(1)} = \tilde{M}y_c, \quad \tilde{S}_y^{(0)} = -\tilde{S}_y^{(1)} = \frac{\tilde{M}l}{4};$$

$$\tilde{I}_z^{(0)} = \tilde{I}_z^{(1)} = \tilde{M} \left(\frac{l^2}{12} + \frac{J_z}{F} \right),$$

где J_z , F – геометрический момент инерции сечения и его площадь. Из этих величины формируются матрицы $\tilde{M}_{0,1}$, $\tilde{S}_{0,1}$, которые по виду аналогичны матрицам $M_{0,1}$, $S_{0,1}$.

Для рассмотренного варианта метода сосредоточенных масс вариация работы инерционных сил определяется выражением (75), где матрицы массовых характеристик даются формулами (79).

2.6. Вариация работы внешних сил.

Обозначим компоненты внешней погонной силы через p_x , p_y и через p_μ внешний погонный момент. Будем также считать, что в узлах $k=0,1$ элемента действуют сосредоточенные силы с компонентами $Q_X^{(k)}$, $Q_Y^{(k)}$ и моменты $Q_M^{(k)}$. Введем вектор узловых силовых факторов $Q_* = (Q_X^{(0)}, Q_Y^{(0)}, Q_M^{(0)}, Q_M^{(1)}, Q_X^{(1)}, Q_Y^{(1)})^T$. Тогда вариация работы внешних сил

$$\delta A_p = Q_*^T \delta q + \int_0^l [p_x \delta X + p_y \delta Y + p_\mu \delta(\beta + \theta)] dx,$$

или, с учётом (68), (69),

$$\delta A_p = Q^T \delta q. \quad (80)$$

$$\text{где } Q = Q_* + \int_0^l \left\{ [p_x(x) \mathbf{A} + p_y(x) \mathbf{B}] \boldsymbol{\psi}(x) + p_\mu(x) \mathbf{C} \boldsymbol{\varphi}(x) \right\} dx \quad (81)$$

– вектор обобщенных сил.

Если считать, что погонная нагрузка распределяется по длине элемента линейно, т.е. $p_s = p_s^{(0)} + (p_s^{(1)} - p_s^{(0)}) \xi$ ($s = x, y, \mu$; $\xi = x/l$), тогда после интегрирования вместо (81) имеем

$$Q = Q_* + \mathbf{A} \left[p_x^{(0)} \boldsymbol{\Psi}_1 + \frac{1}{l} (p_x^{(1)} - p_x^{(0)}) \boldsymbol{\Psi}_2 \right] + \quad (82)$$

$$+ \mathbf{B} \left[p_y^{(0)} \boldsymbol{\Psi}_1 + \frac{1}{l} (p_y^{(1)} - p_y^{(0)}) \boldsymbol{\Psi}_2 \right] + \mathbf{C} \left[p_\mu^{(0)} \mathbf{Z}_1 + \frac{1}{l} (p_\mu^{(1)} - p_\mu^{(0)}) \mathbf{Z}_2 \right],$$

где $\boldsymbol{\Psi}_1, \boldsymbol{\Psi}_2, \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2$ – первые и вторые столбцы матриц $\boldsymbol{\Psi}, \mathbf{Z}$.

2.7. Уравнения движения.

Пронумеруем конечные элементы от 1 до N и обозначим через $q^{(k)}$ вектор обобщенных координат k -го элемента (29). Тогда вариационное уравнение (2) для k -го элемента можно записать в виде

$$\left(\ddot{q}^{(k)T} \mathcal{M}^{(k)} - \mathcal{F}^{(k)} \right) \delta q^{(k)} = 0. \quad (83)$$

Здесь: $\mathcal{M}^{(k)} = \mathbf{M}_b^{(k)} + \mathbf{M}^{(k)}$ – матрица масс k -го элемента, где $\mathbf{M}_b^{(k)}$ – матрица присоединённых масс в виде (76), $\mathbf{M}^{(k)}$ – матрица массы собственно стержневого элемента в виде

$$\mathbf{M}^{(k)} = m \left[\mathbf{A} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{A}^T + \mathbf{B} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{B}^T - y_c (\mathbf{C} \mathbf{Z} \mathbf{A}^T + \mathbf{A} \mathbf{Z}^T \mathbf{C}^T) \right] + I_z \mathbf{C} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{C}^T; \quad (84)$$

вектор-столбец

$$\mathcal{F}^{(k)} = -\dot{q}^T \left\{ m \left[\dot{\mathbf{A}} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{A}^T + \dot{\mathbf{B}} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{B}^T - y_c (\dot{\mathbf{C}} \mathbf{Z} \mathbf{A}^T + \dot{\mathbf{A}} \mathbf{Z}^T \mathbf{C}^T + \mathbf{C} \dot{\boldsymbol{\Phi}} \mathbf{B}^T) \right] + \right. \quad (85)$$

$$\left. + I_z \dot{\mathbf{C}} \boldsymbol{\Phi} \mathbf{C}^T \right\} - \frac{\partial U}{\partial q} + Q$$

представляет собой сумму нелинейных инерционных сил, нелинейных сил упругости и обобщенных внешних сил. Правые части (84) и (85) зависят от номера элемента, который как индекс для упрощения записи опущен.

Для системы элементов, образующих конструкцию, имеем

$$\sum_{k=1}^N \left(\ddot{\mathbf{q}}^{(k)T} \mathcal{M}^{(k)} - \mathbf{F}^{(k)} \right) \delta \mathbf{q}^{(k)} = 0. \quad (86)$$

Группировка множителей при одинаковых вариациях обобщенных координат (ассемблирование) позволяет переписать (86) в виде

$$\left(\ddot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} - \mathbf{F}^T \right) \delta \mathbf{q} = 0, \quad (87)$$

где $\mathbf{q} = \left(\dots X^{(i)}, Y^{(i)}, \alpha_0^{(i)}, \alpha_1^{(i)} \dots \right)^T$ – вектор-столбец всех обобщенных координат задачи, где индекс i – порядковый номер узла конечно-элементной сетки стержневой системы; \mathcal{M} – матрица масс системы; \mathbf{F} – суммарный вектор-столбец силовых факторов системы, соответствующих обобщенным координатам.

Рассмотрим далее случай последовательного соединения стержневых элементов, когда k -му элементу сопоставляются узлы с номерами k и $k+1$.

Вектор-столбец $\mathbf{q}^{(k)}$ (29) представим в виде: $\mathbf{q}^{(k)} = \left(\mathbf{r}^{(k)T}, \boldsymbol{\alpha}^{(k)T}, \mathbf{r}^{(k+1)T} \right)^T$, где $\mathbf{r}^{(k)} = \left(X_0^{(k)}, Y_0^{(k)} \right)^T$, $\boldsymbol{\alpha}^{(k)} = \left(\alpha_0^{(k)}, \alpha_1^{(k)} \right)^T$, $\mathbf{r}^{(k+1)} = \left(X_1^{(k)}, Y_1^{(k)} \right)^T$. Соответственно такому разбиению элементную матрицу масс $\mathcal{M}^{(k)}$ и вектор-столбец $\mathbf{F}^{(k)}$ представим в блочной форме $\mathcal{M}^{(k)} = \left\| \mathcal{M}_{ij}^{(k)} \right\|$, $\mathbf{F}^{(k)} = \left\| \mathbf{F}_i^{(k)} \right\|$; $i, j = 1, 2, 3$. Это позволяет переписать уравнение (86) в виде

$$\begin{aligned} & \left(\dot{\mathbf{r}}^{(1)T} \mathcal{M}_{11}^{(1)} + \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^{(1)T} \mathcal{M}_{12}^{(1)} + \dot{\mathbf{r}}^{(2)T} \mathcal{M}_{13}^{(1)} + \mathbf{F}_1^{(1)} \right) \delta \mathbf{r}^{(1)} + \\ & + \sum_{k=2}^N \left\{ \left[\dot{\mathbf{r}}^{(k-1)T} \mathcal{M}_{13}^{(k-1)} + \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^{(k-1)T} \mathcal{M}_{23}^{(k-1)} + \dot{\mathbf{r}}^{(k)T} \left(\mathcal{M}_{33}^{(k-1)} + \mathcal{M}_{11}^{(k)} \right) + \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)T} \mathcal{M}_{12}^{(k)} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \dot{\mathbf{r}}^{(k+1)T} \mathcal{M}_{13}^{(k)} + \left(\mathbf{F}_3^{(k-1)} + \mathbf{F}_1^{(k)} \right) \right] \delta \mathbf{r}^{(k)} + \right. \\ & \quad \left. + \left[\dot{\mathbf{r}}^{(k)T} \mathcal{M}_{12}^{(k)} + \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^{(k)T} \mathcal{M}_{22}^{(k)} + \dot{\mathbf{r}}^{(k+1)T} \mathcal{M}_{23}^{(k)} + \mathbf{F}_2^{(k)} \right] \delta \boldsymbol{\alpha}^{(k)} \right\} + \\ & + \left(\dot{\mathbf{r}}^{(N)T} \mathcal{M}_{13}^{(N)} + \ddot{\boldsymbol{\alpha}}^{(N)T} \mathcal{M}_{23}^{(N)} + \dot{\mathbf{r}}^{(N+1)T} \mathcal{M}_{33}^{(N)} + \mathbf{F}_3^{(N)} \right) \delta \mathbf{r}^{(N+1)} = 0, \end{aligned} \quad (88)$$

откуда видна структура \mathcal{M} – матрицы масс системы, которая образуется матричными блоками

$$\mathcal{B}^{(k)} = \begin{pmatrix} \mathcal{M}_{13}^{(k-1)} & \mathcal{M}_{23}^{(k-1)} & \mathcal{M}_{33}^{(k-1)} + \mathcal{M}_{11}^{(k)} & \mathcal{M}_{12}^{(k)} & \mathcal{M}_{13}^{(k)} \\ 0 & 0 & \mathcal{M}_{12}^{(k)} & \mathcal{M}_{22}^{(k)} & \mathcal{M}_{23}^{(k)} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{M}_{33}^{(k-1)} + \mathcal{M}_{11}^{(k)}$, $\mathcal{M}_{22}^{(k)}$ являются диагональными блоками \mathcal{M} .

Будем считать, что стержневые элементы последовательно соединяются посредством шарниров, которые создают упругое сопротивление изменению углов между осями соседних элементов. Рассмотрим сочленение стержневых элементов с номерами $k-1$ и k . Пусть $\varpi^{(k)}$ – угол установки нейтрального положения пружины, а $\kappa^{(k)}$ – её жесткость. Потенциальная энергия всех пружин $U_* = 1/2 \sum_{k=2}^N \kappa^{(k)} \left(\alpha_0^{(k)} - \alpha_1^{(k-1)} - \varpi^{(k)} \right)^2$. Тогда вариация

$$\delta U_* = \sum_{k=2}^N \kappa^{(k)} (\alpha_0^{(k)} - \alpha_1^{(k-1)} - \varpi^{(k)}) (\delta \alpha_0^{(k)} - \delta \alpha_1^{(k-1)}) = (\partial U_* / \partial \mathbf{q})^T \delta \mathbf{q}. \quad (89)$$

Из (89) видно, что элементами вектор-столбца $(\partial U_* / \partial \mathbf{q})^T$ с номерами $4 + 12(k-1)$, $9 + 12(k-1)$ являются соответственно величины $-M_*^{(k)}$ и $M_*^{(k)}$, где $M_*^{(k)} = \kappa^{(k)} (\alpha_0^{(k)} - \alpha_1^{(k-1)} - \varpi^{(k)})$ представляет собой упругий момент в шарнире k -го узла. Остальные – нулевые.

Аналогичным образом можно учесть силы демпфирования в шарнирных соединениях. В случае вязкого демпфирования вариация их работы равна

$$\delta A_* = - \sum_{k=2}^N \nu^{(k)} (\dot{\alpha}_0^{(k)} - \dot{\alpha}_1^{(k-1)}) (\delta \alpha_0^{(k)} - \delta \alpha_1^{(k-1)}) = -\mathbf{Q}_*^T \delta \mathbf{q}, \quad (90)$$

где вектор-столбец \mathbf{Q}_* формируется аналогично $(\partial U_* / \partial \mathbf{q})^T$.

На основании (89), (90) величины U и \mathbf{Q} в правой части выражения для $\mathcal{F}^{(k)}$ (85) следует заменить на $U^\Sigma = U + U_*$ и $\mathbf{Q}^\Sigma = \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_*$.

Вариации обобщенных координат задачи q_i ($i=1, \dots, n$) не являются свободными, поскольку на них наложены кинематические связи в виде (10). Запишем их в матричной форме

$$\mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{d}, \quad (91)$$

где $\mathbf{D} = \|D_{ij}\|_{m \times n}$, $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)^T$, $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)^T$; $n > m$.

Тогда, синхронное варьирование условий (91) приводит к дополнительным кинематическим связям между вариациями обобщенных координат в виде

$$\mathbf{D} \delta \mathbf{q} = 0. \quad (92)$$

Для учёта (92) в уравнениях движения введём неопределённые множители Лагранжа. Считая первые $n - m$ элементов вектор-столбца \mathbf{q} независимыми, представим его в виде

$$\mathbf{q}^T = (\mathbf{q}_{n-m}^T, \mathbf{q}_m^T), \quad (93)$$

где $\mathbf{q}_{n-m}^T = (q_1, q_2, \dots, q_{n-m})$, $\mathbf{q}_m^T = (q_{n-m+1}, q_{n-m+2}, \dots, q_n)$. В соответствии с таким разбиением матрицу \mathbf{D} запишем как

$$\mathbf{D} = (\mathbf{D}_{n-m}, \mathbf{D}_m), \quad (94)$$

$$\text{где } \mathbf{D}_{n-m} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1,n-m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{m1} & D_{m2} & \cdots & D_{m,n-m} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D}_m = \begin{pmatrix} D_{1,n-m+1} & D_{1,n-m+2} & \cdots & D_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{m,n-m+1} & D_{m,n-m+2} & \cdots & D_{mn} \end{pmatrix}. \quad (95)$$

представляют собой матричные блоки размерности $m \times (n - m)$ и $m \times m$ соответственно.

Аналогично разбиению (93) вектор-столбец $\mathcal{M} \ddot{\mathbf{q}} - \mathcal{F}$ в (96) представим в виде

$$\ddot{\mathbf{q}}^T \mathcal{M} - \mathcal{F}^T = \mathcal{L}^T = (\mathcal{L}_{n-m}^T, \mathcal{L}_m^T). \quad (96)$$

Преобразуем теперь (87), используя обозначения (93), (94), (96) и добавляя к левой части (87) левую часть (92), умноженную слева на вектор неопределённых множителей Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}^T = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$. В результате вместо (87) имеем

$$[\mathcal{L}_{n-m}^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{D}_{n-m}] \delta \mathbf{q}_{n-m} + [\mathcal{L}_m^T + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{D}_m] \delta \mathbf{q}_m = 0. \quad (97)$$

Множители Лагранжа – элементы λ , определим из условия $\mathcal{L}_m^T + \lambda^T D_m = 0$, откуда имеем $\lambda = -(D_m^T)^{-1} \mathcal{L}_m$. Подстановка этого выражения в (97) приводит к равенству $\mathcal{L}_{n-m} - (D_m^T)^{-1} \mathcal{L}_m = 0$ или

$$(\mathbf{E}_m, \mathbf{0}_{n-m}) \mathcal{L} + \left(\mathbf{0}_m, -D_{n-m}^T (D_m^T)^{-1} \right) \mathcal{L} = \mathcal{T} (\mathcal{M}\ddot{\mathbf{q}} - \mathcal{F}) = 0, \quad (98)$$

где \mathbf{E}_m , $\mathbf{0}_m$ – единичная и нулевая матрицы размерности $m \times m$, \mathcal{T} – матрица преобразования размерности $m \times n$ вида

$$\mathcal{T} = \left(\mathbf{E}_m, -D_{n-m}^T (D_m^T)^{-1} \right).$$

Систему (98) необходимо дополнить матричным уравнением связей (91) и интегрировать по времени совместно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показан способ получения конечно-элементных уравнений движения гибкой стержневой систем со связями на основе вариационного принципа Даламбера-Лагранжа. В этих уравнениях максимально полно учтены слагаемые, учитывающие нелинейный характер упругого деформирования, осреднённых сдвиг, а также нелинейности инерционных сил. Для упрощения записей рассмотрена плоская задача динамики для механической системы, элементы которой представляют собой стержни с сосредоточенными массами, соединенные друг с другом посредством шарниров. Считается, что в шарнирах существуют связи, которые математически записываются в виде дополнительных линейных дифференциальных уравнений относительно обобщенных координат задачи. Такая формулировка позволяет в общей форме описать динамику гибких стержневых систем с учётом изменения её геометрии в результате не только деформирования стержневых элементов, но и изменения углов их соединения в шарнирах по предписанным законам управления. В последующих статьях предполагается представить результаты сравнительных исследований на основе численного интегрирования уравнений движения в различных формах записи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Danilin A.N., Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N., Buzlaev D.V. *Dynamics of a space vehicle with elastic deploying tether* // Comput. & Structures. – 1999. – Vol.72. – No.1-3. – Pp.141-147.
2. Гуляев В.И., Завражина Т.В. *Динамика робота-манипулятора с упругоподатливыми звеньями и приводными механизмами* // Изв. РАН. МТТ. – 2003. – №6. – С.18-30.
3. Данилин А.Н., Кузнецов Е.Б., Шалашилин В.И. *О неявных алгоритмах интегрирования задачи Коши для параметризованных уравнений, описывающих динамическое поведение механических систем* // ПММ. – 2003. – Т.67. – Вып.6. – С.1051-1069.
4. Steindl A., Troger H. *Optimal control of deployment of tethered subsatellite* // Nonlinear Dyn. – 2003. – Vol.31. – No.3. – Pp.257-274.

5. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Dynamics of plane motion of a body with a system of flexible inextensible rods connected in series by elastoviscous joints at large angles of rotation* // Mech. Solids. – 2011. – Vol.46. – No.2. – Pp.248-255.
6. Folkman S.L., Rowsell E.A., Ferney G.D. *Gravity effects on damping of a truss using pinned joints* // Dynamics Specialists Conference «Structures, Structural Dynamics and Materials», AIAA-94-1685-CP. – Hilton Head, SC, U.S.A., 1994. – Pp.131-140.
7. Folkman S.L., Ferney G.D., Rowsell E.A. *Influence of pinned joints on damping and dynamic behavior of a truss* // J. of Guidance Control and Dynamics. 1995. – Vol.18. – No.6. – Pp.1398-1403.
8. Ferri A.A. *Modeling and analysis of nonlinear sleeve joints of large space structures* // J. of Spacecraft and Rockets. – 1988. – Vol.25. – No.5. – Pp.354-360.
9. Ibrahimbegovic A., Taylor R.L. *On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations* // Computer methods in applied mechanics and engineering. – 2002. – Vol.191. – Pp.5159-5176.
10. Williams P. *Deployment/retrieval optimization for flexible tethered satellite systems* // Nonlinear dynamics. – 2008. – Vol.52. – Iss.1. – Pp.159-179.
11. Shon S., Lee S., Ha J., and Cho C. *Semi-analytic solution and stability of a space truss using a high-order Taylor series method* // Materials. – 2015. – Vol.8. – Pp.2400-2414.
12. Cao D.Q., Tucker R.W. *Nonlinear dynamics of elastic rods using the Cosserat theory: Modelling and simulation* // Int. J. of Solids and Structures. – 2008. – Vol.45. – Iss.2. – Pp.460-477.
13. Akour S.N. *Dynamics of nonlinear beam on elastic foundation* // World Congress on Engineering (WCE 2010). Proceedings. – U.K., London, 2010. – Vol.II. – Pp.1427-1433.
14. Lenci S., Clementi F., Warminski J. *Nonlinear dynamics of a two-layer composite beam with nonlinear interface with different boundary conditions* // 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI). 5th European Conference on Computational Mechanics (ECCM V). 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI). – Spain, Barcelona, July 20-25, 2014.
15. Chen R., Wu T. *Vibration reduction in a periodic truss beam carrying locally resonant oscillators* // J. of Vibration and Control. – 2016. – Vol.22. – No.1. – Pp.270-285.
16. Li F.M., Wu Z.J., Liu R.Q. *Study on the dynamics problems of truss structure with joints* // J. of Astronautics. – 2012. – Vol.33. – No.5. – Pp.556-561.
17. Donea J., Huerta A., Ponthot J.-Ph., Rodriguez-Ferran A. *Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods. Encyclopedia of computational mechanics.* – New York: Wiley, 2004. – Pp. 413-437.
18. Reddy J.N. *An introduction to nonlinear finite analysis.* – Oxford: Oxford Univ. Press, 2004.
19. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. *Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек.* Серия «Механика твердых деформируемых тел». Т.5. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с.
20. Зенкевич О. *Метод конечных элементов в технике.* – М.: Мир, 1975. – 541 с.
21. Лурье А.И. *Аналитическая механика.* – М.: Физматгиз, 1961. – 824 с.

REFERENCES

1. Danilin A.N., Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N., Buzlaev D.V. *Dynamics of a space vehicle with elastic deploying tether*. Comput. & Structures, 1999, Vol.72, No.1-3, Pp.141-147.
2. Guliaev V.I., Zavrazhina T.V. *Dinamika robota-manipulatora s uprugopodativnymi zven'iami i privodnymi mekhanizmami*. Izvestia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2003, No.6, Pp.18-30.
3. Danilin A.N., Kuznetsov E.B., Shalashilin V.I. *Implicit algorithms for solving the cauchy problem for the equations of the dynamics of mechanical systems*. J. of applied mathematics and mechanics, 2003, Vol.67, Iss.6, Pp.921-935.
4. Steindl A., Troger H. *Optimal control of deployment of tethered subsatellite*. Nonlinear Dyn., 2003, V.31, № 3, Pp.257-274.
5. Grishanina T.V., Shklyarchuk F.N. *Dynamics of plane motion of a body with a system of flexible inextensible rods connected in series by elastoviscous joints at large angles of rotation*. Mech. Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.248-255.
6. Folkman S.L., Rowsell E.A., Ferney G.D. *Gravity effects on damping of a truss using pinned joints*. Dynamics Specialists Conference «Structures, Structural Dynamics and Materials», AIAA-94-1685-CP. Hilton Head, SC, U.S.A., 1994, Pp.131-140.
7. Folkman S.L., Ferney G.D., Rowsell E.A. *Influence of pinned joints on damping and dynamic behavior of a truss*. J. of Guidance Control and Dynamics, 1995, Vol.18, No.6, Pp.1398-1403.
8. Ferri A.A. *Modeling and analysis of nonlinear sleeve joints of large space structures*. J. of Spacecraft and Rockets, 1988, Vol.25, No.5, Pp.354-360.
9. Ibrahimbegovic A., Taylor R.L. *On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations*. Computer methods in applied mechanics and engineering. 2002, Vol.191, Pp.5159-5176.
10. Williams P. *Deployment/retrieval optimization for flexible tethered satellite systems*. Nonlinear dynamics, 2008, Vol.52, Iss.1, Pp.159-179.
11. Shon S., Lee S., Ha J., and Cho C. *Semi-analytic solution and stability of a space truss using a high-order Taylor series method*. Materials, 2015, Vol.8, Pp.2400-2414.
12. Cao D.Q., Tucker R.W. *Nonlinear dynamics of elastic rods using the Cosserat theory: Modelling and simulation*. Int. J. of Solids and Structures, 2008, Vol.45, Iss.2, Pp.460-477.
13. Akour S.N. *Dynamics of Nonlinear Beam on Elastic Foundation*. World Congress on Engineering (WCE 2010), Proceedings, U.K., London, Vol.II, Pp.1427-1433.
14. Lenci S., Clementi F., Warminski J. *Nonlinear dynamics of a two-layer composite beam with nonlinear interface with different boundary conditions*. 11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI). July 20-25, 2014, Barcelona, Spain.
15. Chen R., Wu T. *Vibration reduction in a periodic truss beam carrying locally resonant oscillators*. J. of Vibration and Control, 2016, Vol.22, No.1, Pp.270-285.
16. Li F.M., Wu Z.J., Liu R.Q. *Study on the dynamics problems of truss structure with joints*. J. of Astronautics, 2012, Vol.33, No.5, Pp.556-561.
17. Donea J., Huerta A., Ponthot J.-Ph., Rodriguez-Ferran A. *Arbitrary Lagrangian-Eulerian methods*. Encyclopedia of computational mechanics. – New York: Wiley, 2004, Pp.413-437.

18. Reddy J.N. *An introduction to nonlinear finite analysis*. – Oxford: Oxford Univ. Press, 2004.
19. Grigoliuk E.I., Selezov I.T. *Neklassicheskie teorii kolebanii sterzhnei, plastin i obolochek*. Seriya «Mekhanika tverdykh deformiruemykh tel». Vol.5. – Moskva: VINITI, 1973, 272 p.
20. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tekhnike*. – Moskva: Mir, 1975, 541 s.
21. Lur'e A.I. *Analiticheskaja mekhanika*. – M.: Fizmatgiz, 1961, 824 p.

Поступила в редакцию 5 сентября 2016 года.

Сведения об авторе:

Данилин Александр Николаевич – д.ф.-м.н., проф., зам.дир. по научной работе, ФГБУН
Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: andanilin@yandex.ru