

УДК 539.3

ЛИНЕЙНЫЙ УПРУГИЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ РЕШЁТКИ

Рыбаков Л.С.

*ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет), г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Изучается напряженно-деформированное состояние регулярной упругой решётки, образованной из трех взаимно ортогональных семейств прямых однородных стержней. Для всех стержней используется модель Бернулли пространственно деформируемого стержня. Каждый из них имитируется прямой упругой линией, наделенной заданными жесткостями на растяжение-сжатие, кручение и изгиб в двух плоскостях. Главные центральные оси поперечных сечений стержней одного семейства параллельны упругим линиям стержней других семейств. Смежные стержни жестко связаны между собой в точках пересечения их упругих линий – узлах решётки. Регулярность решётки предполагает неизменность упруго-геометрических параметров стержней в пределах одного семейства. В общем случае внешняя нагрузка на решётку складывается из узловых сил и моментов и погонных сил и моментов стержней.

Строгая линейная теория решётки построена с помощью метода склейки. Согласно этому методу решётка расчленилась на стержни и узлы – элементы решётки. К изолированным элементам прикладывались заданные внешние силы и моменты и силы и моменты взаимодействия их с соседями. Затем проводился аналитический упругий анализ стержней с учетом геометрических условий сопряжения смежных элементов и анализ равновесия узлов.

Построенная теория сформулирована в терминах обобщенных узловых перемещений и обобщенных полных деформаций и начальных внутренних сил стержней. Все эти переменные – функции трех целочисленных аргументов, использованных для нумерации элементов решётки. Полная замкнутая система уравнений теории представлена геометрическими и физическими соотношениями, уравнениями равновесия узлов и уравнениями совместности полных деформаций. С их помощью даны альтернативные постановки дискретных краевых задач и рассмотрены некоторые их обобщения.

Применение теории проиллюстрировано точным аналитическим решением задачи о деформировании произвольно нагруженной решётки с одним рядом внутренних узлов.

Ключевые слова: линейный упругий анализ; пространственные ортогональные решётки

LINEAR ELASTIC ANALYSIS OF SPATIAL ORTHOGONAL GRID

Rybakov L.S.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

ABSTRACT

A stress-strain state is studied of a regular elastic grid formed by three mutually orthogonal families of straight homogeneous rods. Bernoulli's model of a spatial deformable rod is adopted for all of them. Each rod of a grid is simulated by a straight elastic line endowed

with specified stiffnesses in tension-compression, torsion and bending in two planes. The main central axes of cross sections of rods of the same family are parallel to elastic lines of rods of other families. The adjacent rods are rigidly connected at the points of intersection of their elastic lines – the grid nodes. The regularity of the grid implies the invariance of the elastic and geometrical parameters of the rods within the same family. In the general case, the external load on the grid consists of nodal forces and moments and linear forces and moments of rods.

The rigorous linear theory of grid is constructed by the glueing method. According to this method, the grid was split into rods and nodes – the elements of the grid. Given external forces and moments were applied to isolated elements and forces and moments of interaction with their neighbors. Then the analytical study of elastic rods with the geometric conditions of the connection of adjacent elements and the analysis of equilibrium of the nodes were carried out.

The theory was formulated in terms of generalized nodal displacements and generalized total strains and internal initial forces of rods. All these variables are functions of three integer arguments used for numbering of the elements of the grid. Complete closed system of equations of the theory is represented by geometric and physical relationships, the equilibrium equations of the nodes and the compatibility equations of total deformations. Alternative formulations of the discrete boundary-value problems are presented with their help and some of their generalizations are considered.

An application of the theory is illustrated by the exact analytical solution of the problem of deformation of an arbitrarily loaded grid with one row of internal nodes.

Keywords: linear elastic analysis; spatial orthogonal grid

ВВЕДЕНИЕ

Стержневые решётки – разновидность стержневых систем, линейному упругому анализу которых посвящена обширная литература [1-10]. Многочисленные публикации показывают, что методы анализа стержневых систем подразделяются на континуальные и дискретно-континуальные.

Континуальные методы предполагают замену реальной стержневой системы континуальным конструктивно-анизотропным телом. Область применимости этих методов – регулярные стержневые системы с большим количеством периодически повторяющихся элементов. Сами методы отличаются друг от друга видом выбранного континуального эквивалента исходной системы и процедурой континуализации.

Наибольшее практическое применение нашли методы, основанные на концепции «размазывания». Их сущность в замене семейств однонаправленных стержней континуальными эквивалентами, наследующими деформативные свойства исходных элементов. В зависимости от вида стержневой системы в роли континуального эквивалента семейства стержней могут выступать двумерный слой или трехмерный континуум. Результирующая континуальная модель стержневой системы формируется путем объединения континуальных моделей семейств ее элементов. По такой схеме, например, построены известные теории сетчатых пластин и оболочек [7,9]. Следует отметить, что континуальная модель стержневой системы не позволяет учесть взаимодействие реальных элементов и их индивидуальные свойства деформирования.

Дискретно-континуальные методы опираются на дискретно-континуальную природу стержневых систем и используют как континуальный, так и дискретный математический аппарат. К достоинствам этих методов следует отнести, прежде всего, возможность учета индивидуального поведения и взаимодействия

элементов стержневых систем. В этом смысле дискретно-континуальные методы следует отнести к числу строгих методов анализа.

Наибольшую известность среди дискретно-континуальных методов получили классические методы строительной механики, применимые к любым, в том числе и регулярным, стержневым системам. К ним относятся метод сил, метод перемещений и смешанный метод, включая различные их модификации. Все они носят алгоритмический характер, и их развитие с появлением вычислительной техники шло по пути применения матричного аппарата [3-6] и поиска способов снижения размерности решаемых задач.

Среди других методов дискретно-континуального анализа регулярных стержневых систем выделим метод склейки. Суть его в членении системы на элементы (узлы и расположенные между ними стержни), в выборе моделей их механического поведения и проведении поэлементного анализа системы с учетом геометрических условий сопряжения ее смежных элементов.

Описанная процедура позволяет строить строгие дискретные теории упругости. Вид конкретной теории предопределяется структурой изучаемой стержневой системы и выбранными моделями деформирования и механического поведения ее элементов. Определяющие соотношения каждой такой теории представляются геометрическими и физическими зависимостями, уравнениями равновесия узлов и уравнениями совместности деформаций в терминах обобщенных узловых смещений, полных деформаций и начальных внутренних сил в стержнях. В этих соотношениях и в допускаемых ими альтернативных постановках дискретных краевых задач усматриваются дискретные аналоги соответствующих континуальных моделей упругих тел.

Такие линейные теории плоской ортогональной решётки и призматического каркаса представлены в работах [11,12]. Первая теория является дискретным аналогом теории пластин, вытекающей из моментной теории упругости [12]. Ниже представлено обобщение этой теории на пространственный случай.

1. ЛИНЕЙНЫЙ УПРУГИЙ АНАЛИЗ РЕШЁТКИ

Рассмотрим пространственную ортогональную решётку, образованную из трех взаимно ортогональных семейств прямых стержней, пространственно деформируемых в соответствии с моделью Бернулли. Их упругие линии, проходящие через центры тяжести их же поперечных сечений, параллельны главным осям последних и наделены заданными жесткостями на растяжение–сжатие, кручение и изгиб в двух плоскостях. Смежные стержни жестко связаны между собой в местах пересечения их упругих линий – узлах решётки, обладающих шестью степенями свободы. Стержни одного семейства одинаковые, однородные и расположены с постоянным шагом.

Схема описанной решётки, отнесенной к декартовой системе отсчета $x_1x_2x_3$, показана на рис.1. Для обозримости произвольная решётка представлена на нем условно решёткой с одним внутренним узлом. Внешние воздействия на решётку, слагаемые в общем случае из распределенных погонных сил и моментов стержней и сосредоточенных в узлах сил и моментов на рис.1 не показаны.

Условимся стержни, параллельные оси x_k (здесь и далее латинские индексы принимают значения 1,2,3), называть k – стержнями.

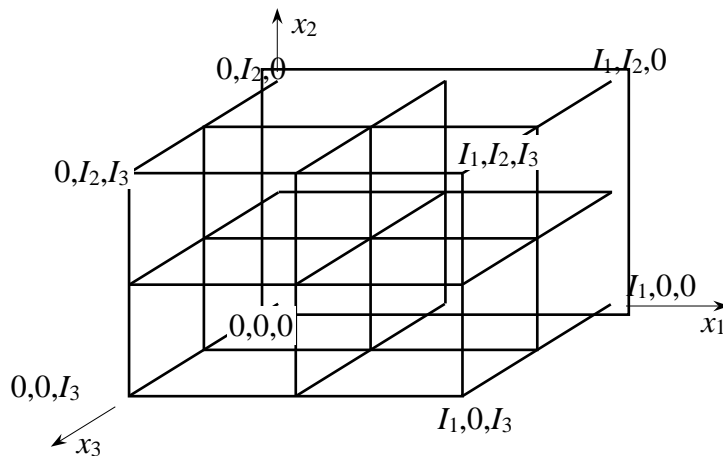


Рис.1.

Пространственная решётка – дискретно трехмерная упругая система. Для нумерации ее элементов (узлов и соединяющих их стержней) требуется три целочисленных параметра. Обозначим их символами i_1, i_2, i_3 (кратко i_n), полагая, что они отсчитываются в направлении осей x_1, x_2, x_3 соответственно. Условимся узлу и исходящим из него стержням присваивать одинаковый номер. Пронумеруем узлы с помощью значений $i_n \in [0, I_n]$, где I_n – заданные положительные целые числа, а $[0, I_n]$ – отрезок целых чисел от 0 до I_n включительно (см. рис.1, где указаны номера только угловых граничных узлов). Тогда в нумерации k – стержней участвуют значения $i_n \in [0, I_n - \delta_{kn}]$, где δ_{kn} – символ Кронекера. Для зависимых переменных величин, связанных с конкретным элементом решётки, параметры i_n будут выступать в роли дискретных аргументов, область изменения которых образуют только что указанные значения. Считаем далее, что все рассуждения и соотношения, относящиеся к текущему, с номером i_n , элементу решётки, справедливы для соответствующих областей изменения параметров i_n .

Геометрические и упругие характеристики решётки определяются длинами l_k и жесткостями g_{kn} упругих линий k – стержней. Первый нижний индекс жесткостей и других вводимых ниже величин для стержней, будем увязывать с номером семейства стержней, а второй – с видом деформирования или координатным направлением. Полагаем в дальнейшем, что g_{k0} и g_{kk} – жесткости упругих линий k – стержней на растяжение-сжатие и кручение (здесь и далее суммирование по повторяющимся индексам не предполагается), а g_{kn} ($k \neq n$) – жесткости этих же линий на изгиб в плоскостях $x_k x_n$.

Введем для текущего k – стержня следующие обозначения: $x \in [0, l_k]$ – локальная координата, отсчитываемая вдоль упругой линии стержня в направлении оси x_k ; u_{kn} , n_{kn} и p_{kn} – смещение, внутренняя и погонная внешняя силы в направлении оси x_n ; θ_{kn} , m_{kn} и r_{kn} – угол поворота сечения, внутренний и погонный внешний моменты вокруг линии, проходящей параллельно оси x_n

через центр тяжести поперечного сечения стержня. Узловые смещения и внешние силы в направлении осей x_n обозначим символами U_n и P_n , а углы поворота узлов и приложенные к ним внешние моменты вокруг линий, проходящих через узлы параллельно осям x_n , – символами Θ_n и M_n соответственно.

Смысл введенных зависимых величин и принятое для них правило знаков, поясняют рис.2, 3. На первом из них изображены текущий узел, части исходящих из него стержней и положительные направления перемещений и углов поворота узлов и поперечных сечений k –стержней. На рис.3 показаны фрагмент 1–стержня, исходящего из текущего узла решётки, положительные внешние узловые силы P_n и моменты M_n , положительные же погонные внешние силы p_{1n} и моменты r_{1n} 1–стержня, а также внутренние силы n_{1n} и моменты m_{1n} в его произвольном поперечном сечении. Правило знаков для внешних и внутренних сил и моментов 2– и 3–стержней аналогично.

За функциями дискретных и континуальных аргументов закрепляем строчные буквы, а за функциями только дискретных аргументов – прописные. Поскольку изучаемая проблема дискретно-континуальная, то следовало бы, например, писать $u_{kn}(x; i_1, i_2, i_3)$, $U_n[i_1, i_2, i_3]$ или более кратко $u_{kn}(x; i_m)$, $U_n[i_m]$. Условимся континуальный аргумент x при символах функций сохранять только тогда, когда нужно указать его конкретное значение.

Дискретные аргументы могут принимать как текущие (несмещенные i_n), так и смещенные (например, $i_n + 1$ или $i_n - 2$) значения. При явной записи фактических значений таких аргументов уравнения и формулы становятся трудно обозримыми. Поэтому будем полагать, что в уравнениях и формулах при всех зависимых переменных стоят текущие (несмещенные) значения аргументов i_n , которые, как и континуальный аргумент, ради краткости записи опускаются. Это становится возможным благодаря введению линейных операторов сдвига ∇_n^\pm и частных разностных операторов 1-го порядка Δ_n^\pm , смысл которых на примере отвлеченной функции $\Psi[i_1, i_2, i_3] = \Psi[i_n]$ дискретных аргументов i_n поясняют равенства

$$\nabla_k^\pm \Psi[i_n] = \Psi[i_n \pm \delta_{kn}], \quad \Delta_k^\pm \Psi[i_n] = \pm \Psi[i_n \pm \delta_{kn}] \mp \Psi[i_n].$$

Эти операторы перестановочны и связаны между собой зависимостями

$$\nabla_k^\pm = 1 \pm \Delta_k^\pm, \quad \nabla_k^\pm \nabla_k^\mp = 1, \quad \Delta_k^\pm = \nabla_k^\pm \Delta_k^\mp.$$

Кроме того, они позволяют образовывать операторы частных разностей более высокого порядка. Так, например, для операторов частных разностей второго порядка Δ_k^2 имеем

$$\Delta_k^2 \Psi = \Delta_k^2 \Psi[i_n] = \Psi[i_n + \delta_{kn}] - 2\Psi[i_n] + \Psi[i_n - \delta_{kn}],$$

$$\Delta_k^2 = \Delta_k^+ \Delta_k^- = \Delta_k^+ - \Delta_k^- = \nabla_k^+ - 2 + \nabla_k^-.$$

Условимся, что зависимая переменная, значения дискретных аргументов которой указывают явно или неявно (обнаруживается после раскрытия предшествующего разностного оператора) на несуществующий элемент системы, равна нулю.

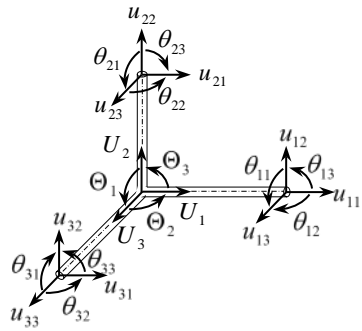


Рис.2.

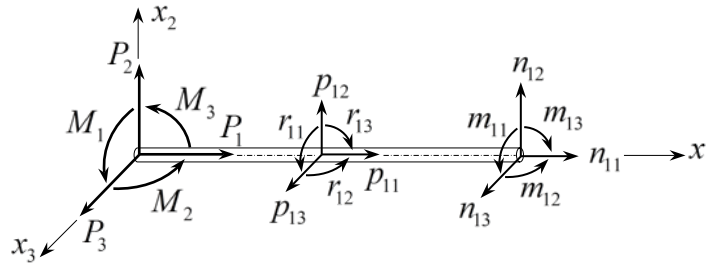


Рис.3.

Расчленим решётку на узлы и расположенные между ними k – стержни, и проведем анализ изолированных элементов с учетом геометрических и статических условий их сопряжения.

Принятое правило знаков для обобщенных перемещений и сил, а также соглашения о символике для введенных и вновь вводимых величин приводят к тому, что все уравнения и формулы, порождаемые упругим анализом стержней разных семейств, подчиняются круговой перестановке индексов. Поэтому ограничимся детальным изложением упругого анализа только изолированных 1 – стержней.

Геометрические условия сопряжения начал 1 – стержней с примыкающими к ним узлами имеют вид

$$u_{1j}(0; i_n) = U_j[i_n], \quad \theta_{1j}(0; i_n) = (1 - 2\delta_{2j})\Theta_j[i_n], \quad (1)$$

а их пространственное деформирование описывается уравнениями равновесия

$$n'_{1n} + p_{1n} = 0, \quad m'_{11} + r_{11} = 0, \quad m'_{13} + r_{13} = n_{12}, \quad m'_{12} + r_{12} = n_{13} \quad (2)$$

и физическими соотношениями

$$n_{11} = g_{10}u'_{11}, \quad m_{11} = g_{11}\theta'_{11}, \quad m_{12} = -g_{12}u''_{13}, \quad m_{13} = -g_{13}u''_{12}. \quad (3)$$

Подставляя соотношения (3) в равенства (2), приходим к дифференциальным уравнениям упругих линий 1 – стержней

$$g_{10}u''_{11} + p_{11} = 0, \quad g_{11}\theta''_{11} + r_{11} = 0, \quad g_{13}u''_{12} = p_{12}^*, \quad g_{12}u''_{13} = p_{13}^*, \quad (4)$$

где

$$p_{12}^* = p_{12} + r'_{13}, \quad p_{13}^* = p_{13} + r'_{12}.$$

Общие решения уравнений (4), подчиненные условиям (1), принимают вид

$$\begin{aligned} u_{11} &= U_1 + g_{10}^{-1}N_{11}x + u_{11}^*, & n_{11} &= N_{11} + n_{11}^*, \\ u_{12} &= U_2 + \Theta_3x - \frac{1}{6}g_{13}^{-1}(3M_{13}x^2 + N_{12}x^3) + u_{12}^*, & n_{12} &= N_{12} + n_{12}^*, \\ u_{13} &= U_3 - \Theta_2x - \frac{1}{6}g_{12}^{-1}(3M_{12}x^2 + N_{13}x^3) + u_{13}^*, & n_{13} &= N_{13} + n_{13}^*, \\ \theta_{11} &= \Theta_1 + g_{11}^{-1}M_{11}x + \theta_{11}^*, & m_{11} &= M_{11} + m_{11}^*, \\ \theta_{12} &= u'_{13} = -\Theta_2 - \frac{1}{2}g_{12}^{-1}(2M_{12}x + N_{13}x^2) + \theta_{12}^*, & m_{12} &= M_{12} + N_{13}x + m_{12}^*, \\ \theta_{13} &= u'_{12} = \Theta_3 - \frac{1}{2}g_{13}^{-1}(2M_{13}x + N_{12}x^2) + \theta_{13}^*, & m_{13} &= M_{13} + N_{12}x + m_{13}^*. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь введены начальные внутренние силы и моменты

$$N_{1j}[i_n] = n_{1j}(0; i_n), \quad M_{1j}[i_n] = m_{1j}(0; i_n) \quad (6)$$

и обусловленные собственными нагрузками 1 – стержней величины

$$\begin{aligned}
 u_{11}^* &= -g_{10}^{-1} \int_0^x (x-\tau) p_{11}(\tau) d\tau, & u_{12}^* &= \frac{1}{6} g_{13}^{-1} \int_0^x (x-\tau)^3 p_{12}^*(\tau) d\tau, \\
 u_{13}^* &= \frac{1}{6} g_{12}^{-1} \int_0^x (x-\tau)^3 p_{13}^*(\tau) d\tau, & \theta_{11}^* &= -g_{11}^{-1} \int_0^x (x-\tau) r_{11}(\tau) d\tau, \\
 \theta_{12}^* &= (u_{13}^*)', & \theta_{13}^* &= (u_{12}^*)', & n_{11}^* &= g_{10}(u_{11}^*)', & n_{12}^* &= -g_{13}(u_{12}^*)''' + r_{13}, \\
 n_{13}^* &= -g_{12}(u_{13}^*)''' + r_{12}, & m_{1j}^* &= \delta_{1j} g_{11}(\theta_{11}^*)' - \delta_{2j} g_{12}(u_{13}^*)'' - \delta_{3j} g_{13}(u_{12}^*)''.
 \end{aligned}$$

Геометрические условия сопряжения концов 1–стержней с примыкающими к ним узлами

$$u_{1j}(l_1; i_n) = \nabla_1^+ U_j[i_n], \quad \theta_{1j}(l_1; i_n) = (1 - 2\delta_{2j}) \nabla_1^+ \Theta_j[i_n] \tag{7}$$

после раскрытия их левых частей с помощью выражений (5), дают соотношения

$$\begin{aligned}
 U_{11} &= g_{10}^{-1} N_{11} + U_{11}^*, & \Theta_{11} &= \bar{g}_{11}^{-1} \bar{M}_{11} + \Theta_{11}^*, \\
 U_{12} &= -\frac{1}{6} \bar{g}_{13}^{-1} (3\bar{M}_{13} + N_{12}) + U_{12}^*, & \Theta_{13} &= -\frac{1}{2} \bar{g}_{13}^{-1} (2\bar{M}_{13} + N_{12}) + \Theta_{13}^*, \\
 U_{13} &= -\frac{1}{6} \bar{g}_{12}^{-1} (3\bar{M}_{12} + N_{13}) + U_{13}^*, & \Theta_{12} &= -\frac{1}{2} \bar{g}_{12}^{-1} (2\bar{M}_{12} + N_{13}) + \Theta_{12}^*.
 \end{aligned} \tag{8}$$

В них введены полные деформации 1–стержней

$$U_{1j} = \lambda_{j1} \Delta_1^+ \bar{U}_j + \delta_{3j} \Theta_2 - \delta_{2j} \Theta_3, \quad \Theta_{1j} = (1 - 2\delta_{2j}) \Delta_1^+ \Theta_j \tag{9}$$

и использованы обозначения

$$\begin{aligned}
 \lambda_{ij} &= \lambda_{ji}^{-1} = l_i l_j^{-1}, & \bar{g}_{1n} &= g_{1n} l_1^{-2}, & \bar{M}_{1n} &= M_{1n} l_n^{-1}, \\
 \bar{U}_j &= U_j l_j^{-1}, & U_{1j}^*[i_n] &= l_1^{-1} u_{1j}^*(l_1; i_n), & \Theta_{1j}^*[i_n] &= \theta_{1j}^*(l_1; i_n).
 \end{aligned}$$

С целью согласования деформаций (9) и начальных внутренних сил и моментов (6) 1–стержня рассмотрим функционал его потенциальной энергии

$$\Pi_1[n_{11}, m_{1n}] = \frac{1}{2} \int_0^{l_1} (g_{10}^{-1} n_{11}^2 + g_{11}^{-1} m_{11}^2 + g_{12}^{-1} m_{12}^2 + g_{13}^{-1} m_{13}^2) dx.$$

Первая вариация его (см. (3))

$$\delta \Pi_1 = \int_0^{l_1} (u'_{11} \delta n_{11} + \theta'_{11} \delta m_{11} - u''_{13} \delta m_{12} - u''_{12} \delta m_{13}) dx$$

после интегрирования с учетом зависимостей (см. (5))

$$\begin{aligned}
 \delta n_{11} &= \delta N_{11}, & \delta m_{11} &= \delta M_{11}, \\
 \delta m_{12} &= \delta M_{12} + x \delta N_{13}, & \delta m_{13} &= \delta M_{13} + x \delta N_{12}
 \end{aligned}$$

и геометрических условий сопряжения (1), (7) принимает вид

$$\delta \Pi_1 = l_1 \sum_{j=1}^3 [U_{1j} \delta N_{1j} + (2\delta_{1j} - 1) \Theta_{1j} \delta \bar{H}_{1j}], \tag{10}$$

показывающий, что деформациям U_{1k} отвечают силы N_{1k} , а Θ_{1k} внутренние силовые факторы \bar{H}_{1k} , связанные с \bar{M}_{1k} зависимостями

$$\bar{H}_{1k} = \bar{M}_{1k} + \delta_{3k} N_{12} + \delta_{2k} N_{13}. \tag{11}$$

Переходя в формулах (8) к величинам (11), получаем соотношения

$$\begin{aligned}
 U_{11} &= g_{10}^{-1} N_{11} + U_{11}^*, & \Theta_{11} &= \bar{g}_{11}^{-1} \bar{H}_{11} + \Theta_{11}^*, \\
 U_{12} &= -\frac{1}{6} \bar{g}_{13}^{-1} (3\bar{H}_{13} - 2N_{12}) + U_{12}^*, & \Theta_{12} &= -\frac{1}{2} \bar{g}_{12}^{-1} (2\bar{H}_{12} - N_{13}) + \Theta_{12}^*, \\
 U_{13} &= -\frac{1}{6} \bar{g}_{12}^{-1} (3\bar{H}_{12} - 2N_{13}) + U_{13}^*, & \Theta_{13} &= -\frac{1}{2} \bar{g}_{13}^{-1} (2\bar{H}_{13} - N_{12}) + \Theta_{13}^*
 \end{aligned} \tag{12}$$

и обратные им зависимости

$$\begin{aligned}
N_{11} &= g_{10}U_{11} + N_{11}^*, & \bar{H}_{11} &= \bar{g}_{11}\Theta_{11} + \bar{H}_{11}^*, \\
N_{12} &= \bar{g}_{13}(12U_{12} - 6\Theta_{13}) + N_{12}^*, & \bar{H}_{12} &= \bar{g}_{12}(6U_{13} - 4\Theta_{12}) + \bar{H}_{12}^*, \\
N_{13} &= \bar{g}_{12}(12U_{13} - 6\Theta_{12}) + N_{13}^*, & \bar{H}_{13} &= \bar{g}_{13}(6U_{12} - 4\Theta_{13}) + \bar{H}_{13}^*,
\end{aligned} \tag{13}$$

где

$$\begin{aligned}
N_{11}^* &= -g_{10}U_{11}^*, & \bar{H}_{11}^* &= -\bar{g}_{11}\Theta_{11}^*, \\
N_{12}^* &= -\bar{g}_{13}(12U_{12}^* - 6\Theta_{13}^*), & \bar{H}_{12}^* &= -\bar{g}_{12}(6U_{13}^* - 4\Theta_{12}^*), \\
N_{13}^* &= -\bar{g}_{12}(12U_{13}^* - 6\Theta_{12}^*), & \bar{H}_{13}^* &= -\bar{g}_{13}(6U_{12}^* - 4\Theta_{13}^*).
\end{aligned} \tag{14}$$

Напомним, что соответствующие результаты для 2-, 3-стержней получаются из формул (1)-(14) путем круговой перестановки индексов.

Уравнения равновесия изолированных внутренних узлов в отношении действующих на них сил в направлении осей x_n и моментов относительно этих же осей записываются изначально таким образом

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^3 [N_{i1} - \nabla_i^- n_{i1}(l_i)] + P_1 &= 0, \\
\sum_{i=1}^3 (1 - 2\delta_{2i}) [M_{i1} - \nabla_i^- m_{i1}(l_i)] + M_1 &= 0.
\end{aligned}$$

Раскрывая здесь величины $n_{i1}(l_i; i_n)$, $m_{i1}(l_i; i_n)$ с помощью формул (5), (11) и формул, извлекаемых из них круговой перестановкой индексов, находим

$$\begin{aligned}
\Delta_1^- N_{11} + \Delta_2^- N_{21} + \Delta_3^- N_{31} + P_1^* &= 0, \\
\Delta_1^- \bar{H}_{11} - \lambda_{21}(\Delta_2^- \bar{H}_{21} - N_{23}) + \lambda_{31}(\Delta_3^- \bar{H}_{31} - N_{32}) + \bar{M}_1^* &= 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Здесь

$$P_1^* = P_1 - \sum_{i=1}^3 \nabla_i^- n_{i1}^*(l_i), \quad \bar{M}_1^* = l_1^{-1} \left[M_1 - \sum_{i=1}^3 (1 - 2\delta_{2i}) \nabla_i^- m_{i1}^*(l_i) \right].$$

Уравнения равновесия граничных узлов представляют статические граничные условия. Чтобы получить их достаточно расписать уравнения (15) для соответствующих граничных значений i_n , раскрыть разностные операторы и опустить члены, указывающие на несуществующие стержни решётки. Если же на граничные узлы наложены геометрические связи, предписывающие обобщенным узловым смещениям значения U_n^* и Θ_n^* , то уравнения равновесия этих узлов следует заменить геометрическими граничными условиями вида

$$U_n = U_n^*, \quad \Theta_n = \Theta_n^*. \tag{16}$$

Заметим, что совокупное число величин N_{kj} и \bar{H}_{kj} совпадает с числом стержней и равно $6[I_1(I_2+1)(I_3+1) + (I_1+1)I_2(I_3+1) + (I_1+1)(I_2+1)I_3]$. Число же уравнений равновесия узлов свободной решётки, рассматриваемых как система линейных алгебраических уравнений, равно $6(I_1+1)(I_2+1)(I_3+1) - 6$ – шестикратному числу всех узлов, уменьшенному на число 6 уравнений предполагаемого глобального равновесия свободной решётки. Следовательно, степень статической неопределимости изучаемой упругой системы равна $6(2I_1I_2I_3 + I_1I_2 + I_2I_3 + I_1I_3)$.

Уравнения совместности полных деформаций стержней, наиболее просто устанавливаемые путем исключения узловых смещений и поворотов из геометрических соотношений (9), имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_{32}(\Delta_2^+ U_{31} + \Theta_{22}) &= \Delta_3^+ U_{21} - \Theta_{33}, & \Delta_3^+ \Theta_{21} &= -\Delta_2^+ \Theta_{31} & (i_n \in [0, I_n - 1 + \delta_{1n}]), \\ \Delta_1^+ U_{31} - \lambda_{13} \Delta_3^+ U_{11} &= \Theta_{12}, & \Delta_3^+ \Theta_{11} &= -\Delta_1^+ \Theta_{31} & (i_n \in [0, I_n - 1 + \delta_{2n}]), \\ \Delta_1^+ U_{21} - \lambda_{12} \Delta_2^+ U_{11} &= \Theta_{13}, & \Delta_2^+ \Theta_{11} &= \Delta_1^+ \Theta_{21} & (i_n \in [0, I_n - 1 + \delta_{3n}]). \end{aligned} \quad (17)$$

Область определения всех этих уравнений установлена из условия реализуемости входящих в них разностных операторов в области изменения параметров i_n для существующих стержней решётки.

Другой способ получения этих уравнений предполагает построение общего решения уравнений равновесия (15) и использование принципа Кастильяно.

Общее решение уравнений равновесия (15) представимо в виде суммы

$$N_{ij} = N_{ij}^0 + N_{ij}^p, \quad \bar{H}_{ij} = \bar{H}_{ij}^0 + \bar{H}_{ij}^p \quad (18)$$

общего решения N_{ij}^0, \bar{H}_{ij}^0 однородных уравнений равновесия

$$\begin{aligned} \Delta_1^- N_{11}^0 + \Delta_2^- N_{21}^0 + \Delta_3^- N_{31}^0 &= 0, \\ \Delta_1^- \bar{H}_{11}^0 - \lambda_{21}(\Delta_2^- \bar{H}_{21}^0 - N_{23}^0) + \lambda_{31}(\Delta_3^- \bar{H}_{31}^0 - N_{32}^0) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

и какого-то частного решения N_{ij}^p, \bar{H}_{ij}^p неоднородных уравнений

$$\begin{aligned} \Delta_1^- N_{11}^p + \Delta_2^- N_{21}^p + \Delta_3^- N_{31}^p + P_1^* &= 0, \\ \Delta_1^- \bar{H}_{11}^p - \lambda_{21}(\Delta_2^- \bar{H}_{21}^p - N_{23}^p) + \lambda_{31}(\Delta_3^- \bar{H}_{31}^p - N_{32}^p) + \bar{M}_1^* &= 0. \end{aligned}$$

Для отыскания частного решения можно воспользоваться какой-либо основной системой метода сил или эвристическими соображениями, принимая за основу решение вида

$$\begin{aligned} N_{ij}^p[i_n] &= \bar{H}_{ij}^p[i_1, i_2, i_3] = 0 \quad (i \neq j), \\ N_{11}^p[i_n] &= -\sum_{k=1}^{i_1} P_1^*[k, i_2, i_3], \quad \bar{H}_{11}^p[i_n] = -\sum_{k=1}^{i_1} \bar{M}_1^*[k, i_2, i_3]. \end{aligned}$$

Первые три уравнения системы (19) обратятся в тривиальные тождества, если положить

$$N_{11}^0 = \Delta_2^- \Phi_{13} - \Delta_3^- \Phi_{12}, \quad N_{21}^0 = \Delta_3^- \Phi_{11} - \Delta_1^- \Phi_{13}, \quad N_{31}^0 = \Delta_1^- \Phi_{12} - \Delta_2^- \Phi_{11}, \quad (20)$$

где $\Phi_{ij}[i_n]$ – 9 произвольных функций дискретных аргументов i_n . С помощью представлений (20) остальные уравнения системы (19) принимают вид

$$\Delta_1^- (\bar{H}_{11}^0 - \lambda_{21} \Phi_{33} - \lambda_{31} \Phi_{22}) - \Delta_2^- (\lambda_{21} \bar{H}_{21}^0 - \lambda_{31} \Phi_{21}) + \Delta_3^- (\lambda_{31} \bar{H}_{31}^0 + \lambda_{21} \Phi_{31}) = 0$$

и также обратятся в тривиальные тождества, если положить

$$\begin{aligned} \bar{H}_{11}^0 &= \Delta_2^- \Psi_{13} - \Delta_3^- \Psi_{12} + \lambda_{31} \Phi_{22} + \lambda_{21} \Phi_{33}, \\ \bar{H}_{21}^0 &= \lambda_{12} (\Delta_1^- \Psi_{13} - \Delta_3^- \Psi_{11}) + \lambda_{32} \Phi_{21}, \\ \bar{H}_{31}^0 &= \lambda_{13} (\Delta_1^- \Psi_{12} - \Delta_2^- \Psi_{11}) - \lambda_{23} \Phi_{31}. \end{aligned} \quad (21)$$

Здесь введены еще 9 произвольных функций $\Psi_{ij}[i_n]$ дискретных аргументов i_n . Таким образом, общее решение (18) уравнений равновесия (15) дается формулами

$$\begin{aligned} N_{11} &= \Delta_2^- \Phi_{13} - \Delta_3^- \Phi_{12} + N_{11}^p, & \bar{H}_{11} &= \Delta_2^- \Psi_{13} - \Delta_3^- \Psi_{12} + \lambda_{31} \Phi_{22} + \lambda_{21} \Phi_{33} + \bar{H}_{11}^p, \\ N_{21} &= \Delta_3^- \Phi_{11} - \Delta_1^- \Phi_{13} + N_{21}^p, & \bar{H}_{21} &= \lambda_{12} (\Delta_1^- \Psi_{13} - \Delta_3^- \Psi_{11}) + \lambda_{32} \Phi_{21} + \bar{H}_{21}^p, \\ N_{31} &= \Delta_1^- \Phi_{12} - \Delta_2^- \Phi_{11} + N_{31}^p, & \bar{H}_{31} &= \lambda_{13} (\Delta_1^- \Psi_{12} - \Delta_2^- \Psi_{11}) - \lambda_{23} \Phi_{31} + \bar{H}_{31}^p. \end{aligned} \quad (22)$$

Оно представлено с точностью до 18 функций Φ_{ij} , Ψ_{ij} , которые назовем *силовыми функциями*. Они играют здесь ту же роль, что и функции напряжений в теории упругости.

В области определения $i_k \in [0, I_k - \delta_{ik}]$ обобщенных сил $N_{ij}[i_k]$, $\bar{H}_{ij}[i_k]$ разностные операторы в формулах (22) реализуются для силовых функций $\Phi_{ij}[i_k]$, $\Psi_{ij}[i_k]$ на множестве значений их аргументов $i_k \in [\delta_{kj} - 1, I_k]$ – исходной области определения этих функций.

Подстановка решения (22) в уравнения равновесия граничных узлов свободной решётки приводит к равенствам

$$\text{при } i_1 = -1, I_1 \quad \Phi_{i_2} = \Phi_{i_3} = \Psi_{i_2} = \Psi_{i_3} = 0. \quad (23)$$

Именно этим краевым условиям должны удовлетворять силовые функции Φ_{ij}, Ψ_{ij} в случае свободной решётки. Область определения их нетривиальных значений – $i_n \in [0, I_n - 1 + \delta_{jn}]$, так что совокупное число таких значений равно $6(3I_1I_2I_3 + I_1I_2 + I_2I_3 + I_1I_3)$ и совпадает с числом уравнений совместности деформаций (17), трактуемых как система линейных алгебраических уравнений.

Предположим, что на упругую систему наложены идеальные связи. В этом случае принцип Кастильяно вырождается в начало наименьшей работы, согласно которому

$$\delta\Pi = \sum_{i_k=0}^{I_k-\delta_{ik}} \delta\Pi_1 + \dots = \sum_{i_1=0}^{I_1-1} \sum_{i_2=0}^{I_2} \sum_{i_3=0}^{I_3} \delta\Pi_1 + \dots = 0.$$

Здесь $\delta\Pi_1$ и $\delta\Pi$ — первые вариации потенциальных энергий 1-стержня и решётки, сумма с индексом суммирования i_k – краткая запись тройной суммы, показанной после второго знака равенства, а многоточие указывает на наличие еще двух сумм-слагаемых в виде тройных сумм, получаемых из предшествующего слагаемого круговой перестановкой индексов. Раскрывая в последнем равенстве $\delta\Pi_1$ с помощью формулы (10), выражений (см. (22))

$$\begin{aligned} \delta N_{1j} &= \Delta_2^- \delta\Phi_{j3} - \Delta_3^- \delta\Phi_{j2}, \\ \delta \bar{H}_{11} &= \Delta_2^- \delta\Psi_{13} - \Delta_3^- \delta\Psi_{12} + \lambda_{31} \delta\Phi_{22} + \lambda_{21} \delta\Phi_{33}, \\ \delta \bar{H}_{12} &= \lambda_{21} (\Delta_2^- \delta\Psi_{23} - \Delta_3^- \delta\Psi_{22}) - \lambda_{31} \delta\Phi_{12}, \\ \delta \bar{H}_{13} &= -\lambda_{31} (\Delta_2^- \delta\Psi_{33} - \Delta_3^- \delta\Psi_{32}) + \lambda_{21} \delta\Phi_{13}, \end{aligned}$$

и применяя к полученному результату круговую перестановку индексов, после суммирования по частям [1] приходим к равенству

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \sum_{i_k=\delta_{1k}-1}^{I_k} \left\{ l_2 \left[\lambda_{32} (\Delta_2^+ U_{31} + \Theta_{22}) - \Delta_3^+ U_{21} + \Theta_{33} \right] \delta\Phi_{11} - (\Delta_3^+ \Theta_{21} + \Delta_2^+ \Theta_{31}) \delta\Psi_{11} \right\} + \\ &+ \sum_{i_3=\delta_{2k}-1}^{I_k} \left[l_3 (\lambda_{13} \Delta_3^+ U_{11} + \Theta_{12} - \Delta_1^+ U_{31}) \delta\Phi_{12} + (\Delta_3^+ \Theta_{11} + \Delta_1^+ \Theta_{31}) \delta\Psi_{12} \right] + \\ &+ \sum_{i_k=\delta_{3k}-1}^{I_k} \left[l_2 (\Delta_1^+ U_{21} - \lambda_{12} \Delta_2^+ U_{11} - \Theta_{13}) \delta\Phi_{13} + (\Delta_1^+ \Theta_{21} - \Delta_2^+ \Theta_{11}) \delta\Psi_{13} \right] + \dots = 0 \end{aligned}$$

И здесь многоточие указывает на наличие еще шести сумм-слагаемых, получаемых из приведенных сумм круговой перестановкой индексов. Кроме того, здесь предполагается, что в выражениях, стоящих перед вариациями силовых

функций, отвечающих значениям i_n , фигурирующим в статических краевых условиях (23), величины, указывающие на несуществующие стержни, должны быть опущены. Эти усеченные выражения порождают естественные краевые условия.

Приравнявая нулю выражения, стоящие перед вариациями силовых функций в области их нетривиальных значений приходим к уравнениям (17).

2. ПОСТАНОВКА ДИСКРЕТНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Проведенный выше линейный упругий анализ показывает, что напряженно-деформированное состояние пространственной ортогональной решётки описывается безразмерными смещениями \bar{U}_n и поворотами Θ_n узлов, полными деформациями U_{mn} , Θ_{mn} и обобщенными внутренними силами N_{mn} , \bar{H}_{mn} стержней. Все эти зависимые величины – функции дискретных аргументов i_n и связаны между собой геометрическими соотношениями (9), физическими зависимостями (12), (13), уравнениями равновесия (15) и уравнениями совместности полных деформаций (17). Названные равенства образуют полную замкнутую систему уравнений линейной теории пространственной упругой ортогональной решётки, в которой усматривается дискретный аналог моментной теории упругости [13].

Примем за основные, определяемые в первую очередь, неизвестные безразмерные узловые смещения $\bar{U}_k[i_n]$ и повороты $\Theta_k[i_n]$. Подстановка в зависимости (13) выражений (9) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} N_{11} &= g_{10}\Delta_1^+\bar{U}_1 + N_{11}^*, & N_{21} &= 6\bar{g}_{23}\left[2\lambda_{12}\Delta_2^+\bar{U}_1 + (1+\nabla_2^+)\Theta_3\right] + N_{21}^*, \\ N_{31} &= 6\bar{g}_{32}\left[2\lambda_{13}\Delta_3^+\bar{U}_1 - (1+\nabla_3^+)\Theta_2\right] + N_{31}^*, \\ N_{23} &= 6\bar{g}_{21}\left[2\lambda_{32}\Delta_2^+\bar{U}_3 - (1+\nabla_2^+)\Theta_1\right] + N_{23}^*, \\ N_{32} &= 6\bar{g}_{31}\left[2\lambda_{23}\Delta_3^+\bar{U}_2 + (1+\nabla_3^+)\Theta_1\right] + N_{32}^*, \\ \bar{H}_{11} &= \bar{g}_{11}\Delta_1^+\Theta_1 + \bar{H}_{11}^*, & \bar{H}_{21} &= 2\bar{g}_{21}\left[3\lambda_{32}\Delta_2^+\bar{U}_3 - (1+2\nabla_2^+)\Theta_1\right] + \bar{H}_{21}^*, \\ \bar{H}_{31} &= 2\bar{g}_{31}\left[3\lambda_{23}\Delta_3^+\bar{U}_2 + (1+2\nabla_3^+)\Theta_1\right] + \bar{H}_{31}^*. \end{aligned}$$

Подставляя их в уравнения равновесия внутренних узлов (15), приходим к системе шести уравнений в частных разностях

$$\begin{aligned} R_1\bar{U}_1 - L_{12}\Theta_2 + L_{13}\Theta_3 + F_1 &= 0, \\ -T_{12}\bar{U}_2 + T_{13}\bar{U}_3 + S_1\Theta_1 + G_1 &= 0, \end{aligned} \quad (24)$$

в которой введены разностные операторы 2-го порядка

$$\begin{aligned} R_1 &= g_{10}\Delta_1^2 + 12(\lambda_{12}\bar{g}_{23}\Delta_2^2 + \lambda_{13}\bar{g}_{32}\Delta_3^2), \\ L_{12} &= 6\bar{g}_{32}(\nabla_3^+ - \nabla_3^-), & L_{13} &= 6\bar{g}_{23}(\nabla_2^+ - \nabla_2^-), \\ T_{12} &= 6\lambda_{21}\bar{g}_{31}(\nabla_3^+ - \nabla_3^-), & T_{13} &= 6\lambda_{31}\bar{g}_{21}(\nabla_2^+ - \nabla_2^-), \\ S_1 &= \bar{g}_{11}\Delta_1^2 - 2\left[\lambda_{21}\bar{g}_{21}(\Delta_2^2 + 6) + \lambda_{31}\bar{g}_{31}(\Delta_3^2 + 6)\right] \end{aligned} \quad (25)$$

и обусловленные внешними воздействиями величины

$$F_1 = P_1^* + \sum_{k=1}^3 \Delta_k^- N_{k1}^*, \quad G_1 = \bar{M}_1^* + \sum_{k=1}^3 (1 - 2\delta_{k2}) \lambda_{k1} \Delta_k^- \bar{H}_{k1}^* + \lambda_{21} N_{23}^* - \lambda_{31} N_{32}^*.$$

Статические граничные условия получаются по той же схеме из уравнений равновесия граничных узлов. Однако более предпочтителен иной путь. Предположим, что жесткости стержней – функции параметров i_n . В таком случае операторы (25) принимают вид

$$\begin{aligned} R_1 &= \Delta_1^- g_{10} \Delta_1^+ + 12(\lambda_{12} \Delta_2^- \bar{g}_{23} \Delta_2^+ + \lambda_{13} \Delta_3^- \bar{g}_{32} \Delta_3^+), \\ L_{12} &= 6\Delta_3^- \bar{g}_{32} (1 + \nabla_3^+), \quad L_{13} = 6\Delta_2^- \bar{g}_{23} (1 + \nabla_2^+), \\ T_{12} &= 6\lambda_{21} (1 + \nabla_3^-) \bar{g}_{31} \Delta_3^+, \quad T_{13} = 6\lambda_{31} (1 + \nabla_2^-) \bar{g}_{21} \Delta_2^+, \\ S_1 &= \Delta_1^- \bar{g}_{11} \Delta_1^+ + 2\lambda_{21} [\Delta_2^- \bar{g}_{21} (1 + 2\nabla_2^+) - 3\bar{g}_{21} (1 + \nabla_2^+)] + \\ &\quad + 2\lambda_{31} [\Delta_3^- \bar{g}_{31} (1 + 2\nabla_3^+) - 3\bar{g}_{31} (1 + \nabla_3^+)]. \end{aligned} \quad (26)$$

И теперь, чтобы получить статические граничные условия, достаточно расписать уравнения (24) с разностными операторами (26) для граничных значений i_n , опустить слагаемые с жесткостями, указывающими на несуществующие стержни, и вернуть оставшимся жесткостям их прежние значения. Описанной процедурой можно воспользоваться для ограничения деформирования или исключения отдельных стержней.

Геометрические граничные условия ставятся очевидным образом (см. (16)).

Не касаясь деталей, заметим, что при постановке дискретных краевых задач в обобщенных внутренних силах за основные неизвестные удобно принять силовые функции. С помощью зависимостей (12) и общего решения (22) уравнений равновесия (15) можно получить формулы, выражающие полные деформации через силовые функции. Подстановка этих формул в уравнения совместности (17) приводит к системе 18 уравнений в частных разностях с таким же количеством искомых силовых функций. Эти уравнения выглядят громоздко и здесь не приводятся.

Изложенная выше теория допускает обобщения в различных направлениях. Остановимся на принципиальной стороне обобщения, связанного с искусственным введением несовместностей смещений и поворотов смежных элементов решётки в местах их сочленения. Заменяем геометрические условия сопряжения (1), (7) равенствами

$$u_{1j}(0; i_n) = U_j[i_n] + d_{1j}^{(0)}[i_n], \quad \theta_{1j}(0; i_n) = (1 - 2\delta_{2j}) \Theta_j[i_n] + \mathcal{G}_{1j}^{(0)}[i_n], \quad (27)$$

$$u_{1j}(l_1; i_n) = \nabla_1^+ U_j[i_n] - d_{1j}^{(1)}[i_n], \quad \theta_{1j}(l_1; i_n) = (1 - 2\delta_{2j}) \nabla_1^+ \Theta_j[i_n] - \mathcal{G}_{1j}^{(1)}[i_n], \quad (28)$$

где $d_{1j}^{(s)}$ и $\mathcal{G}_{1j}^{(s)}$ ($s = 0, 1$) – взаимные смещения и повороты соответственно вдоль и вокруг оси x_j начал ($s = 0$) и концов ($s = 1$) 1-стержней с примыкающими к ним узлами решётки. В результате претерпят изменения формулы левого столбца выражений (5), где теперь вместо U_j и Θ_j будут соответствующие правые части равенств (27). Раскрывая с помощью этих формул условия (28), вновь приходим к зависимостям (8), в которых теперь

$$U_{1j}^* = l_1^{-1} u_{1j}^*(l_1) + d_{1j}, \quad \Theta_{1j}^* = \theta_{1j}^*(l_1) + \mathcal{G}_{1j},$$

$$d_{1j} = d_{1j}^{(0)} + d_{1j}^{(1)}, \quad \mathcal{G}_{1j} = \mathcal{G}_{1j}^{(0)} + \mathcal{G}_{1j}^{(1)}.$$

Введение в определяющие соотношения теории несовместностей в явном виде дает возможность влиять непосредственно на характер взаимодействия элементов решётки и тем самым расширить круг задач, которые могут быть изучены как в рамках построенных выше теорий, так и рассматриваемых ниже их обобщений. Если, например, потребовать, чтобы все несовместности, исключая величины $\mathcal{G}_{12}^{(0)}$ и $\nabla_1^- \mathcal{G}_{12}^{(1)}$, отвечающие некоторым фиксированным значениям i_n , равнялись нулю вместе с M_2 , M_{12} и $\nabla_1^- m_{12}(l_1)$ при тех же фиксированных i_n , то в итоге приходим к задаче о решётке с шарнирным вокруг оси x_2 соединением 1–стержней в узле, выделенном фиксированными значениями i_n . Очевидные рассуждения указывают на способ полного нарушения связей (повреждения) отдельных элементов решётки. Необходимо лишь следить за тем, чтобы вводимые повреждения и взаимные подвижности соседних элементов решётки в местах их сочленения не влекли за собой ее геометрическую изменчивость.

Путем соответствующей регламентации несовместностей можно учесть самые разнообразные эффекты. Среди них выделим упругий или иной разрывный в отношении обобщенных смещений характер взаимодействия элементов решётки, нагрев и (или) начальную напряженность или деформированность всех или отдельных стержней, а также сводящиеся к ним технологические несовершенства.

Другое обобщение свяжем с распространением построенной теории на задачи динамики. Приближенный, способ получения уравнений движения дает метод сосредоточенных масс. В соответствии с этим методом и принципом Даламбера в уравнения равновесия узлов (15) следует ввести инерционные члены вида $-M^* \ddot{U}_j$ и $-I_j^* \ddot{\Theta}_j$ (точки сверху указывают на дифференцирование по времени). Здесь M^* и I^* – приведенные к узлам массы и массовые моменты инерции относительно осей x_j , значения которых зависят от схемы дискретизации распределенных инерционных характеристик стержней и собственных масс узлов, если таковые имеются в наличии. Первые инерционные члены вносятся в силовые, а вторые – в моментные уравнения равновесия. Строгий учет инерционных свойств решётки требует поэлементного динамического анализа. Для этого, руководствуясь принципом Даламбера, нужно ввести учитываемые, уже как распределенные, инерционные силы изолированных стержней в уравнения их равновесия и скорректировать соответствующим образом уравнения равновесия узлов.

Отметим еще, что обобщение обсуждаемых теоретических результатов на случай дискретной геометрической и физической неоднородности решётки, когда все или отдельные величины l_j и g_{ij} являются функциями i_n , сводится к учету некоммутативности переменных параметров и разностных операторов.

3. НЕКОТОРЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Проиллюстрируем постановку дискретных краевых задач в обобщенных узловых смещениях на примере упругой системы с одним рядом внутренних узлов и 1–стержней, показанной в двух проекциях на рис.4. Все граничные узлы системы закреплены, и предполагается, что внешняя нагрузка на ее элементы произвольная.

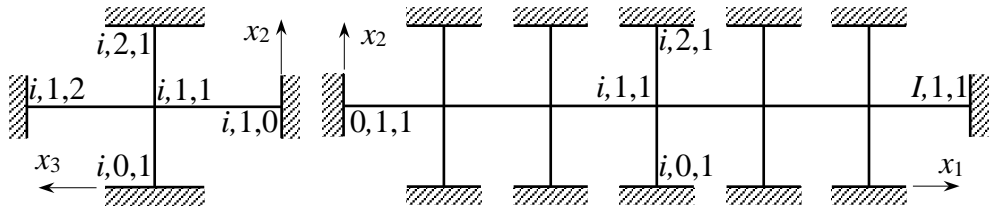


Рис.4.

В данном случае $I_2 = I_3 = 2$, и обобщенные узловые смещения, полные деформации и внутренние силы 1-стержней – функции одного дискретного аргумента i_1 . Условимся при написании его, предельного его значения I_1 и связанных с ним разностных операторов опускать индекс 1.

Таким образом, $\bar{U}_n[i] = \bar{U}_n[i, 1, 1]$, $\Theta_n[i] = \Theta_n[i, 1, 1]$ ($i \in [0, I]$), так что для k -стержней имеем

$$\begin{aligned} U_{1n}[i] &= U_{1n}[i, 1, 1], & \Theta_{1n}[i] &= \Theta_{1n}[i, 1, 1], \\ N_{1n}[i] &= N_{1n}[i, 1, 1], & \bar{H}_{1n}[i] &= \bar{H}_{1n}[i, 1, 1] \quad (i \in [0, I-1]), \\ U_{2n}[i, i_2] &= U_{2n}[i, i_2, 1], & \Theta_{2n}[i, i_2] &= \Theta_{2n}[i, i_2, 1], \\ N_{2n}[i, i_2] &= N_{2n}[i, i_2, 1], & \bar{H}_{2n}[i, i_2] &= \bar{H}_{2n}[i, i_2, 1] \quad (i_2 = 0, 1), \\ U_{3n}[i, i_3] &= U_{3n}[i, 1, i_3], & \Theta_{3n}[i, i_3] &= \Theta_{3n}[i, 1, i_3], \\ N_{3n}[i, i_3] &= N_{3n}[i, 1, i_3], & \bar{H}_{3n}[i, i_3] &= \bar{H}_{3n}[i, 1, i_3] \quad (i_3 = 0, 1; i \in [1, I-1]). \end{aligned}$$

Согласно выражениям (9)

$$\begin{aligned} U_{1n}[i] &= \lambda_{n1} \Delta^+ \bar{U}_n + \delta_{3n} \Theta_2 - \delta_{2n} \Theta_3, & \Theta_{1n}[i] &= (1 - 2\delta_{2n}) \Delta^+ \Theta_n, \\ U_{2n}[i, i_2] &= (-1)^{i_2} \lambda_{n2} \bar{U}_n + \delta_{i_2} (\delta_{1n} \Theta_3 - \delta_{3n} \Theta_1), & \Theta_{2n}[i, i_2] &= (-1)^{i_2} (1 - 2\delta_{3n}) \Theta_n, \\ U_{3n}[i, i_3] &= (-1)^{i_3} \lambda_{n3} \bar{U}_n + \delta_{i_3} (\delta_{2n} \Theta_1 - \delta_{1n} \Theta_2), & \Theta_{3n}[i, i_3] &= (-1)^{i_3} (1 - 2\delta_{1n}) \Theta_n, \end{aligned}$$

и поэтому (см. (13))

$$\begin{aligned} N_{11}[i] &= g_{10} \Delta^+ \bar{U}_1 + N_{11}^*, \\ N_{12}[i] &= 6\bar{g}_{13} \left[2\lambda_{21} \Delta^+ \bar{U}_2 - (\nabla^+ + 1) \Theta_3 \right] + N_{12}^*, \\ N_{13}[i] &= 6\bar{g}_{12} \left[2\lambda_{31} \Delta^+ \bar{U}_3 + (\nabla^+ + 1) \Theta_2 \right] + N_{13}^*, \\ N_{21}[i, i_2] &= 6\bar{g}_{23} \left[2(-1)^{i_2} \lambda_{12} \bar{U}_1 + \Theta_3 \right] + N_{21}^*, \\ N_{22}[i, i_2] &= (-1)^{i_2} g_{20} \bar{U}_2 + N_{22}^*, \\ N_{23}[i, i_2] &= 6\bar{g}_{21} \left[2(-1)^{i_2} \lambda_{32} \bar{U}_3 - \Theta_1 \right] + N_{23}^* \quad (i_2 = 0, 1), \\ N_{31}[i, i_3] &= 6\bar{g}_{32} \left[2(-1)^{i_3} \lambda_{43} \bar{U}_1 - \Theta_2 \right] + N_{31}^*, \\ N_{32}[i, i_3] &= 6\bar{g}_{31} \left[2(-1)^{i_3} \lambda_{23} \bar{U}_2 + \Theta_1 \right] + N_{32}^*, \\ N_{33}[i, i_3] &= (-1)^{i_3} g_{30} \bar{U}_3 + N_{33}^* \quad (i_3 = 0, 1), \\ \bar{H}_{11}[i] &= \bar{g}_{11} \Delta^+ \Theta_1 + \bar{H}_{11}^*, \\ \bar{H}_{12}[i] &= 2\bar{g}_{12} \left[3\lambda_{31} \Delta^+ \bar{U}_3 + (2\nabla^+ + 1) \Theta_2 \right] + \bar{H}_{12}^*, \\ \bar{H}_{13}[i] &= 2\bar{g}_{13} \left[3\lambda_{21} \Delta^+ \bar{U}_2 - (2\nabla^+ + 1) \Theta_3 \right] + \bar{H}_{13}^*, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{21}[i, i_2] &= 2\bar{g}_{21} \left[3(-1)^{i_2} \lambda_{32} \bar{U}_3 - (2 - i_2) \Theta_1 \right] + \bar{H}_{21}^*, \\ \bar{H}_{22} [i, i_2] &= (-1)^{i_2} \bar{g}_{22} \Theta_2 + \bar{H}_{22}^*, \\ \bar{H}_{23}[i, i_2] &= 2\bar{g}_{23} \left[3(-1)^{i_2} \lambda_{12} \bar{U}_1 + (2 - i_2) \Theta_3 \right] + \bar{H}_{23}^* \quad (i_2 = 0, 1), \\ \bar{H}_{31}[i, i_3] &= 2\bar{g}_{31} \left[3(-1)^{i_3} \lambda_{23} \bar{U}_2 + (2 - i_3) \Theta_1 \right] + \bar{H}_{31}^*, \\ \bar{H}_{32}[i, i_3] &= 2\bar{g}_{32} \left[3(-1)^{i_3} \lambda_{13} \bar{U}_1 - (2 - i_3) \Theta_2 \right] + \bar{H}_{32}^*, \\ \bar{H}_{33}[i, i_3] &= (-1)^{i_3} \bar{g}_{33} \Theta_3 + \bar{H}_{33}^* \quad (i_3 = 0, 1). \end{aligned}$$

Уравнения равновесия внутренних узлов (24) после преобразований порождают 2 независимые группы обыкновенных разностных уравнений. Каждая группа в свою очередь распадается на пары схожих уравнений.

Введем разностные операторы 2-го порядка

$$\begin{aligned} R_n^- &= \nabla^+ - 2\beta_n + \nabla^- \quad (n = 1, 2, 3, 4), \\ S_n^+ &= \nabla^+ + 2\beta_n + \nabla^- \quad (n = 5, 6), \quad L = \nabla^+ - \nabla^-, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 1 + 12g_{10}^{-1} (\lambda_{12} \bar{g}_{23} + \lambda_{13} \bar{g}_{32}), \quad \beta_4 = 1 + 4\bar{g}_{11}^{-1} (\lambda_{21} \bar{g}_{21} + \lambda_{31} \bar{g}_{31}), \\ \beta_2 &= 1 + \bar{g}_{13}^{-1} (\frac{1}{12} \lambda_{12} g_{20} + \lambda_{13} \bar{g}_{31}), \quad \beta_5 = 2 + \frac{1}{2} \bar{g}_{12}^{-1} (\lambda_{21} \bar{g}_{22} + 4\lambda_{31} \bar{g}_{32}), \\ \beta_3 &= 1 + \bar{g}_{12}^{-1} (\frac{1}{12} \lambda_{13} g_{30} + \lambda_{12} \bar{g}_{21}), \quad \beta_6 = 2 + \frac{1}{2} \bar{g}_{13}^{-1} (\lambda_{31} \bar{g}_{33} + 4\lambda_{21} \bar{g}_{23}). \end{aligned}$$

Тогда пара уравнений первой группы, вытекающих из 1-го и 4-го уравнений (24), представляет собой обыкновенные разностные уравнения 2-го порядка

$$R_1^- \bar{U}_1[i] = F_1^*[i] \quad (i \in [1, I - 1]), \tag{29}$$

$$R_4^- \Theta_1[i] = G_1^*[i] \quad (i \in [1, I - 1]). \tag{30}$$

Первое из них описывает растяжение-сжатие, а второе – кручение 1-стержней. Вторая группа включает в себя две схожие системы обыкновенных разностных уравнений. Одну систему порождают 2-е и 6-е уравнения (24). Она имеет вид

$$\begin{aligned} R_2^- \bar{U}_2[i] - \frac{1}{2} \lambda_{12} L \Theta_3[i] &= F_2^*[i], \\ -3\lambda_{21} L \bar{U}_2[i] + S_6^+ \Theta_3[i] &= G_3^*[i] \quad (i \in [1, I - 1]) \end{aligned} \tag{31}$$

и описывает изгиб 1-стержней в плоскости $x_1 x_2$. Другую систему образуют уравнения

$$\begin{aligned} R_3^- \bar{U}_3[i] + \frac{1}{2} \lambda_{13} L \Theta_2[i] &= F_3^*[i], \\ 3\lambda_{31} L \bar{U}_3[i] + S_5^+ \Theta_2[i] &= G_2^*[i] \quad (i \in [1, I - 1]), \end{aligned} \tag{32}$$

вытекающие из 3-го и 5-го уравнений (24). Они описывают изгиб 1-стержней в плоскости $x_1 x_3$. Уравнениям (29)-(32), в правых частях которых содержатся величины

$$\begin{aligned} F_n^*[i] &= - \left[\delta_{1n} g_{10}^{-1} + \frac{1}{12} (\delta_{2n} \lambda_{12} \bar{g}_{13}^{-1} + \delta_{3n} \lambda_{13} \bar{g}_{12}^{-1}) \right] F_n[i, 1, 1], \\ G_n^*[i] &= \frac{1}{2} (1 - 3\delta_{n1}) \lambda_{n1} \bar{g}_{1n}^{-1} G_n[i, 1, 1], \end{aligned}$$

сопутствуют геометрические краевые условия

$$\bar{U}_n[0] = \bar{U}_n[I] = 0, \quad \Theta_n[0] = \Theta_n[I] = 0. \tag{33}$$

Решение уравнения (29), удовлетворяющее условиям (33) для $\bar{U}_1[i]$, имеет вид [14,15]

$$\bar{U}_1[i] = \bar{U}_1^*[i] - \bar{U}_1^*[i] \frac{u_{i-1}}{u_{i-1}} \quad (i \in [0, I]), \quad \bar{U}_1^*[i] = \sum_{k=1}^{i-1} u_{i-k-1} F_1^*[k], \quad (34)$$

где $u_i = u_i(\beta_1)$ – полином Чебышёва 2-го рода степени i относительно параметра β_1 , обладающий свойствами

$$u_i = u_i(\beta_1) = \frac{\mu_1^{i+1} - \mu_1^{-i-1}}{\mu_1 - \mu_1^{-1}} = -u_{-i-2}, \quad \mu_1^{\pm 1} = \beta_1 \pm \sqrt{\beta_1^2 - 1},$$

$$u_{-1} = 0, \quad u_0 = 1, \quad R_1^- u_{i-1} = u_i - 2\beta_1 u_{i-1} + u_{i-2} = 0.$$

Решение уравнения (30), подчиненное условиям (33) для $\Theta_1[i]$, получается из решения (34) заменой в нем $\bar{U}_1[i]$, $\bar{U}_1^*[i]$, β_1 и $F_1^*[k]$ на $\Theta_1[i]$, $\Theta_1^*[i]$, β_4 и $G_1^*[k]$ соответственно.

Решение системы (31) после выполнения соответствующих ей краевых условий (33) принимает вид [14,15]

$$\begin{aligned} \bar{U}_2[i] &= \bar{U}_2^*[i] - (\bar{U}_2^*[I] F_{AB}[i, I] + \Theta_3^*[I] F_{AA}[I, i]) F_{AB}^{-1}[I, I], \\ \Theta_3[i] &= \Theta_3^*[i] - (\bar{U}_2^*[I] F_{BB}[i, I] + \Theta_3^*[I] F_{AB}[I, i]) F_{AB}^{-1}[I, I]. \end{aligned} \quad (35)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \bar{U}_2^*[i] &= -\sum_{k=1}^{i-1} (2S_6^+ \sigma_{i-k} \cdot F_2^*[k] + \lambda_{12} L \sigma_{i-k} \cdot G_3^*[k]), \\ \Theta_3^*[i] &= -\sum_{k=1}^{i-1} (6\lambda_{21} L \sigma_{i-k} \cdot F_2^*[k] + 2R_2^- \sigma_{i-k} \cdot G_3^*[k]), \end{aligned} \quad (36)$$

где точки под знаком суммы ограничивают области действия предшествующих разностных операторов на функцию σ_{i-k} в отношении индекса суммирования k .

Кроме того, в формулах (35) использованы сокращения

$$F_{AB}[i, j] = A_1[i] B_2[j] - A_2[j] B_1[i], \quad F_{AA}[i, j] = A_1[i] A_2[j] - A_1[j] A_2[i],$$

$$F_{BB}[i, j] = B_1[i] B_2[j] - B_1[j] B_2[i], \quad A_1[i] = (3L + 2S_6^+) \sigma_i,$$

$$A_2[i] = 2\lambda_{12} (\nabla^+ + \beta_6) \sigma_i, \quad B_1[i] = 12\lambda_{21} (\nabla^+ - \beta_2) \sigma_i, \quad B_2[i] = (3L + 2R_2^-) \sigma_i,$$

в которых

$$\sigma_i = -\sigma_{-i} = \frac{u_{i-1}^{(1)} - u_{i-1}^{(2)}}{2(\eta_1 - \eta_2)}, \quad u_i^{(\alpha)} = u_i(\eta_\alpha) = \frac{\mu_\alpha^{i+1} - \mu_\alpha^{-i-1}}{\mu_\alpha - \mu_\alpha^{-1}}, \quad \mu_\alpha^{\pm 1} = \eta_\alpha \pm \sqrt{\eta_\alpha^2 - 1},$$

$$\eta_\alpha = \beta_6 - \beta_2 - (-1)^\alpha \sqrt{(\beta_6 - \beta_2)^2 - 2\beta_2\beta_6 + 3} \quad (\alpha = 1, 2),$$

$$\sigma_0 = \sigma_{\pm 1} = 0, \quad \sigma_2 = 1, \quad (3L^2 - 2K_2^- K_6^+) \sigma_i = 0.$$

Решение системы (32), подчиненное соответствующим условиям (33), получается из решения (35), (36) заменой $\bar{U}_2[i]$, $\Theta_3[i]$, λ_{12} , λ_{21} , $F_2^*[i]$, $G_3^*[i]$, β_2 и β_6 на $\bar{U}_3[i]$, $\Theta_2[i]$, $-\lambda_{13}$, $-\lambda_{31}$, $F_3^*[i]$, $G_2^*[i]$, β_3 и β_5 соответственно.

Подчеркнем, что построенные точные аналитические решения предполагают, что на многократно статически неопределимую систему действуют произвольные внешние воздействия.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bleich F., Melan E. *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik*. – Berlin: Springer, 1927. – 350 p.
2. Рабинович И. М. *Основы строительной механики стержневых систем*. – М.: Госстройиздат, 1960. – 519 с.
3. *Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем*. Сборник статей. – Л.: Судпромгиз, 1961. – 876 с.
4. Аргирис Дж. *Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц*. – М.: Стройиздат, 1968. – 241 с.
5. Meek J.L. *Matrix structural analyses*. New York et al.: McGraw-Hill Book Co., 1971, – 628 p.
6. Livesley R.K. *Matrix methods of structural analysis*. Oxford-New York-Toronto Sydney-Braunschweig: Pergamon Press, 1975. – 277 p.
7. Пшеничников Г.И. *Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок*. – М.: Наука, 1982. – 352 с.
8. Шулькин Ю.П. *Теория упругих стержневых конструкций*. – М.: Наука, 1984. – 272 с.
9. Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
10. Образцов И.Ф., Рыбаков Л.С., Мишустин И.В. *О методах анализа деформирования стержневых упругих систем регулярной структуры // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 1996. – Т.2. – №2. – С.3-14.
11. Рыбаков Л.С. *Линейная теория плоской ортогональной решетки //Изв. РАН. МТТ*. – 1999. – №4. – С.174-189.
12. Рыбаков Л.С. *Линейная теория упругого призматического каркаса //Изв. РАН. МТТ*. – 2001. – №4. – С.106-118.
13. Новацкий В. *Теория упругости*. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
14. *Математические основы теории автоматического регулирования*. Т.2 / Под ред. Б.К.Чемоданова. – М.: Высшая школа, 1977. – 453 с.
15. Jordan C. *Calculus of finite differences*. – New York: Chelsea Publishing Company, 1950. – 652 p.

REFERENCES

1. Bleich F., Melan E. *Die gewöhnlichen und partiellen Differenzgleichungen der Baustatik*. Berlin, Springer, 1927, 350 p.
2. Rabinovich I.M. *Osnovy stroitel'noi mekhaniki sterzhnevyykh sistem [Fundamentals of structural mechanics of rod systems]*. Moskva: Gosstroizdat, 1960, 519 p.
3. *Sovremennyye metody rascheta slozhnykh staticheski neopredelimykh sistem. Sbornik statei*. Pervod s angliiskogo pod redaktsiei A.P. Filina [*Modern methods of calculation of complex statically indeterminate systems. A collection of articles*]. Leningrad: Sudpromgiz, 1961, 519 p.
4. Argyris J.H. *Recent advances in matrix methods of structural analysis*. Oxford-London-New York-Paris, Pergamon Press, 1964.
5. Meek J.L. *Matrix structural analyses*. New York et al.: McGraw-Hill Book Co., 1971, 628 p.
6. Livesley R.K. *Matrix methods of structural analysis*. Oxford-New York-Toronto Sydney-Braunschweig: Pergamon Press, 1975, 277 p.

7. Pshenichnov G.I. *Teoriia tonkikh uprugikh setchatykh obolochek i plastinok [Theory of thin elastic latticed shells and plates]*. – Moskva: Nauka, 1982, 352 p.
8. Shul'kin Iu.P. *Teoriia uprugikh sterzhnevnykh konstruksii [Theory of elastic rod structures]*. – Moskva: Nauka, 1984, 272 p.
9. Vasil'ev V.V. *Mekhanika konstruksii iz kompozitsionnykh materialov [Mechanics of structures of composite materials]*. – Moskva: Mashinostroenie, 1988, 272 p.
10. Obratsov I.F., Rybakov L.S., Mishustin I.V. *O metodakh analiza deformirovaniia sterzhnevnykh uprugikh sistem reguliarnoi struktury [Methods of analysis of the deformation of elastic rod systems with regular structure]*. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*. 1996, Vol.2, No.2, Pp.3-14.
11. Rybakov L.S. *Lineinaia teoriia ploskoi ortogonal'noi reshetki [Linear theory of a flat orthogonal grid]*. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 1999, No.4, Pp.174-189.
12. Rybakov L.S. *Lineinaia teoriia uprugogo prizmaticheskogo karkasa [Linear theory of an elastic prismatic framework]*. *Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela*, 2001, No.4, Pp.106-118.
13. Nowacki W. *Teoria sprężystości [In Polish]*. Warszawa: PWN, 1970.
14. *Matematicheskie osnovy teorii avtomaticheskogo regulirovaniia. T.2 Pod redaktsiei B.K. Chemoanova [Mathematical foundations of theory of automatic control. Vol.2]*. Moskva: Vysshiaia shkola, 1977, 453 p.
15. Jordan C. *Calculus of finite differences*. New York, Chelsea Publishing Company, 1950, 652 p.

Поступила в редакцию 6 июля 2016 года.

Сведения об авторе:

Рыбаков Леонид Сергеевич – д.ф.-м.н., проф., Кафедра «Прочность авиационных и ракетно-космических конструкций», Московский авиационный институт, г. Москва, Россия; e-mail: rybakov.38@mail.ru