

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАССЛОЕНИЯ БИМАТЕРИАЛА С РАЗЛИЧНЫМИ УПРУГИМИ СВОЙСТВАМИ ПРИ НОРМАЛЬНОМ ОТРЫВЕ*

Астапов Н.С.^{1,2}, Кургузов В.Д.¹

¹*ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,
г. Новосибирск, Россия*

²*Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия*

АННОТАЦИЯ

Исследуется прочность структурированного биматериала с внутренней трещиной, расположенной в плоскости раздела сред, при нагружении по первой моде. Для аналитического исследования процесса разрушения применяется модифицированная модель Леонова-Панасюка-Дагдейла с использованием подхода Нейбера-Новожилова. Предлагаемая модифицированная модель использует дополнительный параметр – поперечник зоны пластичности (ширину зоны предразрушения) более слабого материала. Анализируются случаи, когда упругие характеристики и пределы текучести материалов различаются. Процесс разрушения такого композита описывается с помощью эквивалентного коэффициента интенсивности напряжений (модуля КИН), учитывающего существенную разнородность материалов. Получены формулы, в которых учтены конечные размеры образцов, для критической разрушающей нагрузки при нормальном отрыве и критической длины зоны предразрушения разнородного биматериала в условиях плоской деформации и плоского напряженного состояния.

Выполнено численное моделирование распространения зон пластичности в квадратной биметаллической пластине с внутренней центральной трещиной при квазистатическом нагружении. В численной модели использована текущая лагранжева формулировка уравнений механики деформируемого твердого тела, наиболее предпочтительная для моделирования деформирования тел из упругопластического материала при больших деформациях. Методом конечных элементов получена пластическая зона в окрестности вершины трещины. Показано, что форма пластической зоны в биметалле существенно отличается от таковой в однородной среде.

Проведено сравнение результатов аналитического и численного моделирования квазивязкого разрушения биматериала при плоской деформации. Таким образом, подтверждено приемлемое прогнозирование аналитической моделью длины зоны предразрушения и критической разрушающей нагрузки для любых длин трещин.

Ключевые слова: J-интеграл; критерии разрушения; коэффициент интенсивности напряжений; I-мода; квазивязкое разрушение

MODELING THE DELAMINATION OF A BI-MATERIAL WITH DIFFERENT ELASTIC CONSTANTS UNDER NORMAL RUPTURE

Astapov N.S.^{1,2}, Kurguzov V.D.¹

¹*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 14-08-00113, 16-08-00483).

ABSTRACT

The strength of a structured bi-material with an interface crack is investigated. The bi-material is loaded in mode I. For analytical examination of fracture process, the modified Leonov-Panasyuk-Dugdale model is applied together with the Neuber-Novozhilov approach. This model makes use of the supplementary parameter such as the plasticity (pre-fracture) zone width of the weak material. Some cases with a variation of elastic properties and yield stresses across the interface are analyzed. The fracture of such a composite is described by an equivalent stress intensity factor (absolute value of SIF), which accounts for the essential difference between both materials. Some expressions for the critical fracture loading under normal rupture and the critical length of the pre-fracture zone in the bi-material are obtained, both for plane stress and plane strain. These expressions account for the finite size of the samples.

The spreading of plastic zones in square plates made of bimetal with internal crack is simulated numerically for quasi-static loading. In the numerical model, the Lagrangian formulation of the solid mechanics is used, as the most preferable formulation, concerning the modeling of finite strain elasto-plasticity of solids. Applying the finite element method, the plasticity zone in the vicinity of crack tip has been calculated. It has been shown that the shape of a plastic zone in bi-metal differs from that in a homogenous medium.

Some results of the numerical and analytical computations are compared for a quasi-ductile fracture of the bi-material. Thus, the analytical model is shown to provide a good prediction for the length of the pre-fracture zone and the critical fracture loading for any cracks.

Keywords: J-integral; fracture criteria; the stress intensity factor; I-mode; quasi-ductile destruction

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы построения простых, пригодных для инженерных расчетов, аналитических моделей процесса разрушения композитов являются актуальными [1-7]. Весьма актуальной является и задача о трещине, лежащей на границе раздела двух упругих разнородных сред [1,6]. Решение такой задачи сталкивается с определенными трудностями, связанными с осциллирующими на концах трещины напряжениями и перемещениями [8,9]. Было показано [8-11], что полученное решение задачи о трещине нормального отрыва «с физической точки зрения неприемлемо, так как из него следовало бы, что верхний и нижний края трещины в окрестности ее конца изгибаются и перекрываются» [10]. Однако «во всех практических случаях можно пренебречь явлением осцилляции» [11], так как «нерегулярности решения сконцентрированы в весьма малых областях вблизи концов трещины» [10]. В работе [10] было сделано предположение, подтвержденное в работе [2], что вероятной причиной осцилляций полученного решения «могло явиться как рассмотрение идеализированной физической модели, так и использование классической линейной теории упругости».

В работе [8] отмечено, что «Для трещин, распространяющихся по поверхности склейки между различными материалами, характерно также и то обстоятельство, что при действии чистого растяжения поперек трещины или чистого сдвига вдоль трещины на продолжении трещины в сплошном теле в том и другом случае будут возникать как касательные, так и нормальные напряжения». Поэтому в работе [12] показано, что при построении критерия разрушения для разнородного биматериала в этом случае необходимо учитывать два коэффициента интенсивности напряжений K_I и K_{II} в отличие от однородного материала, когда учитывается только один КИН. Однако

в предложенные в [12] выражения для коэффициентов K_I и K_{II} входит логарифм размерной величины – длины, поэтому их использование приводит к абсурдным результатам и в справочнике [13, стр.321] предлагается использовать J-интеграл Райса [14] (точнее, Г-интеграл Черепанова [15]). При расчетах на прочность конструкций в условиях упругопластической деформации J-интеграл часто применяется как параметр разрушения [7].

Настоящая работа является естественным продолжением и обобщением работ [16,17] по исследованию распространения трещины в композите в рамках модифицированной модели Леонова-Панасюка-Дагдейла [18,19]. В работах [16,17] предполагалось, что материалы, составляющие биматериал, отличаются только пределами текучести, а модули Юнга и коэффициенты Пуассона материалов совпадают. Ниже для возможности описания в рамках модифицированной модели разрушения разнородного биматериала вводится с помощью J-интеграла понятие эквивалентного коэффициента интенсивности напряжений K_E , учитывающего вклад коэффициентов K_I и K_{II} для трещины нормального отрыва и поперечного сдвига. Аналитически получены формулы для критической нагрузки разрушения по I-ой моде разнородного биматериала, учитывающие конечные размеры образцов, составленных из материалов, отличающихся модулями Юнга, пределами текучести и коэффициентами Пуассона.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть в составной кусочно-однородной структурированной биметаллической квадратной пластине размером $L \times L$ на плоской границе раздела двух сред имеется центральная внутренняя трещина длины $2l_0$. На краях пластины заданы растягивающие напряжения σ_∞ , то есть реализуется первая мода разрушения. В обозначениях рис.1 для материалов 1 и 2, составляющих композит, предполагается, что модули сдвига материалов равны μ_i , коэффициенты Пуассона равны ν_i , пределы текучести равны σ_{Yi} и характерные линейные размеры структуры материалов равны r_i , $i=1,2$. Построим модель для описания расслоения биматериала, предполагая, что трещина при продвижении не меняет свое первоначальное прямолинейное направление.

В предлагаемой модели распространения трещины использована простейшая аппроксимация двухзвенной ломаной классических $\sigma - \varepsilon$ (напряжение-деформация) диаграмм материалов. Эта аппроксимация подробно описана в работе [16] (см. также рис.4а настоящей работы). Существенными параметрами этой аппроксимации являются параметры ε_{0i} – максимальное упругое относительное удлинение и ε_{1i} – максимальное относительное удлинение. В дальнейшем для упрощения обозначений введем параметры $\chi_i = (\varepsilon_{1i} - \varepsilon_{0i}) / \varepsilon_{0i}$, которые можно назвать показателями пластичности материалов при растяжении.

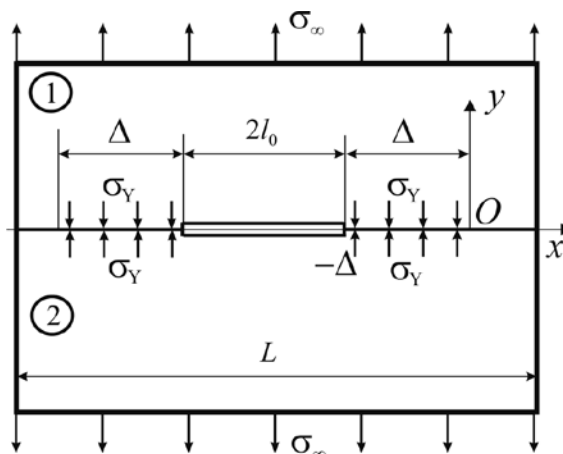


Рис.1. Трещина на границе раздела сред.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ

Кроме реальной внутренней прямолинейной трещины-разреза длиной $2l_0$ введем в рассмотрение модельную трещину-разрез длиной $2l = 2l_0 + 2\Delta$, где Δ – длина зон предразрушения, расположенных на продолжении реальной трещины (рис.1). На рис.2 изображена зона предразрушения на продолжении правого кончика реальной трещины (точка 2, обведенная кружком) в однородном материале. Начало O системы координат Oxy совпадает с концом модельной трещины, а конец реальной трещины имеет абсциссу $x = -\Delta$ (рис.2). Ось ординат Oy перпендикулярна плоскости распространения трещины.

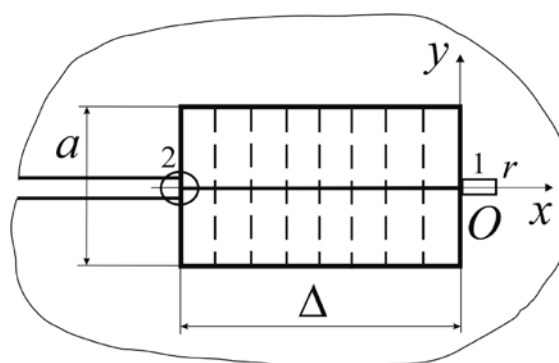


Рис.2. Зона предразрушения однородного материала.

Для построения модели расслоения биматериала при нормальном отрыве предлагается использовать интегральный критерий разрушения для однородного материала [16-19]

$$\frac{1}{r} \int_0^r \sigma(x,0) dx = \sigma_Y, \quad x \geq 0, \tag{1}$$

$$2v(-\Delta) = \delta^*, \tag{2}$$

Здесь $\sigma(x,0)$ – нормальное напряжение на продолжении трещины, σ_Y – предел текучести при растяжении, r – характерный линейный размер структуры материала, функция $v = v(x)$ – полураскрытие трещины. Через δ^* обозначено

критическое раскрытие модельной трещины для однородного материала; при этом раскрытии разрушается структура (волокно) материала в вершине реальной трещины (граничной точке зоны предразрушения, то есть в точке 2, обозначенной на рис.2 кружком). Длина зоны предразрушения составляет только часть длины зоны пластичности, если учесть длину промежутка осреднения r так, как изображено на рис.2.

Случай, когда $\mu = \mu_1 = \mu_2$, $\nu = \nu_1 = \nu_2$, $r = r_1 = r_2$, $\sigma_Y = \sigma_{Y1} < \sigma_{Y2}$.

Т.е. материалы отличаются только разными пределами текучести.

Для применения интегрального критерия (1), (2) к обработке результатов численных или лабораторных экспериментов с образцами конечных размеров используем аналитическое выражение нормального напряжения $\sigma(x, 0)$ на продолжении трещины в виде [19]

$$\sigma(x, 0) = K_I / \sqrt{2\pi x} + L\sigma_\infty / (L - 2l), \quad x \geq 0, \quad (3)$$

где L – ширина пластины (см. рис.1). В выражении (3) σ_∞ – напряжение, заданное на краях пластины; $K_I = K_{I\infty} + K_{I\Delta}$ – суммарный коэффициент интенсивности напряжений (КИН) в обобщенной модели Леонова-Панасюка-Дагдейла; $K_{I\infty}$ – КИН, порождаемый напряжением σ_∞ , $K_{I\infty} > 0$; $K_{I\Delta}$ – КИН, порождаемый напряжениями σ_Y , действующими в окрестности вершины модельной трещины в зоне предразрушения, $K_{I\Delta} < 0$. После интегрирования по промежутку, выделенному на рис.2 прямоугольником 1, уравнение (1) можно записать в виде

$$K_I = (\sigma_Y - L\sigma_\infty / (L - 2l)) \sqrt{\pi r / 2}. \quad (4)$$

Для полуоткрытия $v = v(x)$, $(-\Delta \leq x < 0)$ модельной трещины используем в (2) представление [20]

$$v(x) = \frac{k+1}{2\mu} K_I \sqrt{\frac{|x|}{2\pi}} + O(|x|), \quad K_I = K_{I\infty} + K_{I\Delta} > 0, \quad x \leq 0, \quad (5)$$

в котором учтем лишь первый член разложения. В выражении (5) $k = 3 - 4\nu$ для плоской деформации или $k = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ для плоского напряженного состояния, ν – коэффициент Пуассона; $\mu = E / (2(1 + \nu)) = \sigma_Y / (2\varepsilon_0(1 + \nu))$ – модуль сдвига материала, так как для идеального упругопластического материала $E = \sigma_Y / \varepsilon_0$, где ε_0 – максимальное упругое относительное удлинение [16]. Уравнение (2) с помощью представления (5) запишем в виде

$$\frac{k+1}{\mu} K_I \sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}} = \delta^*. \quad (6)$$

В равенствах (4) и (6) для КИН $K_{I\infty}$, обусловленного напряжением σ_∞ , для центральной внутренней трещины будем использовать аппроксимирующую формулу [21, с.171] $K_{I\infty} = Y\sigma_\infty\sqrt{\pi l}$, где $Y = \sqrt{\sec(\pi l / L)}$, учитывающую конечные размеры образца. Для КИН $K_{I\Delta}$, порождаемого постоянными напряжениями σ_Y , действующими согласно модели Леонова-Панасюка-Дагдейла в зоне предразрушения, выберем из справочника [21, с.41] выражение

$$K_{I\Delta} = -\sigma_Y \sqrt{\pi l} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{\Delta}{l} \right) \right]. \quad (7)$$

Критическое раскрытие δ^* берегов модельной трещины вычислим по формуле

$$\delta^* = (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) m_a a, \quad (8)$$

где a – поперечник зоны пластичности в вершине реальной трещины в однородном материале, вычисленный в рамках линейной механики разрушения на основании поля напряжений и критерия текучести Мизеса, m_a – поправочный коэффициент [17]. Так как предполагается, что в биматериале в условиях пластичности находится лишь один наиболее слабый материал, то в качестве поперечника зоны пластичности в биматериале приближенно выбирается полупоперечник зоны пластичности более слабого материала.

Конечно, границы реальных пластических зон в окрестности вершины трещины лишь приближенно похожи на конфигурации, изображенные в [3,20]. Очень часто трещина, расположенная на границе биматериала при нагружении продолжает расти вдоль границы раздела сред, причем пластическая зона приближенно имеет форму узкого вытянутого вдоль границы прямоугольника. Такую форму пластической зоны и преимущественное направление распространения трещины вдоль границы можно наблюдать и в численных и в лабораторных экспериментах [17]. В связи с этим в работе [17] для уточнения выражения поперечника зоны предразрушения введен поправочный коэффициент m_a в соотношение (8). Для определения величины этого коэффициента, видимо, необходимо использовать непосредственные данные численного или лабораторного эксперимента. Кроме того, для более точного предсказания аналитической моделью разрушающей нагрузки необходимо уточнить выражение (5) раскрытия модельной трещины, согласовав его с данными эксперимента. Поэтому введем поправочный коэффициент m_u в левую часть соотношения (6).

Теперь систему уравнений (4), (6), равносильную исходной системе уравнений (1), (2) при указанном выборе выражений для нормального напряжения $\sigma(x,0)$, полуоткрытия $v = v(x)$ и КИН, можно записать в виде

$$Y\sqrt{\pi l}\lambda - \sqrt{\pi l} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{\Delta}{l} \right) \right] - (1 - t\lambda)\beta = 0, \quad (9)$$

$$\left\{ Y\sqrt{\pi l}\lambda - \sqrt{\pi l} \left[1 - \frac{2}{\pi} \arcsin \left(1 - \frac{\Delta}{l} \right) \right] \right\} \sqrt{\Delta} - h\lambda^2 = 0, \quad (10)$$

где $\lambda = \sigma_\infty / \sigma_Y$ – безразмерная критическая нагрузка, $t = L / (L - 2l)$, $\beta = \sqrt{\pi r / 2}$, $h = \sqrt{2\pi} \chi m Y^2 l c / 64$ для биматериала, $m = m_a / m_u$. Величина $c = 5$ для плоского напряженного состояния и $c = (5 - 8\nu + 8\nu^2) / (1 - \nu^2)$ для плоской деформации, потому что для поперечника a зоны пластичности в биматериале выбирается $a = 5lY^2\lambda^2 / 8$ в условиях плоского напряженного состояния и $a = lY^2\lambda^2(5 - 8\nu + 8\nu^2) / 8$ в условиях плоской деформации [16,17]. Расчеты показывают, что для любого значения коэффициента Пуассона ν ($0 \leq \nu \leq 0,5$) для плоской деформации выполняется неравенство $3,6 \leq c \leq 5$, причем $c = 3,6$ при $\nu = 0,34$. Исключая выражение в фигурных скобках из системы уравнений (9), (10), находим точное выражение для критической длины зоны предразрушения

$$\sqrt{\Delta} = h\lambda^2 / (\beta(1-t\lambda)). \quad (11)$$

Используя приближение $\arcsin(1-\Delta/l) \approx \pi/2 - \sqrt{2\Delta/l}$, погрешность которого не превышает 6% при $0 \leq \Delta/l \leq 0,43$, запишем систему уравнений (9), (10) в приближенном виде

$$Y\sqrt{\pi l}\lambda - 2\sqrt{2\Delta/\pi} - (1-t\lambda)\beta \approx 0, \quad (12)$$

$$\{Y\sqrt{\pi l}\lambda - 2\sqrt{2\Delta/\pi}\}\sqrt{\Delta} - h\lambda^2 \approx 0. \quad (13)$$

Подставляя в (12) для $\sqrt{\Delta}$ выражение (11) найдем приближенное выражение критической разрушающей нагрузки $\lambda_{\pm} \approx 2\beta / (2\beta t + f \pm \sqrt{f^2 + 4gh})$, где $f = Y\sqrt{\pi l}$, $g = -2\sqrt{2/\pi}$. Возвращаясь к исходным переменным запишем эту формулу в виде

$$\lambda_{\pm} \approx 1 / \left(\frac{L}{L-2l} + \frac{Y}{2} \sqrt{\frac{2l}{r}} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\chi mc}{4\pi}} \right) \right), \quad (14)$$

Величина λ_{+} , когда перед корнем выбирается знак “+”, соответствует квазихрупкому разрушению [17]. Формула (14) предлагаемой модели имеет смысл, если $\chi \leq 4\pi/(mc)$ для биматериала и $\chi \leq 2\pi/(mc)$ для однородного материала (для однородного материала величина поперечника a и, следовательно, величина h выбирается в два раза больше, чем для биматериала). Учитывая диапазон изменения величины c , для величины χ показателя пластичности материала при $m=1$ находим, что для любого ν при плоском напряженном состоянии должно выполняться неравенство $\chi \leq 4\pi/3,6 \approx 3,5$ для биматериала.

Из приближенного уравнения (12) получим приближенное выражение

$$\sqrt{\Delta} \approx (\beta - \beta t\lambda - f\lambda) / g, \quad (15)$$

а из уравнения (13) получим выражение

$$\sqrt{\Delta_{\pm}} \approx \lambda \left(-f \pm \sqrt{f^2 + 4gh} \right) / (2g), \quad (16)$$

причем квазихрупкому типу разрушения соответствует $\sqrt{\Delta_{+}}$, когда в равенстве (16) перед корнем выбирается знак “+”. Интересно отметить, что, выбирая любое из приближенных выражений (15) или (16), получим из системы уравнений (12), (13) точно такое же выражение для критической разрушающей нагрузки, какое дается формулой (14). А исключая выражение в фигурных скобках из приближенной системы уравнений (12), (13), получим для критической длины Δ зоны предразрушения такое же выражение (11), какое получено из точной системы уравнений (9), (10). Напомним, что уравнения (9), (12) так же, как исходное уравнение (1) выполняются для любых нагрузок λ вблизи граничных точек зоны пластичности (см. прямоугольник 1 на рис.2). Поэтому для любых нагрузок λ справедлива и формула (15), которая является следствием равенства (12). Однако уравнения (10) и (13) так же, как уравнение (2), выполняются только для критических разрушающих нагрузок. Кроме того, приближенные выражения для полураскрытия $\nu(-\Delta)$ и критического раскрытия δ^* (см. уравнения (6), (8)) вносят дополнительную погрешность в уравнения (10),

(13), которые используются при выводе формул (11) и (16). Таким образом, получена формула (14) для критической разрушающей нагрузки и три разные формулы (11), (15), (16), выражающие критическую длину зоны предразрушения через критическую нагрузку. Результаты численного моделирования подтверждают применимость формулы (15) во всем диапазоне нагрузок.

Эти формулы получены для случая, когда материалы 1 и 2 композитной пластины отличаются только разными пределами текучести при растяжении, например, $\sigma_Y = \sigma_{Y1} < \sigma_{Y2}$, а модули сдвига материалов, коэффициенты Пуассона и характерные линейные размеры структуры материалов равны. Предполагается, что в таком биматериале в условиях пластичности находится лишь один наиболее слабый материал и в качестве поперечника зоны предразрушения в биматериале приближенно выбирается полупоперечник зоны предразрушения более слабого материала.

Случай, когда $\mu_1 \neq \mu_2$, $\nu_1 \neq \nu_2$, $r = r_1 \neq r_2$, $\sigma_Y = \sigma_{Y1} < \sigma_{Y2}$. Т.е. материалы 1 и 2, составляющие композит, различаются модулями сдвига, коэффициентами Пуассона и пределами текучести при растяжении. Введем понятие эквивалентного КИН, используя представление J-интеграла через комплексный коэффициент интенсивности напряжений $K = K_I - iK_{II}$ ([13], стр.323)

$$J = \frac{1}{16} \left[\frac{1+k_1}{\mu_1} + \frac{1+k_2}{\mu_2} \right] K \bar{K} = \frac{\pi^2}{2} \frac{b^2 - d^2}{b} (1+4\varepsilon^2) (\sigma^2 + \tau^2) l, \quad (17)$$

где $b = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{1+k_1}{\mu_1} + \frac{1+k_2}{\mu_2} \right]$, $d = \frac{1}{8\pi} \left[\frac{k_1-1}{\mu_1} - \frac{k_2-1}{\mu_2} \right]$, $\varepsilon = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b+d}{b-d}$, $k_j = 3 - 4\nu_j$ для плоской деформации, $k_j = (3 - \nu_j) / (1 + \nu_j)$ для плоского напряженного состояния.

Отметим, что в [13] это выражение приведено с опечаткой: пропущен еще один множитель π в правой части равенства (17), вместо π должно быть π^2 . Определим эквивалентный коэффициент интенсивности напряжений K_E с помощью равенства (17) следующим образом

$$K_E = \sqrt{K \bar{K}} = F \sqrt{\pi (\sigma^2 + \tau^2) l}, \quad F = \sqrt{\frac{b^2 - d^2}{b} (1+4\varepsilon^2)}. \quad (18)$$

Заметим, что если материалы 1 и 2 отличаются только разными пределами текучести при растяжении, а $\mu_1 = \mu_2$, $\nu_1 = \nu_2$ (и, следовательно, $E_1 = E_2$), то $F = 1$, $\tau = 0$, $K_E = \sigma \sqrt{\pi l} = K_I$, то есть эквивалентный КИН совпадает с K_I . На рис.3 представлены графики функции $F = F(E_1/E_2, \nu_1, \nu_2)$ для различных значений ν_1 и ν_2 при плоской деформации. Кривые 1, 2 и 3 построены для $\nu_1 = 0,2$ и $\nu_2 = 0,45, 0,3$ и $0,2$ соответственно. Кривые 4, 5 и 6 построены для $\nu_1 = 0,3$ и $\nu_2 = 0,45, 0,3$ и $0,2$ соответственно. Кривые 7, 8 и 9 построены для $\nu_1 = 0,45$ и $\nu_2 = 0,45, 0,3$ и $0,2$ соответственно. Графики показывают, что во всем диапазоне изменения величины E_1/E_2 значения множителя F отличаются от 1 меньше, чем на 4,5% для плоской деформации. Для плоского напряженного состояния это отличие меньше, чем на 5,1%. Поэтому и в случае существенно разнородных материалов можно считать выполненными с погрешностью до 5% соотношения (11), (14)-(16), что с инженерной точки зрения вполне приемлемо.

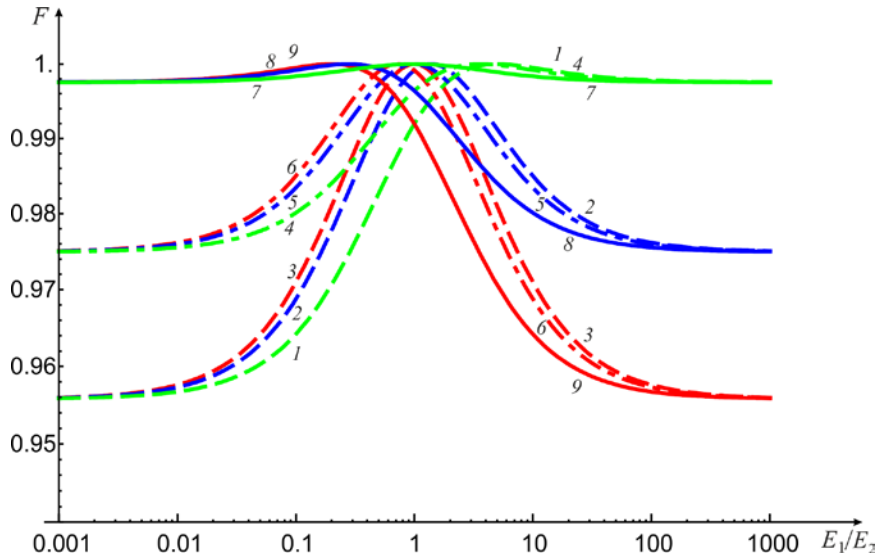


Рис.3. Зависимость множителя F , учитывающего разномодульность материалов, от модулей упругости и коэффициентов Пуассона.

Случай, когда $\mu_1 \neq \mu_2$, $\nu_1 \neq \nu_2$, $r = r_1 \neq r_2$, $\sigma_Y = \sigma_{Y1} = \sigma_{Y2}$. Т.е. материалы 1 и 2, составляющие композит, различаются модулями сдвига и коэффициентами Пуассона, но пределы текучести растяжении совпадают или почти совпадают. На рис.4 при $\sigma_{Y1} \approx \sigma_{Y2}$ представлена модельная $\sigma - \varepsilon$ диаграмма материала 1 (ломаная 1) и материала 2 (ломаная 2) и модель зоны предразрушения. В этом случае с помощью системы определяющих уравнений (14)-(15) находим критическую нагрузку отдельно в каждом материале и в качестве критической разрушающей нагрузки для композита выбираем наименьшую из этих двух нагрузок.

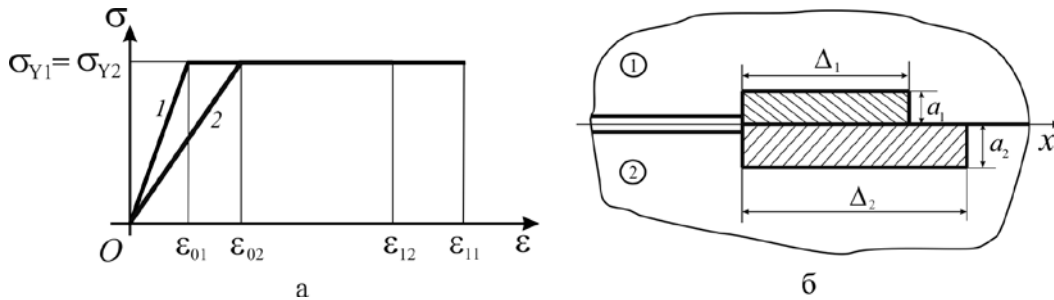


Рис.4. а) модельная $\sigma - \varepsilon$ диаграмма материалов 1 и 2; б) модель зоны предразрушения при $\sigma_{Y1} \approx \sigma_{Y2}$.

3. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Воспользуемся методом конечных элементов для численного моделирования реальной формы пластической зоны в окрестности вершины трещины, распространяющейся по границе раздела двух материалов. Рассмотрим биметаллическую квадратную пластину единичной толщины с центральной внутренней трещиной длиной $2l_0$, равной 10 мм, 20 мм и 40 мм в условиях плоского деформированного состояния, растягиваемую напряжениями σ_∞ , приложенными на кромке (рис.1). Геометрические размеры пластины:

$L = 100$ мм, высота $L = 100$ мм. Характеристики материалов пластины: $E_1 = 10E_2 = 200$ ГПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,25$, пределы текучести $\sigma_{Y1} = \sigma_{Y2} = 400$ МПа.

В пластине при нормальном отрыве в окрестности вершины трещины возникают большие пластические деформации. Техника численного моделирования пластических зон, возникающих при растяжении пластины с центральной трещиной, подробно изложена в работе [22]. Отметим здесь лишь существенные отличия.

Расчетная область разбивается неравномерной сеткой из 500000 четырехугольных элементов. В окрестности вершины трещины производилось сгущение сетки до размера 0,025 мм. Внешняя нагрузка σ_∞ возрастала по линейному закону от нуля до σ_{Y1} за время $T = 1$. Под временем в квазистатических задачах понимается некоторый монотонно возрастающий параметр нагружения.

Некоторые результаты расчетов представлены на рис.5,6, где показано распределение эквивалентных пластических деформаций $\varepsilon^p = \sqrt{2\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_{ij}^p} / 3$ (ε_{ij}^p – компоненты тензора пластических деформаций).

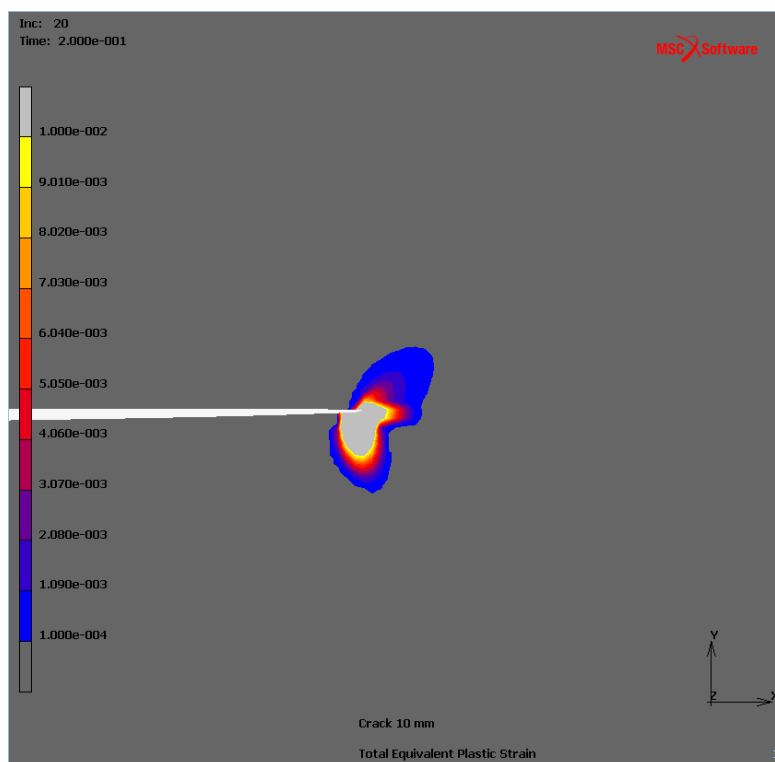


Рис.5. Пластическая зона перед вершиной трещины при нагрузке $\lambda = 0,2$.

На рис.5 и рис.6 показаны пластические зоны перед вершиной трещины длиной $2l_0 = 20$ в моменты времени, соответствующие уровню нагружения $\lambda = \sigma_\infty / \sigma_{Y1} = 0,2$ и $\lambda = \sigma_\infty / \sigma_{Y1} = 0,5$. Контурные полосы на рисунках ограничены диапазоном $10^{-4} \div 10^{-2}$ для более детальной прорисовки распределения эквивалентных пластических деформаций. Представленные на рис.6 результаты расчета показывают, что площадь расположенной в материале 1 зоны малых пластических деформаций (величиной от 10^{-4}) больше площади аналогичной

зоны в материале 2 с меньшим модулем упругости. И наоборот, площадь зоны интенсивных пластических деформаций величиной до 0,1 в материале 1 меньше площади аналогичной зоны в материале 2.

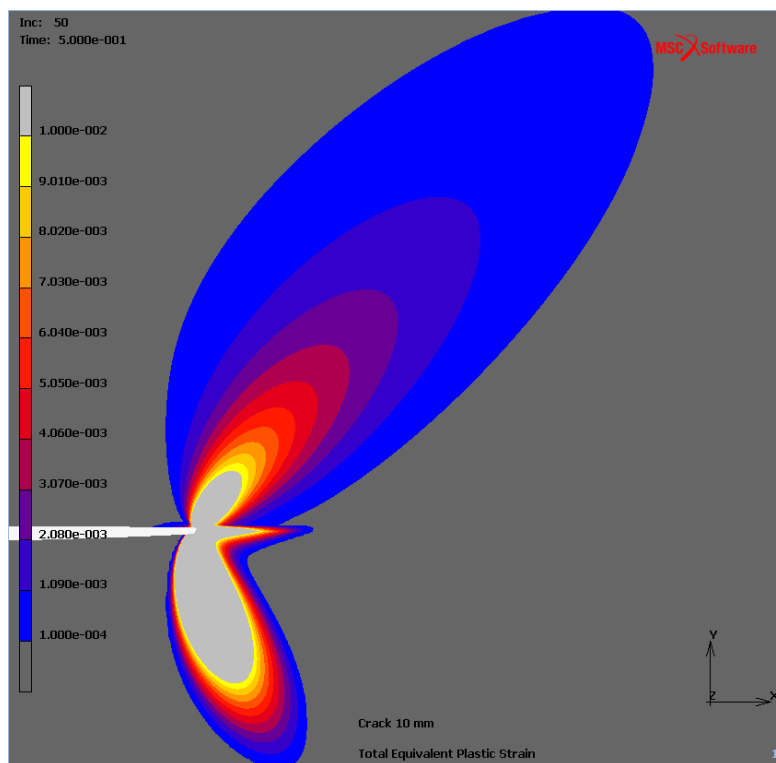


Рис.6. Пластическая зона перед вершиной трещины при нагрузке $\lambda = 0,5$.

В таблице 1 для различных значений нагрузки λ представлены значения раскрытия $2v_E$ трещины в ее вершине, а также поперечника a_E и длины Δ_E (мм) пластической зоны, полученные в результате численной обработки изолиний пластических зон в пластине с центральной внутренней трещиной длиной $2l_0 = 20$ мм.

Таблица 1.

λ	$2v_E$, мм	a_E , мм	Δ_E , мм	δ_E^* , мм
0,1	0,000296	0,05015	0,05008	0,000301
	0,003584	0,07679	0,05008	0,004608
0,2	0,00134	0,1007	0,02002	0,00060
	0,01490	0,2325	0,07495	0,01395
0,3	0,00402	0,3020	0,6254	0,00181
	0,03801	0,5440	0,3750	0,03264
0,4	0,00962	0,8048	1,650	0,00483
	0,07310	0,9866	0,6495	0,05919
0,5	0,0208	1,988	3,845	0,0119
	0,1213	1,529	0,948	0,0917

Во второй колонке таблицы дано удвоенное смещение v_E узла сетки, расположенного на расстоянии поперечника a_E над вершиной трещины, относительно узла, соответствующего вершине трещины. Длина Δ_E пластической

зоны определяется как разность наибольшей из всех абсцисс граничных точек зоны пластичности и абсциссы вершины трещины. Для каждого значения нагрузки значения раскрытия $2v_E$, поперечника a_E и длины Δ_E даны для материала 1 (верхняя строка) и для материала 2 (нижняя строка).

По данной в таблице 1 величине a_E численного эксперимента вычислялась величина предельного раскрытия δ_E^* по формуле $\delta_E^* = (\varepsilon_{1i} - \varepsilon_{0i}) a_E = \chi \varepsilon_{0i} a_E$ ($\varepsilon_{01} = 0,002$ для материала 1, $\varepsilon_{02} = 0,02$ для материала 2) при различных значениях χ . В пятой колонке таблицы 1 приведены значения δ_E^* , вычисленные при $\chi = 3$. Критическая нагрузка λ_E для каждого материала при заданных $2l_0$ и χ находилась с помощью интерполяции табличных данных из равенства $2v_E = \delta_E^*$, аналогичного равенству (2) аналитической модели. Наименьшая из двух нагрузок λ_E выбиралась в качестве критической разрушающей нагрузки для биматериала с заданными геометрическими и механическими характеристиками.

В таблице 2 представлены безразмерные критические нагрузки λ_E , когда оба материала имеют одинаковый показатель пластичности $\chi = 3$, но различаются длинами $2l_0$ центральных трещин. В этом случае оказалось, что критическая нагрузка для материала 1 меньше, чем для материала 2 для каждой длины трещины. Поэтому для биматериала в качестве критической разрушающей нагрузки выбрано значение критической нагрузки в материале 1 (первая строка табл.2).

Таблица 2.

	$2l_0 = 10$ мм	$2l_0 = 20$ мм	$2l_0 = 40$ мм
материал 1	0,1164	0,1012	0,0608
материал 2	0,1813	0,1638	0,1375

4. СРАВНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ И АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Заметим, что уравнения механики сплошной среды, используемые при численном моделировании методом конечных элементов, не содержат размер r элемента структуры материала. При дискретизации расчетной области вводится структурный параметр, совпадающий с характерным линейным размером конечного элемента. Если методом конечных элементов решаются уравнения механики деформируемого твердого тела для материалов со структурой, то размер конечного элемента не должен превышать характерного линейного размера элемента структуры материала. Кроме того, при численном моделировании остается неопределенным значение параметра ε_{1i} – максимальное относительное удлинение. Наоборот, уравнения (9), (10) или приближенные уравнения (12), (13) аналитической модели содержат величины r_i и ε_{1i} , причем величина r_i входит только в уравнения (9) и (12), а величина ε_{1i} входит только в уравнения (10) и (13). Поэтому предлагается следующий алгоритм сравнения численных результатов, полученных в предыдущем пункте, и результатов, которые можно получить с помощью аналитической модели (12), (13).

1. Задаем значение показателя пластичности, например, $\chi = 3$.
2. Задаем значение длины трещины в пластине, например: $2l_0 = 10$ мм, $2l_0 = 20$ мм, $2l_0 = 40$ мм.
С помощью результатов численного моделирования с привлечением достаточного критерия аналитической модели вычисляем для заданного χ критическую нагрузку λ_E , как показано в конце предыдущего пункта.
3. По этому значению λ_E с помощью интерполяции данных четвертой колонки табл.1 вычисляем значение экспериментальной критической длины Δ_E зоны пластичности соответствующего материала.
4. Используя полученные критические значения λ_E и Δ_E , находим из уравнения (12) аналитической модели значение r характерного линейного размера элемента структуры материала.
5. По найденному значению r вычисляем для различных нагрузок λ значения Δ по формуле (15) аналитической модели и сравниваем эти значения с Δ_E численного эксперимента.
6. Из уравнения (13) аналитической модели находим величину поправочного коэффициента m .
7. По найденным значениям r и m прогнозируем критическую разрушающую нагрузку λ_- по формуле (14) для других длин трещины и сравниваем полученные значения с нагрузкой λ_E .
8. Повторяем описанную процедуру, начиная с пункта 2, для другой длины трещины.

Так, для пластины с $\chi = 3$ и $2l_0 = 10$ последовательно получим $\lambda_E = 0,1164$; $\Delta_E = 0,0291$; $r = 0,0310$; $m = 1,09$. Используя эти значения r и m для образца с длиной трещины $2l_0 = 20$ прогнозируем критическую нагрузку по формуле (14) $\lambda_- = 0,0831$ (погрешность 18%, см. первую строку табл.2). Для образца с длиной трещины $2l_0 = 40$ получим $\lambda_- = 0,0550$ (погрешность 9,5%).

Теперь в качестве исходного образца возьмем пластину с тем же $\chi = 3$, но с длиной трещины $2l_0 = 20$. Последовательно получим $\lambda_E = 0,1012$; $\Delta_E = 0,0509$; $r = 0,0409$; $m = 1,06$. Прогнозируем критическую нагрузку по формуле (14) для двух других образцов: $2l_0 = 10 \Rightarrow \lambda_- = 0,141$ (погрешность 22%); $2l_0 = 40 \Rightarrow \lambda_- = 0,0671$ (погрешность 10%).

Наконец, в качестве исходного образца возьмем пластину с длиной трещины $2l_0 = 40$. Последовательно получим: $\lambda_E = 0,06079$; $\Delta_E = 0,0389$; $r = 0,0384$; $m = 1,09$. Прогнозируем критическую нагрузку для двух других образцов: $2l_0 = 10 \Rightarrow \lambda_- = 0,128$ (погрешность 10%); $2l_0 = 20 \Rightarrow \lambda_- = 0,0918$ (погрешность 9%).

В целом прогнозирование критической нагрузки по формуле (14) аналитической модели можно считать удовлетворительным. Однако прогнозирование для различных нагрузок длин зон предразрушения по формуле (15) оказалось менее удачным, особенно для нагрузок в диапазоне $0,2 \div 0,3$. В среднем погрешность равнялась 50%. Напомним, что длины зон

предразрушения, вычисленные по формулам (11), (15) и (16) совпадают только для критического значения нагрузки. Хотя значение параметра r можно определить из уравнения (12) по любым, не обязательно критическим, значениям λ и Δ , но значение поправочного коэффициента m определяется равенством (13), справедливым только для критических значений λ и Δ .

Формулы (11), (16) аналитической модели можно со следующими поправками использовать и при нагружении по второй моде. Так как $K_{II\infty} = Y\tau_{\infty}\sqrt{\pi l}$, $\sigma_Y = \sqrt{3}\tau_Y$ в рамках критерия текучести Мизеса для плоской деформации и плоского напряженного состояния, а $K_{I\infty} = Y\sigma_{\infty}\sqrt{\pi l}$, то в формулах (11), (16) для длины зоны предразрушения в биматериале надо использовать выражение $h = \sqrt{2\pi}\bar{\gamma}mY^2lc/96$ вместо $h = \sqrt{2\pi}\chi mY^2lc/64$. Кроме того, для параметра c надо выбирать $c = 5(1+\nu)$ для плоского напряженного состояния и $c = (5-8\nu+8\nu^2)/(1-\nu)$ для плоской деформации. Формула (14) для критической нагрузки при поперечном сдвиге в биматериале выглядит так

$$\lambda_{\pm} \approx 1 / \left(\frac{L}{L-2l} + \frac{Y}{2} \sqrt{\frac{2l}{r}} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{\bar{\gamma}mc}{6\pi}} \right) \right),$$

где $\bar{\gamma} = (\gamma_1 - \gamma_0)/\gamma_0$ – показатель пластичности материала при сдвиге [17]. Интересно отметить, что выражение (15), в отличие от формул (11), (14) и (16), не зависит явно от вида напряженного состояния и от моды нагружения. Было бы полезно выяснить с помощью численного моделирования: меняется ли модельный характерный размер r структуры материала (см. равенства (12) и (15)) в зависимости от вида напряженного состояния и от моды нагружения? Возможно, это приведет к дальнейшему уточнению модели.

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Естественно предположить, что в аналитической модели (12)-(13) величина r характерного линейного размера элемента структуры материала и величина m поправочного коэффициента не должны зависеть от длины трещины. Приведенные выше значения $m = 1,09$, $1,06$, $1,09$, полученные при прогнозировании соответственно для трех длин трещины $2l_0 = 10$ мм, 20 мм, 40 мм, подтверждают это предположение. Однако значения параметра $r = 0,0310$, $0,0409$, $0,0389$ заметно различны, хотя и остаются реалистичными с физической точки зрения и согласуются с требованием численного моделирования (размер сетки равен $0,025$). Точность вычисления параметров r и m зависит от точности определения критической нагрузки λ_E и соответствующей ей критической длины Δ_E зоны пластичности. Для повышения точности испытывались различные варианты аппроксимации численных характеристик (ν_E, a_E, Δ_E) изолиний пластических зон, найденных в численном эксперименте. Так, например, для трещины длиной $2l_0 = 40$ мм были дополнительно оцифрованы изолинии для нагрузок $\lambda = 0,08$, $0,09$, $0,12$ и $0,15$. В результате было получено $\lambda_E = 0,0669$; $\Delta_E = 0,107$; $r = 0,00366$; $m = 0,454$. Прогнозирование критической нагрузки для

двух других длин трещины показало: $2l_0 = 10 \Rightarrow \lambda_- = 0,141$ (погрешность 22%); $2l_0 = 20 \Rightarrow \lambda_- = 0,1009$ (погрешность 0,3%).

Сравнительный анализ проведенных расчетов позволяет предложить в качестве основной причины грубого прогнозирования критической нагрузки сильную чувствительность определения параметров r и m от точности оцифровки изолиний пластических зон. Очевидно, что вычисляемые значения параметров r и m сильно зависят от уровня изолиний эквивалентных пластических деформаций, принимаемых в качестве границы пластических зон. Так, на рис.6 изолинии уровня 10^{-4} и 10^{-3} расположены в материале 1 существенно дальше друг от друга, чем в материале 2. На результаты прогнозирования влияет также используемый способ аппроксимации табличных данных.

Реальная зона пластических деформаций аппроксимируется в рассматриваемой аналитической модели зоной предразрушения в виде прямоугольника со сторонами a и Δ (рис.4б). Возникает проблема выбора поперечника a и длины Δ зоны предразрушения, особенно при нормальном отрыве, где, в отличие от поперечного сдвига, пластическая зона мало похожа на прямоугольник, особенно при больших нагрузках (рис.6). Возможно, для улучшения результатов прогнозирования эти параметры надо выбирать при дополнительном условии равенства площадей пластической зоны и зоны предразрушения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные структурные формулы (11), (14)-(16) могут оказаться полезными для прогнозирования критической разрушающей нагрузки $\lambda = \sigma_\infty / \sigma_Y$ и оценки длины зоны предразрушения Δ_- при нагружении по первой моде (при нормальном отрыве) в квазивязких структурированных разномодульных биматериалах при плоском напряженном состоянии и при плоской деформации. Указанные формулы выражают величину нагрузки λ и длины Δ_- через длину трещины $2l$ с использованием следующих четырех параметров: r – характерный линейный размер структуры материала, ε_0 и ε_1 – параметры аппроксимации классической σ – ε диаграммы, m – поправочный коэффициент. Эти четыре параметра подбираются по результатам лабораторного эксперимента или численного моделирования, например, так, как показано в данной работе.

Таким образом, рассматриваемая аналитическая модель может быть использована при исследовании деформирования и разрушения композитов из структурированных материалов с различными упругими свойствами. Это позволит уменьшить количество лабораторных или численных экспериментов, необходимых для оценки разрушающей нагрузки.

Авторы благодарны профессору Корневу В.М. за обсуждение работы и полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев А.В. *Перспективы использования новых сингулярных решений теории упругости в прикладных задачах механики разрушения* / XI Всероссийский

- съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. – Казань: Издательство Казанского университета, 2015. – С.154-156.
2. Белов П.А. *Градиентные теории упругости. Зачем нужны сложные и очень сложные модели* / XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. – Казань: Издательство Казанского университета, 2015. – С.427-428.
 3. Бибосинов А.Ж., Искакбаев А.И., Бекбаутов Б.Е. *Моделирование и исследование зоны пластичности вокруг трещины Гриффитса* / XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. – Казань: Издательство Казанского университета, 2015. – С.472-474.
 4. Иштыряков И.С., Яруллин Р.Р. *Развитие трещин в полых образцах при растяжении и кручении* / XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики. Сборник докладов. – Казань: Издательство Казанского университета, 2015. – С.1641-1644.
 5. Глаголев В.В., Девятова М.В., Маркин А.А. *Модель трещины поперечного сдвига* // Прикладная механика и техническая физика. – 2015. – Т.56. – №4. – С.182-192.
 6. Смирнов С.В., Веретенникова И.А., Вичужанин Д.И. *Моделирование расслоения при пластической деформации биметаллического материала, полученного сваркой взрывом* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т.7. – №4. – С.398-411.
 7. Gallo P., Berto F. *Особенности J-интеграла в условиях упругопластической деформации для материалов, описываемых законом Рамберга-Осгуда* // Физическая мезомеханика. – 2015. – Т.18. – №5. – С.27-34.
 8. Салганик Р.Л. *О хрупком разрушении склеенных тел* // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т.27. – №5. – С.957-962.
 9. Sinclair G.B. *Stress singularities in classical elasticity–I: Removal, interpretation, and analysis* // Appl. Mech. Rev. – 2004. – Vol.57 – No.4. – Pp.251-297.
 10. England A.H. *A crack between dissimilar media*. Journal of applied mechanics, Trans. ASME, Series E, 1965, Vol.32, No.2, Pp.400-402.
 11. Erdogan F. *Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks*. Journal of applied mechanics, Trans. ASME, Series E, 1965, Vol.32, No.2, Pp.403-410.
 12. Rice J.R., Sea G.C. *Plane problems of cracks in dissimilar media*. Journal of applied mechanics, Trans. ASME, Series E, 1965, Vol.32, No.2, Pp.418-423.
 13. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений*. В 2-х томах. / Под ред. Ю. Мураками. Т.1. – М.: Мир, 1990. – 448 с.
 14. Rice J.R. *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*. Journal of applied mechanics, Trans. ASME, Series E, 1968, Vol.35, No.4, Pp.379-386.
 15. Черепанов Г.П. *Вычисление инвариантных интегралов в особых точках* / В кн.: Вычислительные методы в механике разрушения. – М.: Мир, 1990. – С.350-364.
 16. Корнев В.М., Астапов Н.С. *Модель разрушения кусочно-однородной среды при расслоении упругопластических структурированных материалов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №3. – С.347-360.

17. Корнев В.М., Астапов И.С. Астапов Н.С. *Модель расслоения композита при поперечном сдвиге* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №2. – С.149-161.
18. Корнев В.М., Кургузов В.Д. *Достаточный критерий разрушения в случае сложного напряженного состояния при непропорциональном деформировании материала в зоне предразрушения* // Прикладная механика и техническая физика. – 2010. – Т.51. – №6. – С.153-163.
19. Демешкин А.Г., Корнев В.М., Астапов Н.С. *Прочность клееного композита при наличии трещиноподобных дефектов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2013. – Т.19. – №3. – С.445-458.
20. Матвиенко Ю.Г. *Модели и критерии механики разрушения*. – М.: Физматлит, 2006. – 328 с.
21. Саврук М.П. *Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами* / В кн.: Механика разрушения и прочность материалов, Т.2. – Киев: Наук. думка, 1988. – 619 с.
22. Кургузов В.Д., Корнев В.М., Астапов Н.С. *Модель разрушения биматериала при расслоении. Численный эксперимент* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №4. – С.462-473.

REFERENCES

1. Andreev A.V. *Perspektivy ispol'zovaniya novyh singuljarnyh reshenij teorii uprugosti v prikladnyh zadachah mekhaniki razrushenija* [Prospects for the use of new singular solutions of elasticity theory in applied problems of fracture mechanics]. XI Vserossijskij sjezd po fundamental'nyh problemam teoreticheskoy i prikladnoj mekhaniki, Sbornik dokladov, Kazan: Kazanskij universitet, 2015, Pp.154-156.
2. Belov P.A. *Gradientnye teorii uprugosti. Zachem nuzhny slozhnye i ochen slozhnye modeli* [Gradient elasticity. Why do we need a very sophisticated and complex models]. XI Vserossijskij sjezd po fundamental'nyh problemam teoreticheskoy i prikladnoj mekhaniki, Sbornik dokladov, Kazan: Kazanskij universitet, 2015, Pp.427-428.
3. Bibosinov A.Zh., Iskakbaev A.I., Bekbautov B.E. *Modelirovanie i issledovanie zony plastichnosti vokrug treshhiny Griffitsa* [Simulation and research of plastic zone around the crack Griffiths]. XI Vserossijskij sjezd po fundamental'nyh problemam teoreticheskoy i prikladnoj mekhaniki, Sbornik dokladov, Kazan: Kazanskij universitet, 2015, Pp.472-474.
4. Ishtyrjakov I.S., Jarullin R.R. *Razvitie treshhin v polyh obrazcah pri rastjazhenii i kruchenii* [The development of cracks in the tensile specimens hollow and torsion]. XI Vserossijskij sjezd po fundamental'nyh problemam teoreticheskoy i prikladnoj mekhaniki, Sbornik dokladov, Kazan: Kazanskij universitet, 2015, Pp.1641-1644.
5. Glagolev V.V., Devyatova M.V., Markin A.A. *Model of a mode II shear crack*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2015, Vol.56, No.4, Pp.698-706.
6. Smirnov S.V., Veretennikova I.A., Vichuzhanin D.I. *Modelirovanie rassloenija pri plasticheskoy deformacii bimetallicheskogo materiala, poluchennogo svarkoj vzryvom* [Modeling of delamination in multilayer metals produced by explosive welding under plastic deformation]. Vychislitel'naja mekhanika sploshnyh sred, 2014, Vol.7. No.4, Pp.398-411.

7. Gallo P., Berto F. *Osobennosti J-integrala v uslovijah uprugoplasticheskoj deformacii dlja materialov, opisivaemyh zakonom Ramberga-Osguda [Some considerations on the J-integral under elastic-plastic conditions for materials obeying a Ramberg-Osgood law]*. Fizicheskaja mezhmehanika, 2015, Vol.18, No.5, Pp.27-34.
8. Salganik R.L. *O hrupkom razrushenii skleennyh tel [About brittle fracture of the bonded bodies]*. Prikladnaja matematika i mekhanika, 1963, Vol.27, No.5, Pp.957-962.
9. Sinclair G.B. *Stress singularities in classical elasticity-I: Removal, interpretation, and analysis*. Appl. Mech. Rev., 2004, Vol.57, No.4, Pp.251-297.
10. England A.H. *A crack between dissimilar media*. Journal of applied mechanics, Trans. ASME, Series E, 1965, Vol.32, No.2, Pp.400-402.
11. Erdogan F. *Stress distribution in bonded dissimilar materials with cracks*. Journal of applied mechanics, Trans. ASME, Series E, 1965, Vol.32, No.2, Pp.403-410.
12. Rice J.R., Sea G.C. *Plane problems of cracks in dissimilar media*. Journal of applied mechanics, Trans. ASME, Series E, 1965, Vol.32, No.2, Pp.418-423.
13. Guide to the stress intensity factors. In 2 vols. Ed. J. Murakami. Vol.1, Moskva: Mir, 1990, 448 p.
14. Rice J.R. *A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks*. Journal of applied mechanics, Trans. ASME, Series E, 1968, Vol.35, No.4, Pp.379-386.
15. Cherepanov G.P. *Vychislenie invariantnykh integralov v osobych tochkach [Computing the invariant integrals in specific locations]*. In: Computational methods in fracture mechanics, Moskva: Mir, 1990, Pp.350-364.
16. Kornev V.M., Astapov N.S. *Model' razrushenija kusochno-odnorodnoj sredy pri rassloenii uprugoplasticheskikh strukturirovannykh materialov [Fracture model of piecewise homogenous medium during exfoliation of elasto-plastic structured materials]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2010, Vol.16, No.3, Pp.347-360.
17. Kornev V.M., Astapov I.S., Astapov N.S. *Model' rassloenija kompozita pri poperechnom sdvige. [Model of composite exfoliation with transverse shear]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.2, Pp.149-161.
18. Kornev V.M., Kurguzov V.D. *Sufficient criterion of fracture in the case with a complex stress state and non-proportional deformation of the material in the pre-fracture zone*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2010, Vol.51, No.6, Pp.904-912.
19. Demeshkin A.G., Kornev V.M., Astapov N.S. *Prochnost' kleenogo kompozita pri nalichii treshhinopodobnyh defektov [Strength of glued composite in the presence of crack-like defects]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2013, Vol.19, No.3, Pp.445-458.
20. Matvienko Y.G. *Modeli i kriterii mehaniki razrushenija [Models and criteria of fracture mechanics]*. Moskva: FIZMATLIT, 2006, 328 p.
21. Savruk M.P. *Koefficienty intensivnosti naprjazhenij v telah s treshhinami // Mehanika razrushenija i prochnost' materialov [Stress intensity factor in the bodies with cracks / Fracture mechanics and strength of materials]*. Vol.2. Kiev: Naukova Dumka, 1988, 619 p.
22. Kurguzov V.D., Kornev V.M., Astapov N.S. *Model' razrushenija bimateriala pri rassloenii. Chislennyj jeksperiment [Fracture model of bi-material under*

exfoliation. Numerical experiment]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2011, Vol.17, No.4, Pp.462-473.

Поступила в редакцию 24 марта 2016 года.

Сведения об авторах:

Астапов Николай Степанович – к.ф.-м.н., доц., с.н.с., ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: nika@hydro.nsc.ru

Кургузов Владимир Дмитриевич – д.ф.-м.н., доц., в.н.с., ФГБУН Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: kurguzov@hydro.nsc.ru