УДК 539.3

ИНЖЕНЕРНАЯ ТЕОРИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ПЛАСТИН ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ*

Горбачев В.И.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Для построения инженерной теории деформирования неоднородных пластин используется интегральная формула, по которой перемещения точек тела в исходной трехмерной задаче теории упругости неоднородного тела представляется через перемещения точек в такой же задаче, только для однородного упругого тела (сопутствующая задача). Из интегральной формулы вытекает эквивалентное представление перемещений в виде бесконечных рядов по производным от перемещений в сопутствующем однородном теле. Коэффициенты при производных в этих рядах называются структурными функциями композита. Они находятся из рекуррентных уравнений в области неоднородности упругих модулей. Структурные функции существенно зависят от того как описывается зависимость модулей упругости от координат точки тела. В том случае, когда свойства неоднородного тела совпадают со свойствами сопутствующего тела, все структурные функции обращаются в нуль. Предполагается, что мы умеем решать (аналитически или численно) вспомогательные задачи, то есть структурные функции считаются известными. Пусть исходное неоднородное тело представляет собой тонкую и жесткую пластину, у которой свойства меняются от точки к точке. Сопутствующее однородное тело также представляет собой пластину идентичную по геометрии исходной пластине и нагруженную точно так же, как и исходная пластина. Перемещения в сопутствующей пластине определяются приближенно, в соответствии с гипотезой Кирхгофа-Лява, через три компоненты вектора перемещений точек срединной поверхности. В соответствии с интегральной формулой и вытекающими из нее рядами, перемещения, деформации и напряжения в неоднородной пластине представлены рядами по всевозможным производным от перемещений срединной плоскости сопутствующей пластины. Коэффициенты рядов выражаются через структурные функции. Таким образом, *в неоднородной пластине нормальное к срединной плоскости волокно после деформации меняет свою длину, перестает быть прямолинейным и перпендикулярным к срединной, деформированной поверхности. Характер и степень этих изменений зависит от типа неоднородности и описывается с помощью структурных функций.* Затем, по продольным напряжениям, находятся внутренние силовые факторы, распределенные в срединной плоскости. Выражения для тензоров продольных сил и изгибающих моментов в срединной плоскости представлены в виде рядов по всевозможным частным производным возрастающего порядка от тензора деформаций и тензора кривизн срединной плоскости. В классической теории пластин внутренние силовые факторы выражаются непосредственно через продольные деформации и кривизны базовой поверхности. Эти соотношения называются определяющими соотношениями. *В случае неоднородных пластин определяющие соотношения учитывают влияние на силовые факторы не только самих деформаций и кривизн срединной плоскости, но и их производных всех порядков. Коэффициенты при производных q-го порядка (q=0,1,2,…) являются тензорами q+4 ранга.*

* *Работа выполнена в ФГБОУ ВПО "ТГПУ им. Л.Н.Толстого при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект 14.577.21.0207, уникальный идентификатор проекта RFMEFI57715X0207).*

Они называются жесткостями q-го порядка. Далее из уравнений равновесия для внутренних силовых факторов следуют уравнения для перемещений точек срединной плоскости. В общем случае эти уравнения представляют собой системы связанных дифференциальных уравнений бесконечного порядка. Затем эти уравнения сводятся к рекуррентным системам из трех связанных дифференциальных уравнений с *эффективными* коэффициентами (эффективные коэффициенты образуют тензоры жесткости). В неоднородной пластине к эффективным жесткостям относятся тензор продольных жесткостей, тензор изгибных жесткостей и два тензора жесткостей взаимного влияния. Все эффективные жесткости определяются через модули упругости и структурные функции нулевого и первого порядков неоднородной пластины. Начало рекурсии представляет собой систему из двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для двух продольных перемещений и одного дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка для поперечного прогиба. Уравнения последующих рекурсий отличаются от начальной системы уравнений только входными данными, которые вычисляются через решения уравнений всех предыдущих рекурсий и через структурные функции. В однородном изотропном случае из всех рекуррентных систем остается только начало рекурсии. Уравнения перестают быть связанными. Перемещения в срединной плоскости описываются плоскими уравнениями Ламе, а прогиб пластины находится из классического уравнения Софи Жермен.

Ключевые слова: структура композитов; неоднородные пластины; эффективные модули упругости; эффективные жесткости неоднородных пластин; теория пластин

THE ENGINEERING THEORY OF THE DEFORMING OF THE NONUNIFORM PLATES FROM COMPOSITE MATERIALS

Gorbachev V.I.

Moscow State M.V. Lomonosov University, Moscow, Russia

ABSTRACT

An integral formula is proposed to construct a new engineering model of heterogeneous plates. The special problem for a homogeneous elastic body named as “concomitant problem” is used to define the displacements for the original elasticity problem for a heterogeneous body. As a result, the equivalent infinite series for displacements can be derived from the integral formula; the displacements are expanded in their derivatives computed for the equivalent homogeneous body. The series coefficients are interpreted as structure functions of a composite material and are obtained from the recursive equations systems defined in the domain f heterogeneity of elastic moduli. These structure functions are defined by the elastic moduli dependency on spatial coordinates; they vanish in case of the coincidence of the properties of heterogeneous body and the “concomitant” one. Let us suppose that all auxiliary problems can be solved analytically or numerically so that the structure functions can be interpreted as known ones. Let us consider a thin and sufficiently rigid elastic body with spatially varying properties; thus the concomitant elastic body is a geometrically identical plate with the same load system. The displacement field for this plate is defined on the groundwork of the Kirchhoff assumptions through three displacements of the mid-plane point. According to the integral formula as well as the corresponding series the displacements, the strains, and the stresses in the heterogeneous plate are represented as their expansions in the derivatives of the mid-plane displacement field for the equivalent plate, where the series coefficients depend on the structure functions. Thus, in the normal fiber of the heterogeneous plate changes its length, curvature, and angle with respect to the mid-plane; these deviations are depending on the plate heterogeneity and can be described by the structure functions. Then, the internal forces can be defined on the mid-plane. The tangential force tensors as well as the bending moment are represented as expansion in the mid-plane strain and curvature partial derivatives of rising order. In the classical plate theory, the internal forces are defined directly through the tangential strains and curvatures of the base plane; there are the constitutive equations. The constitutive relations for heterogeneous plates accounts not only the dependencies of generalized forces on strains and curvatures but also on their all-order derivatives. The coefficients corresponding to the qth order derivatives (q=0,1,2…) are tensors of q+4th rank and are interpreted as generalized qth order stiffness. As a result, the coupled infinite order differential equations for mid-plane displacements can be derived from the equilibrium equations; these ones can be reduced to the recursive systems of three differential equations with effective coefficients (these coefficients form the stiffness tensors). For a heterogeneous plate, the tangent, the bending, and two coupling stiffness tensors are introduced as effective stiffness and are determined through the elastic moduli and structure functions of zero and first order. The recursion starts from two partial differential equations of the second order for two tangential displacements and one fourth-order partial differential equation for the deflection. The further recursions differ from the first one only in the input data calculated through the solutions of the equations of all previous recursions as well as through the structure functions. Only the uncoupled equation system of the first recursion remains in case of the homogeneous isotropic plate: for the mid-plane displacements we have the Lame equations system, and the deflection is obtained from the classical Sophie Germain equation.

Keywords: composite structures; heterogeneous plates; effective elastic moduli; effective stiffness of heterogeneous plates; theory of plates

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Интегральные формулы и структурные функции.

В работах [1-5] показано, что решение линейных статических, динамических и связанных задач теории упругости неоднородного тела (исходные задачи) выражаются через решения таких же задач только для однородного тела (сопутствующие задачи) с помощью интегральных формул. Например, в случае статической задачи соответствующая интегральная формула имеет вид [1]

$$u_i(x) = v_i(x) + \int_V \varepsilon^{(i)}_{mn}(\xi, x)\left[C^o_{mnkl} - C_{mnkl}(\xi)\right] e_{kl}(\xi)\, dV_\xi \tag{1}$$

Здесь u_i – компоненты вектора перемещений в исходной задаче; $\varepsilon^{(i)}_{mn}(\xi,x)$ – тензор деформаций Грина исходной задачи теории упругости для неоднородного тела (обозначения заимствованы у В.Новацкого [6]); $C_{ijkl}\left(x\right) \equiv C_{ijkl}(x_1, x_2, x_3)$ – компоненты тензора модулей упругости, интегрируемые функции координат; C^o_{ijkl} – модули упругости сопутствующего однородного тела, $e_{ij} = \left(v_{i,j} + v_{j,i}\right)/2$ – деформации в сопутствующем теле. Предполагая, что деформации в сопутствующей задаче являются гладкими функциями координат и разлагая деформации в многомерный ряд Тейлора

$$e_{ij}(\xi) = \sum_{q=0}^{\infty} \Pi_{i_1 \ldots i_q}(\xi, x) e_{ij,i_1 \ldots i_q}(x), \quad \Pi_{i_1 \ldots i_q}(\xi, x) \equiv \frac{1}{q!}\left(\xi_{i_1} - x_{i_1}\right) \ldots \left(\xi_{i_q} - x_{i_q}\right)$$

получаем из интегральной формулы эквивалентное представление решения исходной задачи в виде ряда по всевозможным производным от решения сопутствующей задачи

$$u_i(x) = v_i(x) + \sum_{q=0}^{\infty} N_{ikli_1..i_q}(x) e_{kl,i_1..i_q}(x) \tag{2}$$

Функции $N_{ikli_1...i_q}(x)$ представляют собой взвешенные моменты тензора деформаций Грина

$$N_{ikli_1..i_q}(x) \equiv \int_V \varepsilon_{mn}^{(i)}(\xi, x)\left[C_{mnkl}^o - C_{mnkl}(\xi) \right] \Pi_{i_1..i_q}(\xi, x) dV_\xi$$

N–функции непрерывны по координатам и определяются только формой области неоднородности и функциональной зависимостью коэффициентов упругости от координат. В случае однородного тела (т.е. при $C_{ijkl}(x) = C_{ijkl}^o$) все N–функции тождественно равны нулю. Размерность функций $[N_{ikli_1..i_q}] = [l]^{q+1}$, где квадратные скобки обозначают взятие размерности, а l – структурный параметр, имеющий размерность длины. Поэтому N–функции названы *структурными функциями*.

1.2. Ряды для деформаций и напряжений.

Из формул Коши и закона Гука следуют ряды для деформаций и напряжений в неоднородном теле

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{q=0}^{\infty} K_{(\varepsilon)ijkli_1..i_q} e_{kl,i_1..i_q}, \; K_{(\varepsilon)ijkl} = \Delta_{ijmn} N_{mkl,n} + \Delta_{ijkl} \,,$$

$$K_{(\varepsilon)ijkli_1..i_q} = \Delta_{ijmn} N_{mkli_1..i_q,n} + \Delta_{ijmi_q} N_{mkli_1..i_{q-1}},$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{q=0}^{\infty} \tilde{C}_{ijkli_1..i_q} e_{ij,i_1..i_q}, \quad \tilde{C}_{ijkl} = C_{ijmn} N_{mkl,n} + C_{ijkl}, \tag{3}$$

$$\tilde{C}_{ijkli_1..i_q} = C_{ijmn} N_{mkli_1..i_q,n} + C_{ijmi_q} N_{mkli_1..i_{q-1}}$$

Здесь $\Delta_{ijkl} = (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk})/2$, а δ_{ij} – дельты Кронекера.

1.3. Вспомогательные задачи.

Подставим напряжения (3) в уравнения исходной задачи и учтем, что $v_i(x)$ является решением сопутствующей задачи. В результате получим систему вспомогательных рекуррентных уравнений для N–функций

$$\left[C_{ijmn} N_{mkl,n} + C_{ijkl} \right]_{,j} = 0$$

$$\left[C_{ijmn} N_{mkl_1,n} + C_{ijmi_1} N_{mkl} \right]_{,j} = C_{ii_1kl}^o - \left[C_{ii_1mn} N_{mkl,n} + C_{ii_1kl} \right] \tag{4}$$

$$\left[C_{ijmn} N_{mkli_1..i_q,n} + C_{ijmi_q} N_{mkli_1..i_{q-1}} \right]_{,j} = -\left[C_{ii_qmn} N_{mkli_1..i_{q-1},n} + C_{ii_qmi_{q-1}} N_{mkli_1..i_{q-2}} \right]$$

при $q \geq 2$

Граничные условия для N–функций легко следуют из граничных условий исходной задачи и представлений (2), (3) для перемещений и напряжений. Например, в случае, когда исходная задача является первой краевой задачей, тогда и сопутствующая задача также является первой краевой задачей. Следовательно, в представлении (2) для перемещений все N–функции должны обращаться в нуль на границе неоднородного тела. В случае периодически неоднородного тела уравнения (4), (5) решаются в ячейке периодичности. Отыскиваются непрерывные периодические решения. Такие решения определены с точностью до постоянных величин [7], которые находятся из условия обращения в нуль средних значений N–функций в ячейке периодичности. В случае неоднородного по толщине слоя уравнения (4), (5) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями, которые легко интегрируются в общем виде [8].

1.4. Эффективные модули упругости.

Свойства сопутствующего однородного тела, т.е. коэффициенты, C^{o}_{ijkl} могут быть любыми физически допустимыми величинами. Однако имеет смысл увязать их с характером неоднородности. Положим их равными следующим величинам

$$C^{o}_{ijkl} = \left\langle \tilde{C}_{ijkl} \right\rangle = \left\langle C_{ijkl} + C_{ijmn}\, N_{mkl,n} \right\rangle$$

Здесь угловые скобки означают среднее значение функции. Таким способом определенные свойства сопутствующего тела совпадают с эффективными модулями упругости неоднородного тела [8].

2. ПЕРЕМЕЩЕНИЯ И НАПРЯЖЕНИЯ В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЕ

2.1. Перемещения в сопутствующей пластине.

Пусть исходное неоднородное тело представляет собой тонкую пластину, у которой упругие модули меняются от точки к точке по заданному закону. Вспомогательные задачи (4,5) заранее решаются численно или аналитически, т.е. будем считать, что структурные функции материала известны. Пусть начало декартовых координат и оси x_1, x_2 расположены в срединной плоскости пластины, а ось x_3 перпендикулярна ей. Обозначим через $w_i(x_1,x_2)$ – перемещения точек срединной плоскости сопутствующей однородной пластины, а через $v_i(x_1,x_2,x_3)$ – перемещения в любой ее точке, определяемые приближенно, в соответствии с гипотезой Кирхгофа-Лява

$$v_i(x_1,x_2,x_3) = w_i(x_1,x_2) - x_3\delta_{iJ}\, w_{3,J}(x_1,x_2) \Rightarrow v_I = w_I - x_3 w_{3,I}\,,\ v_3 = w_3 \quad (6)$$

Здесь и ниже большие индексы принимают значения 1, 2 и по повторяющимся индексам в формулах подразумевается суммирование в соответствующих пределах.

2.2. Перемещения в неоднородной пластине.

Подставим выражения (6) в формулу (2) и получим приближенные выражения для перемещений в неоднородной пластине

$$\begin{aligned} u_i &= v_i + \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ N_{iKLI_1\ldots I_q} w_{K,LI_1\ldots I_q} - \left[x_3 N_{iKLI_1\ldots I_q} + (q+1) N_{iKL3I_1\ldots I_q} \right] w_{3,KLI_1\ldots I_q} \right\} = \\ &= v_i + \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ N_{iKLI_1\ldots I_q} \gamma_{KL,I_1\ldots I_q} + \left[x_3 N_{iKLI_1\ldots I_q} + (q+1) N_{iKL3I_1\ldots I_q} \right] \varkappa_{KL,I_1\ldots I_q} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь $\gamma_{KL} = (w_{K,L} + w_{L,K})/2 \equiv \Delta_{KLMN} w_{M,N}$ и $\varkappa_{KL} = -w_{3,KL}$ – тензоры малых деформаций и кривизн срединной плоскости сопутствующей пластины.

Формула (7) представляет собой математическое выражение некой кинематической гипотезы, отличной от гипотезы прямой не деформируемой нормали. Суть этой гипотезы выражается следующими словами: *перемещения в неоднородной пластине представляются в виде рядов по производным возрастающего порядка от компонент вектора перемещений точек срединной* *плоскости некоторой однородной пластины.* Коэффициенты рядов определяются отдельно из вспомогательных задач (4,5) в области неоднородности. Под некоторой однородной пластиной понимается пластина той же самой формы, что и исходная неоднородная пластина. Однородная (сопутствующая) пластина относится к той же самой системе координат, что и исходная. Перемещения точек в срединной плоскости сопутствующей пластины задаются функциями $w_i(x_1, x_2)$, а перемещения в срединной плоскости неоднородной пластины определяются из формул (7) при $x_3 = 0$

$$\begin{aligned}
u_i(x_1, x_2, 0) &= w_i(x_1, x_2) + \\
&+ \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ N_{iKLI_1\ldots I_q}(x_1, x_2, 0) w_{K,LI_1\ldots I_q} - (q+1) N_{iKL3I_1\ldots I_q}(x_1, x_2, 0) w_{3,KLI_1\ldots I_q} \right\}
\end{aligned}$$

2.3.Деформации и напряжения в неоднородной пластине.

Пользуясь формулами Коши, и законом Гука по перемещениям найдем деформации и напряжения в неоднородной пластине

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \mathrm{K}_{(\varepsilon)ijKLI_1\ldots I_q} \gamma_{KL,I_1\ldots I_q} + \left[x_3 \mathrm{K}_{(\varepsilon)ijKLI_1\ldots I_q} + (q+1) \mathrm{K}_{(\varepsilon)ijKL3I_1\ldots I_q} \right] \varkappa_{KL,I_1\ldots I_q} \right\}$$

$$\sigma_{ij} = \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \tilde{C}_{ijKLI_1\ldots I_q} \gamma_{KL,I_1\ldots I_q} + \left[x_3 \tilde{C}_{ijKLI_1\ldots I_q} + (q+1) \tilde{C}_{ijKL3I_1\ldots I_q} \right] \varkappa_{KL,I_1\ldots I_q} \right\} \qquad (8)$$

Распишем отдельно выражения для продольных напряжений σ_{IJ}

$$\sigma_{IJ} = \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \tilde{C}_{IJKLI_1\ldots I_q} \gamma_{KL,I_1\ldots I_q} + \left[x_3 \tilde{C}_{IJKLI_1\ldots I_q} + (q+1) \tilde{C}_{IJKL3I_1\ldots I_q} \right] \varkappa_{KL,I_1\ldots I_q} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{C}_{IJKL} &= C_{IJKL} + C_{IJmn} N_{mKL,n} = \\
&= C_{IJKL} + C_{IJMN} N_{MKL,N} + C_{IJM3} \left(N_{MKL,3} + N_{3KL,M} \right) + C_{IJ33} N_{3KL,3}; \\
\tilde{C}_{IJKLI_1\ldots I_q} &= C_{IJmn} N_{mKLI_1\ldots I_q,n} + C_{IJmI_q} N_{mKLI_1\ldots I_{q-1}} = \\
&= C_{IJMN} N_{MKLI_1\ldots I_q,N} + C_{IJM3} \left(N_{MKLI_1\ldots I_q,3} + N_{3KLI_1\ldots I_q,M} \right) + C_{IJ33} N_{3KLI_1\ldots I_q,3} + \\
&+ C_{IJMI_q} N_{MKLI_1\ldots I_{q-1}} + C_{IJ3I_q} N_{3KLI_1\ldots I_{q-1}}; \qquad q \ge 1; \\
\tilde{C}_{IJKL3} &= C_{IJmn} N_{mKL3,n} + C_{IJm3} N_{mKL} = \\
&= C_{IJMN} N_{MKL3,N} + C_{IJM3} \left(N_{MKL3,3} + N_{3KL3,M} + N_{MKL} \right) + C_{IJ33} \left(N_{3KL3,3} + N_{3KL} \right); \\
\tilde{C}_{IJKL3I_1\ldots I_q} &= C_{IJmn} N_{mKL3I_1\ldots I_q,n} + C_{IJmI_q} N_{mKL3I_1\ldots I_{q-1}} = \\
&= C_{IJMN} N_{MKL3I_1\ldots I_q,N} + C_{IJM3} \left(N_{MKL3I_1\ldots I_q,3} + N_{3KL3I_1\ldots I_q,M} \right) + C_{IJ33} N_{3KL3I_1\ldots I_q,3} + \\
&+ C_{IJMI_q} N_{MKL3I_1\ldots I_{q-1}} + C_{IJ3I_q} N_{3KL3I_1\ldots I_{q-1}}; \; q \ge 1
\end{aligned}$$

(9)

2.4. Модифицированная матрица модулей упругости исходного материала.

Из трехмерных уравнений равновесия следует, что в тонкой пластине, однородной или неоднородной, поперечные напряжения σ_{i3} существенно меньше продольных напряжений σ_{IJ} [9,10]. Поэтому поперечными напряжениями пренебрегаем, и учитываем только продольные напряжения. Более того, выражения для σ_{IJ} будем записывать не по формуле (8), а с помощью модифицированного тензора модулей упругости, в котором коэффициенты C_{IJKL} заменяются на J^{-1}_{IJKL}, где через J_{ijkl} обозначены компоненты тензора податливостей, обратного к тензору модулей упругости

$$\left(J^{-1}_{IJKL}\right) \equiv \begin{pmatrix} J_{1111} & J_{1122} & J_{1112} \\ J_{2211} & J_{2222} & J_{2212} \\ J_{1211} & J_{1222} & J_{1212} \end{pmatrix}^{-1}$$

При этом вся модифицированная матрица модулей упругости принимает вид

$$(C_{ijkl}) = \begin{pmatrix} J^{-1}_{IJKL} & C_{IJk3} \\ C_{i3KL} & C_{i3k3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J^{-1}_{1111} & J^{-1}_{1122} & J^{-1}_{1112} & C_{1113} & C_{1123} & C_{1133} \\ J^{-1}_{2211} & J^{-1}_{2222} & J^{-1}_{2212} & C_{2213} & C_{2223} & C_{2233} \\ J^{-1}_{1211} & J^{-1}_{1222} & J^{-1}_{1212} & C_{1213} & C_{1223} & C_{1233} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} & C_{1333} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} & C_{2333} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} & C_{3333} \end{pmatrix}$$

В результате такой замены формула для продольных напряжений (и только для них) представляется следующим образом

$$\sigma_{IJ} = \sum_{q=0}^{\infty} \left\{ \tilde{\tilde{C}}_{IJKLI_1\ldots I_q} \gamma_{KL,I_1\ldots I_q} + \left[x_3 \tilde{\tilde{C}}_{IJKLI_1\ldots I_q} + (q+1) \tilde{\tilde{C}}_{IJKL3I_1\ldots I_q} \right] \varkappa_{KL,I_1\ldots I_q} \right\}$$

$$\tilde{\tilde{C}}_{IJKL} = J^{-1}_{IJKL} + J^{-1}_{IJPQ} N_{PKL,Q} + C_{IJP3}\left(N_{PKL,3} + N_{3KL,P}\right) + C_{IJ33} N_{3KL,3};$$

$$\tilde{\tilde{C}}_{IJKLI_1\ldots I_q} = J^{-1}_{IJPQ} N_{PKLI_1\ldots I_q,Q} + C_{IJP3}\left(N_{PKLI_1\ldots I_q,3} + N_{3KLI_1\ldots I_q,P}\right) + C_{IJ33} N_{3KLI_1\ldots I_q,3} +$$
$$+ J^{-1}_{IJMI_q} N_{MKLI_1\ldots I_{q-1}} + C_{IJ3I_q} N_{3KLI_1\ldots I_{q-1}}; \quad q \geq 1;$$

$$\tilde{\tilde{C}}_{IJKL3} = J^{-1}_{IJMN} N_{MKL3,N} + C_{IJM3}\left(N_{MKL3,3} + N_{3KL3,M} + N_{MKL}\right) + C_{IJ33}\left(N_{3KL3,3} + N_{3KL}\right);$$

$$\tilde{\tilde{C}}_{IJKL3I_1\ldots I_q} = J^{-1}_{IJMN} N_{MKL3I_1\ldots I_q,N} + C_{IJM3}\left(N_{MKL3I_1\ldots I_q,3} + N_{3KL3I_1\ldots I_q,M}\right) + C_{IJ33} N_{3KL3I_1\ldots I_q,3} +$$
$$+ J^{-1}_{IJMI_q} N_{MKL3I_1\ldots I_{q-1}} + C_{IJ3I_q} N_{3KL3I_1\ldots I_{q-1}}; \; q \geq 1 \tag{10}$$

Коэффициенты с двумя волнами в формуле (10) получены из коэффициентов с одной волной формулы (9) путем замены $C_{IJPQ} \to J^{-1}_{IJPQ}$. Принятие такой инновации обосновано тем, что в однородном случае все структурные N–функции обращаются в нуль и бесконечный ряд (10) для продольных напряжений принимает вид

$$\sigma_{IJ} = J^{-1}_{IJKL} \gamma_{KL} + x_3 J^{-1}_{IJKL} \varkappa_{KL}$$

что полностью совпадает с соответствующим выражением в классической теории пластин Кирхгофа-Лява.

3. ВНУТРЕННИЕ СИЛОВЫЕ ФАКТОРЫ И УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ТОЧЕК СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНЫ

3.1. Тензоры продольных сил и изгибающих моментов.

Переменные по толщине пластины продольные напряжения σ_{IJ} статически эквивалентны продольным силам T_{IJ} и изгибающим моментам M_{IJ}, распределенным в срединной плоскости

$$T_{IJ} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{IJ}(x_1, x_2, x_3) dx_3 \equiv h\left\langle \sigma_{IJ} \right\rangle;$$

$$M_{IJ} = \int_{-h/2}^{h/2} x_3 \sigma_{IJ}(x_1, x_2, x_3) dx_3 \equiv h\left\langle x_3 \sigma_{IJ} \right\rangle$$

Подставив сюда напряжения (10) получаем

$$\begin{aligned} T_{IJ} &= \sum_{q=0}^{\infty} \left[A_{IJKLI_1\ldots I_q} \gamma_{KL,I_1\ldots I_q} + \hat{B}_{IJKLI_1\ldots I_q} \varkappa_{KL,I_1\ldots I_q} \right], \\ M_{IJ} &= \sum_{q=0}^{\infty} \left[B_{IJKLI_1\ldots I_q} \gamma_{KL,I_1\ldots I_q} + D_{IJKLI_1\ldots I_q} \varkappa_{KL,I_1\ldots I_q} \right], \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} A_{IJKLI_1\ldots I_q} &= h\left\langle \tilde{C}_{IJKLI_1\ldots I_q} \right\rangle, \quad \hat{B}_{IJKLI_1\ldots I_q} = h\left\langle x_3 \tilde{C}_{IJKLI_1\ldots I_q} + (q+1)\tilde{C}_{IJKL3I_1\ldots I_q} \right\rangle, \\ B_{IJKLI_1\ldots I_q} &= h\left\langle \tilde{C}_{IJKLI_1\ldots I_q} \right\rangle, \quad D_{IJKLI_1\ldots I_q} = h\left\langle x_3 \left(x_3 \tilde{C}_{IJKLI_1\ldots I_q} + (q+1)\tilde{C}_{IJKL3I_1\ldots I_q} \right) \right\rangle. \end{aligned} \tag{12}$$

3.2. Определяющие соотношения нелокальной теории пластин.

Формулы (11) представляют собой определяющие соотношения нелокальной теории пластин (по поводу нелокальных теорий см., например, [11]). Они позволяют выразить силовые факторы через кинематические факторы, т.е. через деформации и кривизны срединной плоскости, а также через их производные всех порядков. Коэффициенты (12) называются коэффициентами жесткости. Они являются компонентами тензоров q+4-го ранга. Особую роль играют тензоры 4-го ранга

$$\begin{aligned} A_{IJKL} &= h\left\langle \tilde{\tilde{C}}_{IJKL} \right\rangle = \\ &= h\left\langle J^{-1}_{IJKL} + J^{-1}_{IJPQ} N_{PKL,Q} + C_{IJP3}\left(N_{PKL,3} + N_{3KL,P} \right) + C_{IJ33} N_{3KL,3} \right\rangle; \\ \hat{B}_{IJKL} &= h\left\langle x_3 \tilde{\tilde{C}}_{IJKL} + \tilde{\tilde{C}}_{IJKL3} \right\rangle = \\ &= h\left\langle x_3 \left[J^{-1}_{IJKL} + J^{-1}_{IJPQ} N_{PKL,Q} + C_{IJP3}\left(N_{PKL,3} + N_{3KL,P} \right) + C_{IJ33} N_{3KL,3} \right] + \right. \\ &\qquad + J^{-1}_{IJPQ} N_{PKL3,Q} + C_{IJP3}\left(N_{PKL3,3} + N_{3KL3,P} \right) + C_{IJ33} N_{3KL3,3} + C_{IJm3} N_{mKL}; \\ B_{IJKL} &= h\left\langle x_3 \tilde{\tilde{C}}_{IJKL} \right\rangle = \\ &= h\left\langle x_3 \left[J^{-1}_{IJKL} + J^{-1}_{IJPQ} N_{PKL,Q} + C_{IJP3}\left(N_{PKL,3} + N_{3KL,P} \right) + C_{IJ33} N_{3KL,3} \right] \right\rangle; \end{aligned} \tag{13}$$

$$D_{IJKL} = h\left\langle x_3\left(x_3\tilde{\tilde{C}}_{IJKL} + \tilde{\tilde{C}}_{IJKL3}\right)\right\rangle =$$
$$= h\left\langle x_3^2\left[J^{-1}_{IJKL} + J^{-1}_{IJPQ}N_{PKL,Q} + C_{IJP3}\left(N_{PKL,3} + N_{3KL,P}\right) + C_{IJ33}N_{3KL,3}\right] + \right.$$
$$\left. + x_3\left[J^{-1}_{IJPQ}N_{PKL3,Q} + C_{IJP3}\left(N_{PKL3,3} + N_{3KL3,P}\right) + C_{IJ33}N_{3KL3,3} + C_{IJm3}N_{mKL}\right]\right\rangle$$

Величины A_{IJKL} – компоненты тензора продольной жесткости, $\hat{B}_{IJKL}$ и B_{IJKL} – компоненты тензоров жесткостей взаимного влияния, D_{IJKL} – компоненты тензора изгибной жесткости.

3.3. Уравнения равновесия внутренних сил.

Внутренние силовые факторы удовлетворяют уравнениям равновесия в срединной плоскости, причем они не зависят от того каковы определяющие соотношения. Уравнения равновесия можно получить различными способами, и все они приводят к одним и тем же уравнения для продольных сил и изгибающих моментов

$$T_{IJ,J} = -q_I; \quad M_{IJ,IJ} = -q_3 \tag{14}$$

Здесь $\vec{q}(q_1, q_2, q_3)$ – приведенный вектор внешних сил, распределенный в срединной плоскости. Подстановка в (14) соотношений (11) дает систему из трех связанных дифференциальных уравнений бесконечного порядка для перемещений точек срединной плоскости

$$\begin{gathered}\sum_{q=0}^{\infty}\left[A_{IJKLI_1\ldots I_q}\gamma_{KL,I_1\ldots I_q} + \hat{B}_{IJKLI_1\ldots I_q}\varkappa_{KL,I_1\ldots I_q}\right]_{,J} = -q_I; \quad \gamma_{KL} = \Delta_{KLMN}w_{M,N};\\ \sum_{q=0}^{\infty}\left[B_{IJKLI_1\ldots I_q}\gamma_{KL,I_1\ldots I_q} + D_{IJKLI_1\ldots I_q}\varkappa_{KL,I_1\ldots I_q}\right]_{,IJ} = -q_3; \quad \varkappa_{KL} = -w_{3,KL}\end{gathered} \tag{15}$$

3.4. Сведение бесконечных уравнений к рекуррентным уравнениям теории пластин.

В неоднородном теле зависимость упругих характеристик от координат представляется в виде функций безразмерных переменных. Пусть l – структурный параметр, например, характерный размер области изменения свойств. В случае пластины из волокнистого композита это может быть среднее расстояние между волокнами либо размер ячейки периодичности, при периодическом расположении волокон. Во всяком случае, можно считать, что модули упругости C_{ijkl} являются функциями безразмерных переменных $\zeta_i = x_i / l$. Следовательно, структурные функции, так же как и модули упругости, являются функциями переменных ζ_i. Как уже говорилось выше, размерность структурных функций представляет собой возрастающую степень размерности длины, т.е. можно ввести безразмерные структурные функции, положив $N_{ikli_1\ldots i_q}(x) = l^{q+1}N_{ikli_1\ldots i_q}(\zeta)$. Тогда ряд (8) принимает вид

$$u_i = v_i + \sum_{q=0}^{\infty} l^q\left\{N_{iKLI_1\ldots I_q}(\zeta)\gamma_{KL,I_1\ldots I_q} + \right.$$
$$\left. + \left[x_3N_{iKLI_1\ldots I_q}(\zeta) + l\,(q+1)N_{iKL3I_1\ldots I_q}(\zeta)\right]\varkappa_{KL,I_1\ldots I_q}\right\}$$

Правило дифференцирования функций от переменных ζ_i по переменным x_i будет следующим

$$f_{,i} = \frac{\partial f(\zeta)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial \zeta_k}\frac{\partial \zeta_k}{\partial x_i} = \frac{1}{l}\frac{\partial f}{\partial \zeta_i} = \frac{1}{l} f_{|i} \tag{16}$$

Здесь индекс после вертикальной черты обозначает производную по соответствующей локальной переменной. В этом случае, согласно формулам (10) и правилу дифференцирования (16)

$$\tilde{\tilde{C}}_{IJKLI_1\ldots I_q}(x) = l^q \tilde{\tilde{C}}_{IJKLI_1\ldots I_q}(\zeta), \quad \tilde{\tilde{C}}_{IJKL3I_1\ldots I_q}(x) = l^{q+1} \tilde{\tilde{C}}_{IJKL3I_1\ldots I_q}(\zeta)$$

Отсюда и из формул (12) следует, что

$$\begin{aligned}
A_{IJKLI_1\ldots I_q} &= hl^q \left\langle \tilde{\tilde{C}}_{IJKLI_1\ldots I_q}(\zeta) \right\rangle = l^q \underline{A}_{IJKLI_1\ldots I_q};\\
B_{IJKLI_1\ldots I_q} &= hl^q \left\langle \tilde{\tilde{C}}_{IJKLI_1\ldots I_q}(\zeta) \right\rangle = l^q \underline{B}_{IJKLI_1\ldots I_q};\\
\hat{B}_{IJKLI_1\ldots I_q} &= hl^q \left\langle x_3 \tilde{\tilde{C}}_{IJKLI_1\ldots I_q}(\zeta) + l(q+1)\tilde{\tilde{C}}_{IJKL3I_1\ldots I_q}(\zeta) \right\rangle = l^q \underline{\hat{B}}_{IJKLI_1\ldots I_q};\\
D_{IJKLI_1\ldots I_q} &= hl^q \left\langle x_3 \left(x_3 \tilde{\tilde{C}}_{IJKLI_1\ldots I_q}(\zeta) + l(q+1)\tilde{\tilde{C}}_{IJKL3I_1\ldots I_q}(\zeta) \right) \right\rangle = l^q \underline{D}_{IJKLI_1\ldots I_q}
\end{aligned} \tag{17}$$

В соответствии с формулами (17) уравнения (15) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=0}^{\infty} l^q \left[\underline{A}_{IJKLI_1\ldots I_q} \gamma_{KL,I_1\ldots I_q} + \underline{\hat{B}}_{IJKLI_1\ldots I_q} \varkappa_{KL,I_1\ldots I_q} \right]_{,J} = -q_I;\\
&\sum_{q=0}^{\infty} l^q \left[\underline{B}_{IJKLI_1\ldots I_q} \gamma_{KL,I_1\ldots I_q} + \underline{D}_{IJKLI_1\ldots I_q} \varkappa_{KL,I_1\ldots I_q} \right]_{,IJ} = -q_3
\end{aligned} \tag{18}$$

Из уравнений (18) и формул (17) для жесткостей видно, что перемещения $w_i = w_i(x_1, x_2, l)$, т.е. они зависят не только от координат, но и от структурного параметра l. Решение уравнений (18) будем искать в виде степенных рядов по l

$$w_i(x_1,x_2,l) = \sum_{n=0}^{\infty} l^n w_i^{\{n\}}(x_1,x_2,l) \Rightarrow \gamma_{IJ} = \sum_{n=0}^{\infty} l^n \gamma_{IJ}^{\{n\}}, \quad \varkappa_{IJ} = \sum_{n=0}^{\infty} l^n \varkappa_{IJ}^{\{n\}}, \tag{19}$$

где $\gamma_{IJ}^{\{n\}} = \Delta_{IJKL} w_{K,L}^{\{n\}}, \qquad \varkappa_{IJ}^{\{n\}} = w_{,IJ}^{\{n\}} = w_{3,IJ}^{\{n\}}$

После подстановки рядов (19) в уравнения (18) и сбора коэффициентов при одинаковых степенях l, получаем

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} l^n \left\{ \underline{A}_{IJKL}\gamma_{KL}^{\{n\}} + \underline{\hat{B}}_{IJKL}\varkappa_{KL}^{\{n\}} + \sum_{q=1}^{n} \left[\underline{A}_{IJKLI_1\ldots I_q}\gamma_{KL,I_1\ldots I_q}^{\{n-q\}} + \underline{\hat{B}}_{IJKLI_1\ldots I_q}\varkappa_{KL,I_1\ldots I_q}^{\{n-q\}} \right] \right\}_{,J} = -q_I,\\
&\sum_{n=0}^{\infty} l^n \left\{ \underline{B}_{IJKL}\gamma_{KL}^{\{n\}} + \underline{D}_{IJKL}\varkappa_{KL}^{\{n\}} + \sum_{q=1}^{n} \left[\underline{B}_{IJKLI_1\ldots I_q}\gamma_{KL,I_1\ldots I_q}^{\{n-q\}} + \underline{D}_{IJKLI_1\ldots I_q}\varkappa_{KL,I_1\ldots I_q}^{\{n-q\}} \right] \right\}_{,IJ} = -q_3
\end{aligned} \tag{20}$$

Приравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях l в правой и левой частях равенств (20), приходим к рекуррентным уравнениям относительно величин $\gamma_{IJ}^{\{n\}}$ и $\varkappa_{IJ}^{\{n\}}$

$$\left(\underline{A}_{IJKL}\gamma_{KL}^{\{n\}} + \underline{\hat{B}}_{IJKL}\varkappa_{KL}^{\{n\}} \right)_{,J} = -q_I^{\{n\}}, \quad \left(\underline{B}_{IJKL}\gamma_{KL}^{\{n\}} + \underline{D}_{IJKL}\varkappa_{KL}^{\{n\}} \right)_{,IJ} = -q_3^{\{n\}} \tag{21}$$

где

$$
q_I^{\{n\}} = \begin{cases} q_I, \quad n=0 \\ \sum_{q=1}^{n} \left[\underset{\sim}{A}_{IJKLI_1\ldots I_q} \gamma^{\{n-q\}}_{KL,I_1\ldots I_q} + \underset{\sim}{\hat{B}}_{IJKLI_1\ldots I_q} \varkappa^{\{n-q\}}_{KL,I_1\ldots I_q} \right]_{,J}, \quad n \geqslant 1 \end{cases} \tag{22}
$$

$$
q_3^{\{n\}} = \begin{cases} q_3, \quad n=0 \\ \sum_{q=1}^{n} \left[\underset{\sim}{B}_{IJKLI_1\ldots I_q} \gamma^{\{n-q\}}_{KL,I_1\ldots I_q} + \underset{\sim}{D}_{IJKLI_1\ldots I_q} \varkappa^{\{n-q\}}_{KL,I_1\ldots I_q} \right]_{,IJ}, \quad n \geqslant 1 \end{cases}
$$

Аналогично могут быть записаны рекуррентные основные и естественные граничные условия для перемещений $w_i^{\{n\}}$. Изложенный метод сведения бесконечной системы дифференциальных уравнений к рекуррентным уравнениям (21) теории пластин, по сути дела, является методом возмущений [12,13]. В нашем случае возмущающим параметром является размерная величина l. Она появляется естественным образом при переходе к безразмерным структурным функциям. Как и в методе возмущений, в окончательных формулах возмущающий параметр просто опускается, что, в нашем случае, соответствует возвращению к размерным структурным функциям.

4. ТЕОРИЯ НУЛЕВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

4.1. Уравнения теории нулевого приближения.

Нужные нам уравнения получаются из уравнений (21) и (22) при $n=0$

$$
\left(A_{IJKL} w_{K,L} - \hat{B}_{IJKL} w_{3,KL} \right)_{,J} = -q_I, \qquad \left(A_{IJKL} w_{K,L} - \hat{B}_{IJKL} w_{3,KL} \right)_{,IJ} = -q_3 \tag{23}
$$

Верхний индекс в фигурных скобках опущен. Опущено также и нижнее подчеркивание. Отметим, что *уравнения* (23) *записаны для случая, когда пластина имеет переменную толщину* $h(x_1,x_2) = h_-(x_1,x_2) + h_+(x_1,x_2)$. *Упругие модули материала пластины являются функциями всех трех координат, а следовательно тензоры жесткостей являются функциями координат точек срединной плоскости, т.е.* $\underset{\sim}{A}(x_1,x_2)$, $\underset{\sim}{\hat{B}}(x_1,x_2)$, $\underset{\sim}{B}(x_1,x_2)$, $\underset{\sim}{D}(x_1,x_2)$. Для вычисления жесткостей неоднородной пластины, в самом общем случае, нужно предварительно из уравнений (4) найти 18 структурных функций N_{ikl} и 18 функций N_{ikl3}. Далее, по формулам (10) находятся функции $\tilde{\tilde{C}}_{IJKL}$ и $\tilde{\tilde{C}}_{IJKL3}$. Затем, по формулам (13), находятся компоненты всех тензоров жесткостей.

4.2. Определяющие соотношения нулевом приближении.

Эти соотношения можно получить из рядов (11), отбросив все члены, кроме первых

$$
T_{IJ} = A_{IJKL}\gamma_{KL} + \hat{B}_{IJKL}\varkappa_{KL}, \quad M_{IJ} = B_{IJKL}\gamma_{KL} + D_{IJKL}\varkappa_{KL} \tag{24}
$$

В случае, когда в срединной плоскости нет внешних моментов, поперечные силы в срединной плоскости определяются по известным формулам через производные от изгибающего момента

$$
Q_I = M_{IJ,J} = \left(B_{IJKL}\gamma_{KL} + D_{IJKL}\varkappa_{KL} \right)_{,J}
$$

Продольные усилия T_{IJ}, изгибающие моменты M_{IJ} и поперечные силы Q_I участвуют в формулировке естественных граничных условий точно также, как и в классической теории пластин.

4.3. Обратные определяющие соотношения.

Обратные к (24) соотношения даются следующими формулами, записанными в тензорной форме

$$\underset{\sim}{\gamma} = \underset{\sim}{d}^{*-1}\underset{\sim}{T} - \underset{\sim}{d}^{*-1}\underset{\sim}{\hat{B}}\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{M}, \quad \underset{\sim}{\varkappa} = -\underset{\sim}{d}^{-1}\underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{T} - \underset{\sim}{d}^{-1}\underset{\sim}{M} \tag{25}$$

где $\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{D} - \underset{\sim}{B}\underset{\sim}{A}^{-1}\underset{\sim}{\hat{B}}, \quad \underset{\sim}{d}^* = \underset{\sim}{A} - \underset{\sim}{\hat{B}}\underset{\sim}{D}^{-1}\underset{\sim}{B}$

4.4. Перемещения в неоднородной пластине в нулевом приближении.

После того как решены уравнения (23) при соответствующих граничных условиях, можно найти перемещения, деформации и напряжения во всех точках неоднородной пластины в нулевом приближении. Формулы для перемещений даются первым членом ряда (8)

$$u_i = v_i + N_{iKL}\gamma_{KL} + \left(x_3 N_{iKL} + N_{iKL3}\right)\varkappa_{KL} \tag{26}$$

4.5. Напряжения в нулевом приближении.

Продольные напряжения в нулевом приближении находятся по первому члену ряда (9)

$$\sigma_{IJ} = \tilde{\tilde{C}}_{IJKL}\gamma_{KL} + \left(x_3\tilde{\tilde{C}}_{IJKL} + \tilde{\tilde{C}}_{IJKL3}\right)\varkappa_{KL} \tag{27}$$

Поперечные напряжения $\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}$ находятся через продольные напряжения σ_{IJ} из уравнений равновесия теории упругости. В том случае, когда пластина изгибается только нормальной к верхней лицевой поверхности распределенной нагрузкой $q_I = 0,\ q_3 = -q(x_1, x_2)$, формулы для поперечных компонент тензора напряжений будут следующими [14]

$$\begin{gathered}\sigma_{I3} = -\int_{-h/2}^{x_3} \sigma_{IJ,J}(x_1, x_2, z)dz, \quad \sigma_{33} = -\int_{-h/2}^{x_3} \sigma_{I3,I}(x_1, x_2, y)dy = \\ = \int_{-h/2}^{x_3}\int_{-h/2}^{y} \sigma_{IJ,IJ}(x_1, x_2, z)dz\,dy = \int_{-h/2}^{x_3} (x_3 - y)\sigma_{IJ,IJ}(x_1, x_2, y)dy\end{gathered} \tag{28}$$

Вследствие уравнений (14), напряжения (28) удовлетворяют граничным условиям на нижней и верхней лицевых поверхностях пластины. В том случае, когда на лицевых поверхностях заданы разные векторы нагрузки $\vec{q}^{\pm}(x_1, x_2)$ и в каждой точке пластины действует векторная объемная нагрузка $\vec{X}(x_1, x_2, x_3)$ формулы для поперечных напряжений и уравнения для внутренних силовых факторов приведены в работе [15].

5. ЖЕСТКОСТИ НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНЫ

5.1. Решение вспомогательных задач. Структурные функции.

Пусть модули упругости являются функциями только координаты x_3. В тонкой пластине можно считать, что структурные функции являются также функциями только координаты x_3. В этом случае уравнения (4) становятся обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\left[C_{i3m3}N'_{mkl}+C_{i3kl}\right]'=0,\quad \left[C_{i3m3}N'_{mkli_1}+C_{i3mi_1}N_{mkl}\right]'=C^{o}_{ii_1kl}-\tilde{C}_{ii_1kl},$$
$$C^{o}_{ii_1kl}=\left\langle \tilde{C}_{ii_1kl}\right\rangle=\left\langle C_{ii_1m3}N'_{nkl}+C_{ii_1kl}\right\rangle \tag{29}$$

Штрихом обозначена обыкновенная производная по координате x_3, а угловые скобки обозначают среднее по толщине пластины. Из уравнения (29) для функций N_{mkl}, получаем

$$N_{mkl}(x_3)=\int\limits_{-h/2}^{x_3} f_{mkl}(y)dy+a_{mkl},$$
$$f_{mkl}(x_3)\equiv C^{-1}_{m3n3}(x_3)\left[\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3kl}\right\rangle-C_{n3kl}(x_3)\right]$$

Константы a_{mkl} второго интегрирования можно находить из двух разных условий: из нулевых граничных условий или же из условий периодичности, т.е.

$$a_{mkl}=\begin{cases}0, & \text{если}\quad N_{mkl}(-h/2)=N_{mkl}(h/2)=0\\ \left\langle \int\limits_{-h/2}^{x_3} f_{mkl}(y)dy\right\rangle, & \text{если}\quad N_{mkl}(-h/2)=N_{mkl}(h/2)\quad \text{и}\quad \left\langle N_{mkl}(x_3)\right\rangle=0\end{cases} \tag{30}$$

Условия (30) позволяют выбрать единственное решение уравнений (29). Второе из условий (30) удобно брать в том случае, когда пластина состоит из большого числа одинаковых пакетов толщины $l \ll h$. Зная функции N_{mkl}, из (3) находим все коэффициенты $\tilde{C}_{ijkl}$ и затем – эффективные модули упругости неоднородного по толщине слоя

$$\tilde{C}_{ijkl}(x_3)=C_{ijkl}(x_3)+C_{ijm3}(x_3)C^{-1}_{m3n3}(x_3)\left[\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3kl}\right\rangle-C_{n3kl}(x_3)\right],$$
$$C^{o}_{ijkl}=\left\langle C_{ijkl}\right\rangle+\left\langle C_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}\right\rangle\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3kl}\right\rangle-\left\langle C_{ijm3}C^{-1}_{m3n3}C_{n3kl}\right\rangle$$

Отсюда видно, что $\tilde{C}_{i3kl}=C^{o}_{i3kl}$. Далее, при аналогичных (30) условиях для N_{mkli_1}, находим структурные функции с четырьмя индексами, вернее их первую производную

$$N'_{mkli_1}(x_3)=C^{-1}_{m3n3}(x_3)\left[\int\limits_{-h/2}^{x_3}\left(C^{o}_{ni_1kl}-\tilde{C}_{ni_1kl}(y)\right)dy-C_{n3pi_1}(x_3)N_{pkl}(x_3)\right]-$$
$$-C^{-1}_{m3n3}(x_3)\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}\left[\int\limits_{-h/2}^{x_2}\left(C^{o}_{qi_1kl}-\tilde{C}_{qi_1kl}(y)dy\right)-C_{q3ri_1}N_{rkl}\right]\right\rangle$$

Положив здесь $i_1=3$, получаем

$$N'_{mkl3}(x_3)=-N_{mkl}(y)+C^{-1}_{m3n3}(y)\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle N_{pkl}\right\rangle,$$
$$N_{mkl3}(x_3)=\int\limits_{-h/2}^{x_3}\left[-N_{mkl}(y)+C^{-1}_{m3n3}(y)\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle N_{pkl}\right\rangle\right]dy+a_{mkl3}$$

Константы a_{mkl3} находятся по правилу аналогичному (30). После этого, по формулам (10), находим функции $\tilde{\tilde{C}}_{IJKL}$ и $\tilde{\tilde{C}}_{IJKL3}$

$$\tilde{\tilde{C}}_{IJKL} = J^{-1}_{IJKL} + C_{IJm3}N'_{mKL} = J^{-1}_{IJKL} + C_{IJm3}C^{-1}_{m3n3}\left(\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3KL}\right\rangle - C_{n3KL}\right),$$

$$\tilde{\tilde{C}}_{IJKL3} = C_{IJm3}\left(N'_{mKL3} + N_{mKL}\right) = C_{IJm3}C^{-1}_{m3n3}\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle N_{pKL}\right\rangle$$

5.2. Эффективные жесткости.

Теперь по формулам (13) можно найти выражения для эффективных жесткостей неоднородной по толщине пластины

$$A_{IJKL} = h\left\langle \tilde{\tilde{C}}_{IJKL}\right\rangle = h\left[\left\langle J^{-1}_{IJKL}\right\rangle + \left\langle C_{IJm3}C^{-1}_{m3n3}\right\rangle\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3KL}\right\rangle - \left\langle C_{IJm3}C^{-1}_{m3n3}C_{n3KL}\right\rangle\right];$$

$$\hat{B}_{IJKL} = h\left\langle x_3\tilde{\tilde{C}}_{IJKL} + \tilde{\tilde{C}}_{IJKL3}\right\rangle = h\left[\left\langle x_3 J^{-1}_{IJKL}\right\rangle + \left\langle x_3 C_{IJm3}C^{-1}_{m3n3}\right\rangle\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3KL}\right\rangle -\right.$$

$$\left. - \left\langle x_3 C_{IJm3}C^{-1}_{m3n3}C_{n3KL}\right\rangle\right] + h\left\langle C_{IJm3}C^{-1}_{m3n3}\right\rangle\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle N_{pKL}\right\rangle;$$

$$B_{IJKL} = h\left\langle x_3\tilde{\tilde{C}}_{IJKL}\right\rangle = h\left[\left\langle x_3 J^{-1}_{IJKL}\right\rangle + \left\langle x_3 C_{IJm3}C^{-1}_{m3n3}\right\rangle\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3KL}\right\rangle -\right.$$

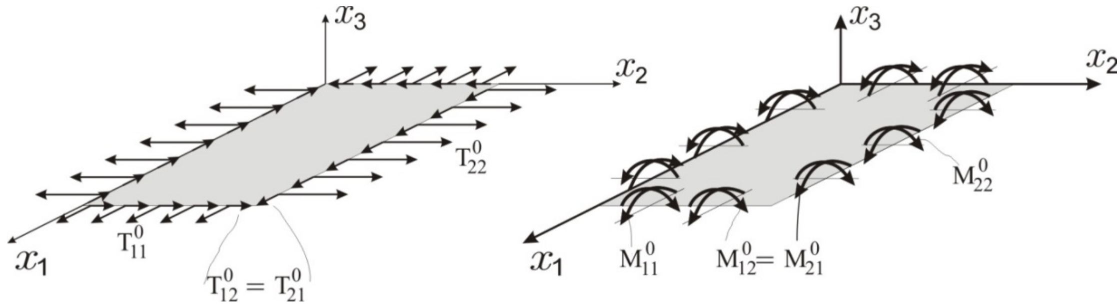
$$\left. - \left\langle x_3 C_{IJm3}C^{-1}_{m3n3}C_{n3KL}\right\rangle\right];$$

$$D_{IJKL} = h\left\langle x_3^2\tilde{\tilde{C}}_{IJKL} + x_3\tilde{\tilde{C}}_{IJKL3}\right\rangle = h\left[\left\langle x_3^2 J^{-1}_{IJKL}\right\rangle + \left\langle x_3^2 C_{IJm3}C^{-1}_{m3n3}\right\rangle\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle C^{-1}_{p3q3}C_{q3KL}\right\rangle -\right.$$

$$\left. - \left\langle x_3^2 C_{IJm3}C^{-1}_{m3n3}C_{n3KL}\right\rangle\right] + h\left\langle x_3 C_{IJm3}C^{-1}_{m3n3}\right\rangle\left\langle C^{-1}_{n3p3}\right\rangle^{-1}\left\langle N_{pKL}\right\rangle$$

6. ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ, НЕОДНОРОДНОЙ ПО ТОЛЩИНЕ ПЛАСТИНЫ ПОСТОЯННЫМИ СИЛАМИ И МОМЕНТАМИ

Пусть на границе срединного прямоугольника $0 \le x_I \le a_I$ пластины заданы постоянные силы T^0_{IJ} и моменты M^0_{IJ}, распределенные так, как показано на рисунке



Нагрузки в срединной плоскости отсутствуют, т.е. $\vec{q} = 0$. В этом случае уравнения равновесия (14) удовлетворяются при постоянных $T_{IJ} = T^0_{IJ}$, $M_{IJ} = M^0_{IJ}$. Из обратных определяющих соотношений (25) следует, что тензор деформаций и тензор кривизны срединной плоскости также постоянны $\gamma_{IJ} = \gamma^0_{IJ}$, $\varkappa_{IJ} = \varkappa^0_{IJ}$, где

$$\begin{aligned} \gamma^0_{IJ} &= d^{*-1}_{IJKL}T^0_{KL} - d^{*-1}_{IJMN}\hat{B}_{MNPQ}D^{-1}_{PQKL}M^0_{KL}, \\ \varkappa^0_{IJ} &= -d^{-1}_{IJKL}M^0_{KL} - d^{-1}_{IJMN}B_{MNPQ}A^{-1}_{PQKL}T^0_{KL} \end{aligned} \qquad (31)$$

Коэффициенты d_{IJKL} и d^*_{IJKL} определяются по формулам (25). Полагая, что произвольная точка срединной плоскости с координатами $0 \le \xi_I \le a_I$ жестко защемлена, получаем из (31) распределение перемещений точек срединной плоскости

$$w_I(x_1, x_2) = \gamma^0_{IJ}(x_J - \xi_J), \quad w_3(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}\varkappa^0_{IJ}(x_I - \xi_I)(x_J - \xi_J)$$

Отметим, что в данной задаче во всех рядах остается только первый член. Перемещения и продольные напряжения в неоднородной по толщине пластине представляются только нулевым приближением и находятся по формулам (26) и (27).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложена новая методика построения инженерной теории неоднородных пластин, основанная на интегральном представлении перемещений в неоднородной пластине через перемещения в однородной пластине с эффективными жесткостями. Эффективные жесткости вычисляются через структурные функции, которые определяются функциональной зависимостью модулей упругости материала пластины от координат. Для нахождения структурных функций сформулированы вспомогательные краевые задачи, которые можно решать численно или аналитически. В случае пластины неоднородной по толщине структурные функции зависят только от координаты по толщине и находятся аналитически. Рассмотрены модельные задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбачев В.И. *Метод тензоров Грина для решения краевых задач теории упругости неоднородных тел* // Вычислительная механика. – 1991. – №2. – С.61-76.
2. Горбачев В.И. *Осреднение линейных задач механики композитов при непериодической неоднородности* // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2001. – №1. – С.31-37.
3. Горбачев В.И. *Интегральные формулы в симметричной и несимметричной упругости* // Вестник Московского университета. – 2009. – №6. – С.57-60.
4. Горбачев В.И. *Динамические задачи механики композитов* // Известия Российской академии наук. Серия физическая. – 2011. – Т.75. – №1. – С.117-122.
5. Горбачев В.И. *Интегральные формулы в связанной задаче термоупругости неоднородного тела. Применение в механике композитов* // Прикладная механика и математика. – 2014. – Т.78. – №2. – С.277-299.
6. Новацкий В. *Теория упругости*. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
7. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
8. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 336 с.
9. Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.

10. Васильев В.В., Лурье С.А. *К проблеме построения неклассических теорий пластин* // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 1990. – №2. – С.158-167.
11. Кунин И.А. *Теория упругих сред с микроструктурой*. М.: Наука, 1975. – 416 с.
12. Ломакин В.А. *Теория упругости неоднородных тел*. – М.: Изд-во МГУ, 1976. – 368 с.
13. Найфе А. *Методы возмущений*. – М.: Мир, 1976. – 456 с.
14. Горбачев В.И., Фирсов Л.Л. *Новая постановка задачи теории упругости для слоя* // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2011. – №1. – С.114-121.
15. Горбачев В.И., Симаков В.А. *Операторный метод решения задач о равновесии упругой, неоднородной, анизотропной плиты* // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. – 2004. – №2. – С.55-64.

REFERENCES

1. Gorbachev V.I. *Metod tenzorov Grina dlya resheniya kraevykh zadach neodnorodnykh tel [A for the solution of boundary-value problems of the theory of elasticity of the nonuniform skew fields]*. Vychislitelnaya mekhanika, 1991, No.2, Pp.61-76.
2. Gorbachev V.I. *Osrednenie lineynykh zadach mekhaniki kompozitov pri neperiodicheskoy neodnorodnosti [Average of linear problems of a mechanics of aggregates at acyclic heterogeneity]*. Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk, Mekhanika tverdogo tela, 2001, No.1, Pp.31-37.
3. Gorbachev V.I. *Integral formulas in symmetric and asymmetric elasticity* // Moscow University Mechanics Bulletin, 2009, Vol.64, No.6, Pp.148-151.
4. Gorbachev V.I. *Dynamic problems of composite mechanics* // Bulletin of the Russian Academy of Sciences: Physics, 2011, Vol.75, No.1, Pp.110-115.
5. Gorbachev V.I. *Integral formulae in the coupled problem of the thermoelasticity of an inhomogeneous body. Application in the mechanics of composite materials* // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2014, Vol.78, No.2, Pp.192-208.
6. Novatsky V. *Teorija yprugosti [Teorija of elasticity]*. Moskva: Mir, 1975, 872 p.
7. Bakhvalov N.S., Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh [Osrednenie of processes in periodic mediums]*. Moskva: Nauka, 1984, 352 p.
8. Pobedrja B. E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov [A mechanics of composite materials]*. Moskva: Izdatelstvo MGU, 1984, 336 p.
9. Vasilev V.V. *Mekhanika konstruktsiy iz kompozitsionnykh materialov [Mehanika of constructions from composite materials]*. Moskva: Mashinostroenie, 1988, 272 p.
10. Vasiliev V.V, Lurie S.A. *K probleme postroenya neklassicheskoy teotii plastin [To a problem of build–up of nonclassical theories of plates]*. Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk, Mekhanika tverdogo tela, 1990, No.2, Pp.158-167.
11. Kunin I.A. *Teorija uprugikh sped s mikrostrukturoi [Theory of elastic mediums with a microstructure]*. Moskva: Nauka, 1975, 416 p.
12. Lomakin V.A. *Teorija uprugosti neodnorodnykh tel [The theory of elasticity of the nonuniform skew fields]*. Moskva: Izdatelstvo MGU, 1976, 368 p.
13. Najfe A. *Metody vozmushchenii [Perturbation methods]*. Moskva: Mir, 1976, 456 p.
14. Gorbachev V.I., Firsov L.L. *New statement of the elasticity problem for a layer* // Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.1, Pp.89-95.

15. Gorbachev V.I., Simakov V.A. *Operatornyi metod resheniia zadach o ravnovesii uprugoi, neodnorodnoi, anizotropnoi plity [The Symbolical method of the solution of equilibrium problems of an elastic, nonuniform, aeolotropic plate]*. Izvestiya Rossiyskoy Akademii Nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2004, No.2, Pp.55-64.

Поступила в редакцию 11 ноября 2016 года.

Сведения об авторе:

Горбачев Владимир Иванович – д.ф.-м.н., проф., Кафедра механики композитов, Механико-математический факультет, Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия; e-mail: vigorby@mail.ru