

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ФОРМАХ РАВНОВЕСИЯ МОДЕЛИ ОДНОМЕРНОГО КОНТИНУУМА КОССЕРА С ПЛАСТИЧЕСКИМИ СВОЙСТВАМИ¹

Иванова О.А.

АО «Концерн радиостроения «Вега», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

В статье рассматриваются плоские формы равновесия модели одномерного континуума Коссера [1], построенной подобно моделям [2,3] на основе подхода механического (конструктивного) моделирования А.А. Ильюшина [4] в виде тонкого стержня с помещенными на его упругой линии на шарнирах массивными жёсткими включениями (шкивами), связанными между собой ременной передачей. Конструкция принимается способной деформироваться (изгибаться и растягиваться) в одной плоскости и обладающей следующими свойствами: свойства модели на растяжение, изгиб несущего стержня и взаимные повороты включений считаются упругими [5,6], свойства же в отношении моментных взаимодействий между несущим стержнем и включениями при их взаимных поворотах имеют вид идеальной пластичности [7,8] (типа сухого трения).

Для такой модели проведена линеаризация уравнений движения для малых отклонений от прямолинейной недеформированной конфигурации. Исследованы постановки краевых задач статики (первой, второй и смешанной краевых задач), изучен вопрос существования и единственности их решений. Отмечено наличие при одних и тех же условиях бесконечного множества форм равновесия, выделены случаи единственности решений, соответствующие предельным формам равновесия, в которых момент взаимодействия несущего стержня и системы включений (имеющий вид сухого трения) достигает максимально допустимых (по модулю) значений. Рассмотрены примеры общего и частного характера: случай отсутствия распределённых нагрузок, случай свободных краёв стержня и свободных крайних включений, а также случай «самоуравновешенности» изгибающего и передаточного моментов (суммарный момент равен нулю).

Ключевые слова: неоднородные структуры; механическое (конструктивное) моделирование; одномерный континуум Коссера; упругие и идеальнопластические свойства; плоскопараллельные движения; статика; неединственность решений; единственность предельных форм равновесия

SOME LIMITING FORMS OF EQUILIBRIUM OF ONE-DIMENSIONAL COSSERAT CONTINUUM MODEL WITH PLASTIC PROPERTIES

Ivanova O.A.

JSC “Radio Engineering Corporation “Vega”, Moscow, Russia

ABSTRACT

¹Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, проект №16-01-00669.

Plane equilibrium forms of one-dimensional Cosserat continuum model are considered. The model is built on the base of Ilyushin's mechanical modeling approach. It consists of a beam supplied by rigid massive inclusions periodically placed along the longitudinal line of the beam. Those inclusions are connected with their nearest neighbors by belt drives. We consider bending-tension motion of this construction in one plane. Model behavior in bending and tension motions of the supporting beam and relative rotation motions of the inclusions is elastic. Model behavior in the moment action of inclusions on supporting beam elements is described by perfect plasticity relations (sort of dry friction).

The linearization of the such model motion equations is made for the case of small departures from undeformed configuration. Static stress and motion boundary value problems definitions are examined. The question of existence and uniqueness of solution for those problems is studied. The fact of existence of infinitely many forms of equilibrium upon the same conditions is mentioned. The cases of uniqueness of solution are separated, they correspond to the limiting forms of equilibrium in which the moment action of inclusions on supporting beam elements reaches its maximum allowed values (in absolute value). Some general and special examples are considered, such as: the case of absence of distributed loads, the case of free beam borders and free end inclusions, the case of bending and transmissive moments "self-equilibrium" (when the sum of those moments is equal to zero).

Keywords: heterogeneous structures; mechanical modelling; one-dimensional Cosserat continuum; elastic and perfect plastic behavior; two-dimensional motion; statics; ununiqueness of solutions; uniqueness of limiting forms of equilibrium

1. УРАВНЕНИЯ МОДЕЛИ И ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСТАНОВОК КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

1.1. Общие уравнения модели.

Используется предложенный А.А. Ильюшиным метод механического (конструктивного) моделирования [4], состоящий в построении модели конструкции, составленной элементами (ячейками) специального вида, осредненные свойства которой воспроизводят свойства моделируемого континуума. Исходной моделью для континуума Коссера [1] принята упругая конструкция в виде тонкого стержня круглого сечения с помещенными на его упругой линии на упругих шарнирах массивными жёсткими включениями (шкивами), связанными между собой упругими ременными передачами через невесомые передаточные диски (рис.1).

Ячейкой конструкции назовём повторяющийся элемент конструкции, включающий один из дисков и два полустержня, примыкающих к месту крепления этого диска с двух сторон (рис.2). Рассматриваются движения конструкции в плоскости x, y , характеризующиеся перемещениями узлов (мест крепления осей дисков), изгибом и растяжением несущего стержня совместно с растяжением ременных передач (считаем, что ременные передачи не теряют подходящего для зацепления дисков натяжения), а также вращением дисков вокруг своих осей. Эти движения сопровождаются плоскопараллельной системой силовых и моментных (векторы силовых моментов перпендикулярны к плоскости) внешних воздействий на конструкцию и внутренних взаимодействий её элементов.

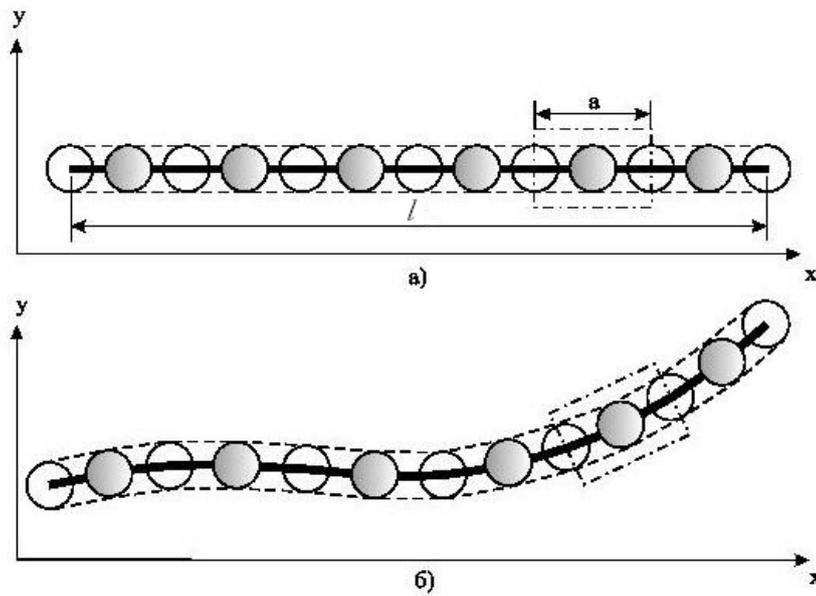


Рис.1. Конструкция, привлекаемая для моделирования одномерного континуума Коссера в недеформированной (а) и деформированной (б) конфигурациях.

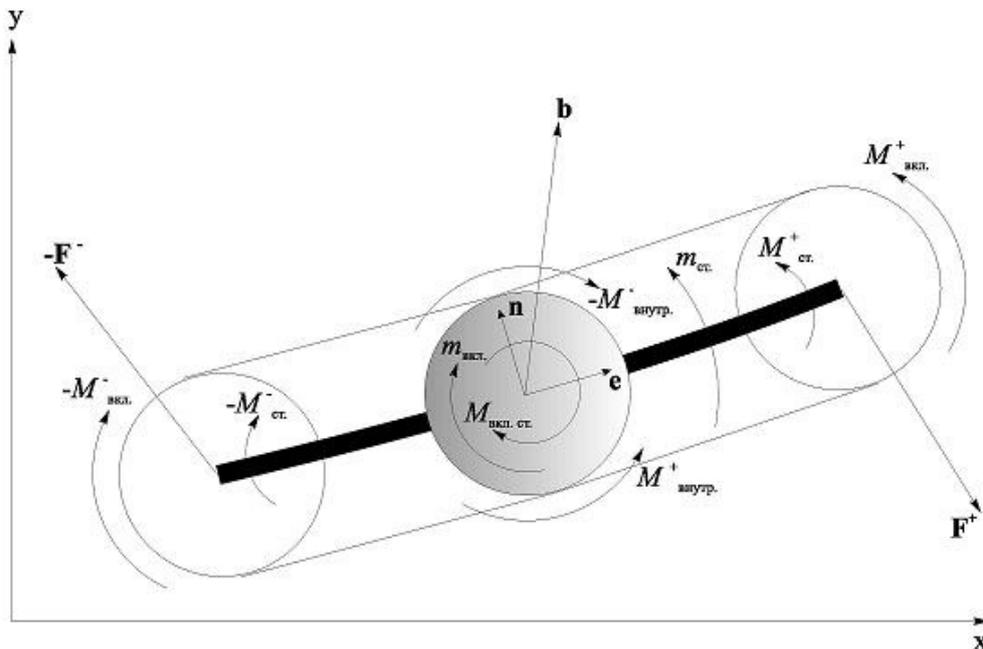


Рис.2. Ячейка конструкции.

Рассматриваются движения конструкции в плоскости x, y , характеризуемые перемещениями узлов (мест крепления осей дисков), изгибом и растяжением несущего стержня совместно с растяжением ременных передач (считаем, что ременные передачи не теряют подходящего для зацепления дисков натяжения), а также вращением дисков вокруг своих осей. Эти движения сопровождаются плоскопараллельной системой силовых и моментных (векторы силовых моментов перпендикулярны к плоскости) внешних воздействий на конструкцию и внутренних взаимодействий её элементов.

В предположении плавного изменения отнесённых к ячейке кинематических и силовых характеристик состояния конструкции при указанных движениях вдоль координатной оси (упругой линии стержня) так, что наименьшая длина участка их монотонного изменения существенно больше характерных размеров ячейки, предельным переходом получены осреднённые уравнения движения континуальной модели оснащённого стержня [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{r}} &= 0, \\ \frac{\partial M_{ст.}}{\partial \xi} + Q\lambda + m + M_{вкл. \rightarrow ст.} &= 0, \\ \frac{\partial M_{вкл.}}{\partial \xi} - m_{в.} - M_{вкл. \rightarrow ст.} - J\ddot{\varphi}_{вкл.} &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь \mathbf{r} – радиус-вектор точки упругой линии в деформированной конфигурации, $\varphi_{вкл.}$ – текущее значение абсолютного угла поворота включения, λ – кратность удлинения элемента несущего стержня, \mathbf{F} и $M_{ст.}$ – вектор силы и изгибающий момент в поперечном сечении несущего стержня, Q – поперечная (а P – продольная) составляющая силы \mathbf{F} , $M_{вкл.}$ – момент взаимодействия соседних включений (передаточный момент включений), $M_{вкл. \rightarrow ст.}$ – погонный (на единицу длины стержня в недеформированной конфигурации) момент воздействия системы включений на элемент стержня, \mathbf{f} – вектор внешней погонной силы, m и $m_{в.}$ – внешние погонные моменты, действующие на несущий стержень и на включения соответственно; все эти величины являются функциями лагранжевых координат: длины дуги ξ упругой линии несущего стержня в недеформированной конфигурации и времени t , точками обозначены производные по времени; константами модели считаются погонная плотность ρ массы оснащённого стержня и погонный момент J инерции системы включений.

Определяющие соотношения оснащённого стержня выражаются связью внутренних силовых и моментных характеристик P , $M_{ст.}$, $M_{вкл.}$, $M_{вкл. \rightarrow ст.}$ с кинематикой стержня.

1.2. Линеаризация уравнений. Идеально пластическая связь.

Рассмотрим положения равновесия конструкции, описанной в предыдущей части, при статических внешних нагрузках.

Подобно линеаризации, проведённой в [2], будем рассматривать плоские деформированные конфигурации оснащённого стержня, характеризующиеся малыми отклонениями от прямолинейной (вдоль оси x) недеформированной конфигурации, а именно, малыми перемещениями u и w точек стержня (в направлении декартовых осей x и y соответственно), и малыми поворотами $\varphi_{вкл.}$ включений так, что переменные x и ξ (и дифференцирование по ним) могут быть отождествлены, относительное удлинение $\varepsilon \equiv \lambda - 1$ мало, и можно принять $\varepsilon = \frac{du}{dx}$, угол поворота $\varphi_{ст.}$ и кривизна κ элемента стержня приближённо выражаются равенствами $\varphi_{ст.} = \frac{dw}{dx}$ и $\kappa = \frac{d^2w}{dx^2}$, а P и Q можно считать проекциями силы \mathbf{F} на

оси x и y соответственно. Тогда определяющие соотношения системы выражаются зависимостью внутренних обобщённых сил P , $M_{ст.}$, $M_{вкл.}$, $M_{вкл. \rightarrow ст.}$ от соответствующих энергетически сопряжённых им деформационных параметров (обобщённых перемещений) системы $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2w}{dx^2}$, $\frac{d\varphi_{вкл.}}{dx}$, $\varphi_{вкл.} - \frac{dw}{dx}$.

Механические свойства системы в отношении растяжения и изгиба несущего стержня, а также взаимного поворота включений примем упругими [5,7,8], а в отношении взаимного поворота включений и элементов несущего стержня – идеально жёсткопластическими (типа сухого трения) [7,8]. Для определяющих соотношений примем простейшую форму отдельных зависимостей внутри каждой из указанных энергетически сопряжённых пар обобщённых сил и обобщённых перемещений.

Тогда, привлекая классическую теорию растяжения и изгиба тонких стержней [5,6,8], для упругих свойств системы получаем [2]

$$P = ES_{сеч.} \frac{du}{dx}, M_{ст.} = EJ_{сеч.} \frac{d^2w}{dx^2}, M_{вкл.} = C \frac{d\varphi_{вкл.}}{dx}, \quad (2)$$

где E – модуль Юнга материала несущего стержня, $S_{сеч.}$ и $J_{сеч.}$ – площадь и момент инерции поперечного сечения несущего стержня соответственно, а константа C – коэффициент жёсткости системы включений.

Идеально жёсткопластические свойства [7,8] взаимодействия включений с элементами несущего стержня выразим соотношениями

$$|M_{вкл. \rightarrow ст.}| \leq M_{\max.} = const > 0, \quad (3)$$

причём

$$\begin{aligned} |M_{вкл. \rightarrow ст.}| < M_{\max.} &\Rightarrow \dot{\varphi}_{отн.} = 0, \\ \dot{\varphi}_{отн.} \neq 0 &\Rightarrow |M_{вкл. \rightarrow ст.}| = M_{\max.}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\varphi_{отн.} = \varphi_{вкл.} - \varphi_{ст.} \equiv \varphi_{вкл.} - \frac{dw}{dx}$ – угол относительного поворота включений и элемента несущего стержня. Это означает, что ограничениям подвергнута не величина угла $\varphi_{отн.}$, а лишь скорость изменения её во времени, причём в случае $|M_{вкл. \rightarrow ст.}| = M_{\max.}$ возможно как движение ($\dot{\varphi}_{отн.} \neq 0$), так и покой ($\dot{\varphi}_{отн.} = 0$) – предельное (для элемента оснащённого стержня) состояние равновесия. В общем случае равновесия выполнено неравенство (3), величина момента $M_{вкл. \rightarrow ст.}$ не определена, он играет роль реакции (подобно поперечной силе Q), а тем самым включается в число неизвестных величин, подлежащих определению при решении краевой задачи в целом.

Для рассматриваемого здесь случая равновесия при отсутствии скоростей деформаций достаточно учитывать лишь соотношение (3). Таким образом, условия (2), (3) составляют полную систему определяющих соотношений краевой задачи статики для рассматриваемой системы.

В рассматриваемом случае равновесия конструкции с малыми перемещениями и углами поворотов система уравнений (1) примет следующий вид (P и Q – продольная и поперечная составляющие вектора \mathbf{F} , а f_x и f_y – проекции внешней погонной силы \mathbf{f})

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} + f_x = 0, \quad \frac{dQ}{dx} + f_y = 0, \\ \frac{dM_{ст.}}{dx} + Q + M_{вкл. \rightarrow ст.} + m = 0, \\ \frac{dM_{вкл.}}{dx} - M_{вкл. \rightarrow ст.} + m_e = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

или с учётом (2) – вид

$$\begin{aligned} ES_{сеч.} \frac{du}{dx} + f_x = 0, \quad \frac{dQ}{dx} + f_y = 0, \\ EJ_{сеч.} \frac{d^3 w}{dx^3} + Q + M_{вкл. \rightarrow ст.} + m = 0, \\ C \frac{d^2 \varphi_{вкл.}}{dx^2} - M_{вкл. \rightarrow ст.} + m_e = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где, конечно, предполагается выполненным неравенство (3).

1.3. Исследование постановок краевых задач.

Неопределённость величины $M_{вкл. \rightarrow ст.}$ и её ограниченность условием (3) всерьёз ставят вопрос о существовании и единственности решений статических краевых задач для рассматриваемой системы: первой краевой задачи, описываемой системой (6), (3) и граничными условиями в терминах перемещений u , w и угла $\varphi_{вкл.}$, второй краевой задачи, описываемой уравнениями (5), (3) (или (6), (3)) с учётом определяющих соотношений (2) и граничными условиями в терминах сил P , Q и моментов $M_{ст.}$, $M_{вкл.}$, а также смешанной краевой задачи.

При заданных внешних нагрузках f_x , f_y , m и m_e система (5) содержит 4 уравнения для 5 неизвестных функций P , Q , $M_{ст.}$, $M_{вкл.}$, $M_{вкл. \rightarrow ст.}$, а система (6) – 4 уравнения для 5 неизвестных функций u , w , Q , $\varphi_{вкл.}$, $M_{вкл. \rightarrow ст.}$. Поэтому в рамках условия (3) эти системы, вообще говоря, не могут обеспечить существования или единственности решений указанных краевых задач статики при произвольных граничных условиях и распределённых внешних нагрузках.

Заметим, однако, что если функция $M_{вкл. \rightarrow ст.}$ известна (задана в пределах (3)), то она порождает собою в уравнениях (5), (6) дополнительные известные слагаемые к внешним погонным моментам m и m_e , уравнения принимают вид уравнений для несвязанного одномерного континуума Коссера [2], и для каждой так заданной функции $M_{вкл. \rightarrow ст.}$ краевые задачи имеют единственные решения относительно остальных неизвестных функций (вторая задача – с точностью до жёстких движений системы). Задание функции $M_{вкл. \rightarrow ст.}$ определяет характер решения, а допустимые пределы её значений (3) определяют множество допустимых для наличия решения граничных условий (для второй краевой задачи).

Действительно, для всех краевых задач уравнения (5) равносильны следующим представлениям значений искомых функций P , Q , $M_{ст.}$, $M_{вкл.}$ в любой точке x стержня ($0 \leq x \leq l$, где l – длина стержня) через их значения

в левом конце стержня (при $x=0$), заданные функции f_x , f_y , m , m_e и (неизвестную) функцию $M_{\text{вкл.} \rightarrow \text{ст.}}$

$$\begin{aligned} P(x) &= P(0) - \int_0^x f_x(x') dx', \quad Q(x) = Q(0) - \int_0^x f_y(x') dx', \\ M_{\text{ст.}}(x) &= M_{\text{ст.}}(0) - \int_0^x (m(x') + Q(x')) dx' - \int_0^x M_{\text{вкл.} \rightarrow \text{ст.}}(x') dx', \\ M_{\text{вкл.}}(x) &= M_{\text{вкл.}}(0) - \int_0^x m_e(x') dx' + \int_0^x M_{\text{вкл.} \rightarrow \text{ст.}}(x') dx', \end{aligned} \quad (7)$$

следствием которых является равенство для суммарного момента $M_{\text{ст.}} + M_{\text{вкл.}}$

$$M_{\text{ст.}} + M_{\text{вкл.}} = M_{\text{ст.}}(0) + M_{\text{вкл.}}(0) - \int_0^x (m(x') + m_e(x') + Q(x')) dx'. \quad (8)$$

Равенства (7), в частности, регулируют различие величин выраженных ими функций в конечных точках стержня $x=0$ и $x=l$. Следовательно, если для второй краевой задачи граничные условия выражены равенствами

$$\begin{aligned} P(0) &= P_0, \quad Q(0) = Q_0, \quad M_{\text{ст.}}(0) = M_{\text{ст.}0}, \quad M_{\text{вкл.}}(0) = M_{\text{вкл.}0}, \\ P(l) &= P_l, \quad Q(l) = Q_l, \quad M_{\text{ст.}}(l) = M_{\text{ст.}l}, \quad M_{\text{вкл.}}(l) = M_{\text{вкл.}l} \end{aligned} \quad (9)$$

(на конце $x=0$ приложены заданные внешние граничные силы и моменты $-P_0$, $-Q_0$, $-M_{\text{ст.}0}$, $-M_{\text{вкл.}0}$, а на конце $x=l$ – силы и моменты P_l , Q_l , $M_{\text{ст.}l}$, $M_{\text{вкл.}l}$), то равенства (7), (8) для $x=l$ выражают необходимые условия равновесия (наличия решения) – равенство нулю главного вектора и главного момента всех внешних сил – в виде равенств

$$\begin{aligned} P_l - P_0 &= - \int_0^l f_x(x) dx, \quad Q_l - Q_0 = - \int_0^l f_y(x) dx, \\ (M_{\text{ст.}l} + M_{\text{вкл.}l}) - (M_{\text{ст.}0} + M_{\text{вкл.}0}) &= - \int_0^l (m(x) + m_e(x) + Q(x)) dx, \end{aligned} \quad (10)$$

определяющих разности значений на концах стержня величин сил P , Q и суммарного момента $M_{\text{ст.}} + M_{\text{вкл.}}$ через заданные распределённые внешние нагрузки (суммарный момент – с учётом второго из представлений (7)).

Наложение определяющего ограничения (3) приводит в силу (7) к неравенствам

$$\begin{aligned} - \int_0^l (m(x) + Q(x)) dx - M_{\text{max.}} l &\leq M_{\text{ст.}l} - M_{\text{ст.}0} \leq - \int_0^l (m(x) + Q(x)) dx + M_{\text{max.}} l, \\ - \int_0^l m_e(x) dx - M_{\text{max.}} l &\leq M_{\text{вкл.}l} - M_{\text{вкл.}0} \leq - \int_0^l m_e(x) dx + M_{\text{max.}} l, \end{aligned} \quad (11)$$

задающим при известных внешних распределённых нагрузках допустимые для существования решения краевой задачи пределы для разностей значений на концах стержня величин $M_{\text{ст.}}$, $M_{\text{вкл.}}$, а значит, и их суммы $M_{\text{ст.}} + M_{\text{вкл.}}$. При выполнении третьего условия (10) цепочки неравенств (11) равносильны друг другу. Как видно из (7), фактические значения этих разностей для $M_{\text{ст.}}$ и $M_{\text{вкл.}}$

определяются функцией $M_{вкл. \rightarrow ст.}$, причём чем больше эта разность для величины $M_{ст.}$, тем меньше она для величины $M_{вкл.}$; крайних допустимых по (11) значений (при $M_{вкл. \rightarrow ст.} \equiv M_{\max.}$ или $M_{вкл. \rightarrow ст.} \equiv -M_{\max.}$) они достигают лишь одновременно: разность для $M_{ст.}$ – наибольшего, а разность для $M_{вкл.}$ – наименьшего, и наоборот (равенства в цепочках (11) попарно согласованы: они достигаются лишь одновременно, причём в разных концах цепочек). Для суммарного момента $M_{ст.} + M_{вкл.}$ в соответствии с третьим равенством (10) эта разность фиксирована и не зависит от функции $M_{вкл. \rightarrow ст.}$.

С другой стороны, нетрудно убедиться, что при любых граничных условиях, удовлетворяющих (10) и (11), существует (вообще говоря, не единственная) функция $M_{вкл. \rightarrow ст.}$, отвечающая в соответствии с (7) этим граничным условиям, и для неё решение второй краевой задачи относительно остальных неизвестных функций существует и единственно с точностью до жёсткого изменения конфигурации системы². Если граничные условия удовлетворяют строгим неравенствам в (11), то функция $M_{вкл. \rightarrow ст.}$ определяется ими неоднозначно, и решение второй краевой задачи в полной исходной постановке (относительно всех неизвестных функций, включая $M_{вкл. \rightarrow ст.}$ как неизвестную функцию) не единственно. Если же для граничных условий выполнена какая-либо из пар согласованных равенств в (11), то имеем однозначно $M_{вкл. \rightarrow ст.} \equiv M_{\max.}$ (или $M_{вкл. \rightarrow ст.} \equiv -M_{\max.}$), и решение второй краевой задачи в полной постановке (в которой $M_{вкл. \rightarrow ст.}$ считается неизвестной функцией) с точностью до жёстких изменений конфигурации единственно.

Таким образом, в постановке второй краевой задачи, имея в виду выполнение условий (10), (11), для существования решения достаточно предусмотреть задание лишь пяти из граничных условий (9), соответствующих следующим пяти заданным величинам: одной из P_0 или P_l , одной из Q_0 или Q_l , а также каким-либо трём из $M_{ст.0}$, $M_{вкл.0}$, $M_{ст.l}$, $M_{вкл.l}$. Если при этом в цепочке неравенств в (11) достигается равенство, то решение единственно.

Аналогичные утверждения о единственности справедливы также для первой и смешанной краевых задач.

Решения краевых задач статики для оснащённого стержня, т.е. статические состояния системы и формы её равновесия назовём *предельными*, если для них почти во всех точках стержня выполнено равенство $|M_{вкл. \rightarrow ст.}| \equiv M_{\max.}$, и *строго предельными*, если они отвечают какому-либо из тождеств: $M_{вкл. \rightarrow ст.} \equiv M_{\max.}$ или $M_{вкл. \rightarrow ст.} \equiv -M_{\max.}$. Строго предельные решения суть единственные решения полных постановок задач (с предельными в смысле равенств в (11) граничными условиями), а просто предельные решения, вообще говоря, не единственны.

² Здесь жёсткое изменение конфигурации системы подразумевает смещения и поворот несущего стержня как жёсткого целого, а также поворот всей системы включений на один и тот же угол. Независимость такого «жёсткого» поворота системы включений от поворотов несущего стержня как жёсткого целого обусловлена идеально пластическим характером (сухим трением) взаимодействия элементов несущего стержня с включениями. Оснащённым стержням рассматриваемого типа с полностью упругими свойствами [2] такая независимость не свойственна, кроме лишь случая несвязанных систем.

При отсутствии распределённых внешних нагрузок ($f_x \equiv 0, f_y \equiv 0, m \equiv 0, m_e \equiv 0$) для всех краевых задач упрощаются эквивалентные уравнения равновесия (5) представления (7)

$$P(x) \equiv P(0) = const, \quad Q(x) \equiv Q(0) = const,$$

$$M_{ст.}(x) = M_{ст.}(0) - Q(0)x - \int_0^x M_{вкл. \rightarrow ст.}(x') dx', \quad (12)$$

$$M_{вкл.}(x) = M_{вкл.}(0) + \int_0^x M_{вкл. \rightarrow ст.}(x') dx',$$

и их следствие (8)

$$M_{ст.}(x) + M_{вкл.}(x) = M_{ст.}(0) + M_{вкл.}(0) - Q(0)x, \quad (13)$$

а требования (10), (11) к граничным условиям (9) второй краевой задачи принимают соответственно вид

$$P_l = P_0, \quad Q_l = Q_0, \quad (M_{ст.l} + M_{вкл.l}) - (M_{ст.0} + M_{вкл.0}) = -Q_0 l, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} -Q_0 l - M_{\max.} l \leq M_{ст.l} - M_{ст.0} \leq -Q_0 l + M_{\max.} l, \\ -M_{\max.} l \leq M_{вкл.l} - M_{вкл.0} \leq M_{\max.} l, \end{aligned} \quad (15)$$

уравнения же равновесия в форме (6) с учётом (2) принимают вид

$$ES_{сеч.} \frac{du}{dx} = P_0, \quad Q = Q_0,$$

$$EJ_{сеч.} \frac{d^3 w}{dx^3} + Q_0 + M_{вкл. \rightarrow ст.} = 0, \quad (16)$$

$$C \frac{d^2 \varphi_{вкл.}}{dx^2} - M_{вкл. \rightarrow ст.} = 0.$$

2. ПРИМЕРЫ ПРЕДЕЛЬНЫХ ФОРМ РАВНОВЕСИЯ

Рассмотрим общий случай второй краевой задачи и примеры равновесных состояний (в том числе предельных форм равновесия) оснащённого стержня при отсутствии внешних распределённых нагрузок, когда имеют место представления (12), (13), выполнены условия (14), (15) и уравнения (16).

2.1. Общий случай отсутствия распределённых нагрузок (вторая краевая задача).

В соответствии со сделанным выше замечанием о задании граничных условий, имея в виду выполнение требований (14), (15), выберем следующие пять независимых из восьми граничных условий (9)

$$P(0) = P_0, \quad Q(0) = Q_0, \quad M_{ст.}(0) = M_{ст.0}, \quad M_{вкл.}(0) = M_{вкл.0}, \quad M_{ст.}(l) = M_{ст.l}, \quad (17)$$

где все величины $P_0, Q_0, M_{ст.0}, M_{вкл.0}, M_{ст.l}$ могут быть заданы произвольно ($M_{ст.0}$ и $M_{ст.l}$ – в рамках первого требования (15)).

Тогда решение задачи в отношении сил и моментов представляется согласно (12) формулами

$$P(x) \equiv P_0 = const, \quad Q(x) \equiv Q_0 = const,$$

$$M_{cm.}(x) = M_{cm.0} - Q_0 x - \int_0^x M_{вкл. \rightarrow cm.}(x') dx', \quad (18)$$

$$M_{вкл.}(x) = M_{вкл.0} + \int_0^x M_{вкл. \rightarrow cm.}(x') dx',$$

где $M_{вкл. \rightarrow cm.}$ – любая функция, удовлетворяющая определяющему ограничению (3) и условию

$$\int_0^l M_{вкл. \rightarrow cm.}(x) dx = M_{cm.0} - M_{cm.l} - Q_0 l. \quad (19)$$

При известной функции $M_{вкл. \rightarrow cm.}$ силы и моменты определяются формулами (18) однозначно. Тогда кинематические параметры u , w , $\varphi_{вкл.}$ находятся непосредственно из определяющих соотношений (2) либо из уравнений (16) при граничных условиях для w , $\varphi_{вкл.}$ вида

$$\frac{d^2 w}{dx^2}(0) = \frac{M_{cm.0}}{EJ_{сеч.}}, \quad \frac{d\varphi_{вкл.}}{dx}(0) = \frac{M_{вкл. \rightarrow cm.}}{C}$$

(вместо первого из этих условий можно равносильно использовать аналогичное условие на правом конце $x=l$). При любом из этих способов остающиеся неопределёнными константы (одна для u , две для w и одна для $\varphi_{вкл.}$) отвечают за жёсткое изменение конфигурации системы: смещения и поворот несущего стержня как жёсткого целого, и поворот всей системы включений на один и тот же угол. Они могут быть определены назначением величин указанных смещений и поворотов в какой-либо точке стержня.

Функций $M_{вкл. \rightarrow cm.}$, удовлетворяющих условиям (3) и (19), вообще говоря, бесконечно много, а значит, и существенно отличных друг от друга решений задачи бесконечно много. Лишь для граничных условий (17), удовлетворяющих какому-либо из равенств в первой цепочке (15), условие (19) сводится к тождеству $M_{вкл. \rightarrow cm.} \equiv M_{max.}$ (или к тождеству $M_{вкл. \rightarrow cm.} \equiv -M_{max.}$), означающему строго предельное состояние равновесия.

В общем случае производные входящих в решение (18) моментов

$$\frac{dM_{cm.}}{dx}(x) = -Q_0 - M_{вкл. \rightarrow cm.}(x), \quad \frac{dM_{вкл.}}{dx}(x) = M_{вкл. \rightarrow cm.}(x) \quad (20)$$

при всех x ограничены

$$-Q_0 - M_{max.} \leq \frac{dM_{cm.}}{dx}(x) \leq -Q_0 + M_{max.}, \quad -M_{max.} \leq \frac{dM_{вкл.}}{dx}(x) \leq M_{max.} \quad (21)$$

Введя безразмерные параметры: координаты $\tilde{x} = \frac{x}{l}$ и величины

$$\tilde{M}_{cm.} = \frac{M_{cm.} - M_{cm.0}}{M_{max.} l}, \quad \tilde{M}_{вкл.} = \frac{M_{вкл.} - M_{вкл.0}}{M_{max.} l}, \quad \tilde{M}_{вкл. \rightarrow cm.} = \frac{M_{вкл. \rightarrow cm.}}{M_{max.}} \quad \text{и} \quad \tilde{Q}_0 = \frac{Q_0}{M_{max.}},$$

приводим (20), (21) соответственно к виду

$$\frac{d\tilde{M}_{cm.}}{d\tilde{x}} = -\tilde{Q}_0 - \tilde{M}_{вкл. \rightarrow cm.}, \quad \frac{d\tilde{M}_{вкл.}}{d\tilde{x}} = \tilde{M}_{вкл. \rightarrow cm.}, \quad (22)$$

$$-\tilde{Q}_0 - 1 \leq \frac{d\tilde{M}_{ст.}}{d\tilde{x}} \leq -\tilde{Q}_0 + 1, \quad -1 \leq \frac{d\tilde{M}_{вкл.}}{d\tilde{x}} \leq 1. \quad (23)$$

Возможное расположение графиков функций $\tilde{M}_{ст.}(\tilde{x})$ и $\tilde{M}_{вкл.}(\tilde{x})$ проиллюстрировано на рис.3а) и б) соответственно. Все возможные графики этих функций заключены между жирными прямолинейными отрезками (сами отрезки суть графики для предельных состояний), а касательные к ним во всех точках имеют углы наклона, расположенные между углами наклона прямолинейных отрезков. Жирными криволинейными пунктирными линиями показан пример графиков функций $\tilde{M}_{ст.}(\tilde{x})$ и $\tilde{M}_{вкл.}(\tilde{x})$, соответствующих одному решению (одной функции $M_{вкл. \rightarrow ст.}$), через M^{**} и M^* обозначены их значения при $\tilde{x}=1$ (соответствующие граничным условиям для функций $M_{ст.}(x)$ и $M_{вкл.}(x)$ на правом конце $x=l$); допустимые для существования решения значения M^{**} и M^* согласованы друг с другом (равенством (13)) и принимают значения на отрезках $M^{**} \in [-1 - \tilde{Q}_0, 1 - \tilde{Q}_0]$ и $M^* \in [-1, 1]$.

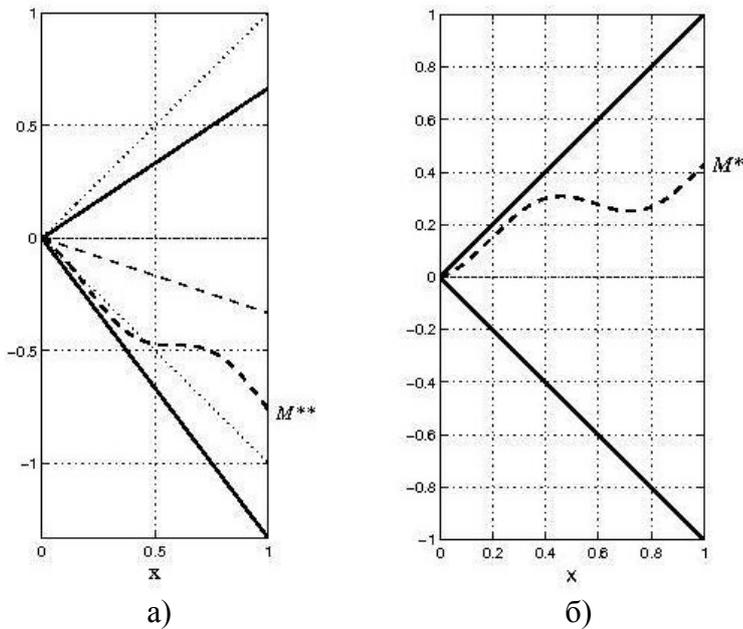


Рис.3. Возможное расположение графиков функций $\tilde{M}_{ст.}(\tilde{x})$ (а) и $\tilde{M}_{вкл.}(\tilde{x})$ (б).

2.2. Случай свободных краёв стержня и свободных крайних включений.

Покажем, что при отсутствии также граничных внешних воздействий (концы несущего стержня и крайние включения свободны от нагрузок) система может помимо тривиальной (недеформированной и прямолинейной) формы иметь нетривиальные (деформированные) формы равновесия, в том числе предельные.

В случае свободных концов оснащённого стержня граничные условия при $x=0$ и $x=l$ имеют вид

$$P=0, \quad Q=0, \quad M_{ст.}=0, \quad M_{вкл.}=0. \quad (24)$$

Тогда решения для сил и моментов (18) и условие (19) имеют вид

$$P(x) \equiv 0, Q(x) \equiv 0, \tag{25}$$

$$M_{ст.}(x) = -\int_0^x M_{вкл. \rightarrow ст.}(x') dx', M_{вкл.}(x) = \int_0^x M_{вкл. \rightarrow ст.}(x') dx',$$

$$\int_0^l M_{вкл. \rightarrow ст.}(x) dx = 0. \tag{26}$$

Первое уравнение системы (16) удовлетворяется любой постоянной функцией, например, $u \equiv 0$, второе тождественно удовлетворяется (при $Q_0 = 0$), а остальные два сводятся к системе уравнений для прогиба w , угла поворота включений $\varphi_{вкл.}$ и момента взаимодействия включений со стержнем $M_{вкл. \rightarrow ст.}$.

$$EJ_{сеч.} \frac{d^3 w}{dx^3} + M_{вкл. \rightarrow ст.} = 0, \tag{27}$$

$$C \frac{d^2 \varphi_{вкл.}}{dx^2} - M_{вкл. \rightarrow ст.} = 0.$$

Принимая решение для u в виде $u \equiv 0$, приходим к задаче отыскания функций w , $\varphi_{вкл.}$, $M_{вкл. \rightarrow ст.}$, удовлетворяющих уравнениям (27), определяющему ограничению (3), а также интегральному условию (26). Очевидно, что эта задача имеет бесконечное множество решений (с разными функциями $M_{вкл. \rightarrow ст.}$).

Рассмотрим частный случай явного задания момента $M_{вкл. \rightarrow ст.}$ в виде

$$M_{вкл. \rightarrow ст.} = \begin{cases} M_{\max.} & \text{при } x \in \left[0, \frac{l}{2}\right], \\ -M_{\max.} & \text{при } x \in \left[\frac{l}{2}, l\right], \end{cases} \tag{28}$$

удовлетворяющем ограничению (3) и условию (26).

Решив уравнения (27), после сращивания в точке $x = \frac{l}{2}$ полученных функций $w(x)$ (вместе с первой производной) и $\varphi_{вкл.}(x)$ исключим перемещение и поворот стержня как целого, а также поворот всех включений на один и тот же угол, положив $w = 0$, $\frac{dw}{dx} = 0$ и $\varphi_{вкл.} = 0$ в срединной точке $x = \frac{l}{2}$. Тогда получим единственное (отвечающее (28)) решение задачи в виде

$$w(x) = \begin{cases} \frac{M_{\max.}}{2EJ_{сеч.}} \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{l^2}{4}x - \frac{l^3}{12} \right) & \text{при } x \in \left[0, \frac{l}{2}\right], \\ \frac{M_{\max.}}{2EJ_{сеч.}} \left(\frac{1}{3}x^3 - lx^2 + \frac{3l^2}{4}x - \frac{l^3}{6} \right) & \text{при } x \in \left[\frac{l}{2}, l\right], \end{cases} \tag{29}$$

$$\varphi_{вкл.}(x) = \begin{cases} \frac{M_{\max.}}{2C} \left(x^2 - \frac{l^2}{4} \right) & \text{при } x \in \left[0, \frac{l}{2}\right], \\ \frac{M_{\max.}}{2C} \left(-x^2 + 2lx - \frac{3l^2}{4} \right) & \text{при } x \in \left[\frac{l}{2}, l\right]. \end{cases}$$

Введя центрированную и безразмерную координатную переменную \tilde{x} (точка $\tilde{x}=0$ – срединная точка стержня) и безразмерные функции \tilde{w} , $\tilde{\varphi}$ соотношениями

$$\tilde{x} = \frac{x}{l} - \frac{1}{2}, \quad \tilde{w} = \frac{2EJ_{сеч.}}{M_{\max.} l^3} w, \quad \tilde{\varphi} = \frac{2C}{M_{\max.} l^2} \varphi_{вкл.}, \quad (30)$$

в соответствии с (29) получим

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\tilde{x}^3 - \frac{1}{2}\tilde{x}^2 & \text{при } \tilde{x} \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right], \\ \frac{1}{3}\tilde{x}^3 - \frac{1}{2}\tilde{x}^2 & \text{при } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \end{cases} \quad (31)$$

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \tilde{x}^2 + \tilde{x} & \text{при } x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right], \\ -\tilde{x}^2 + \tilde{x} & \text{при } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \end{cases}$$

Графики функций (31) на отрезке $\tilde{x} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ изображены на рис.4.

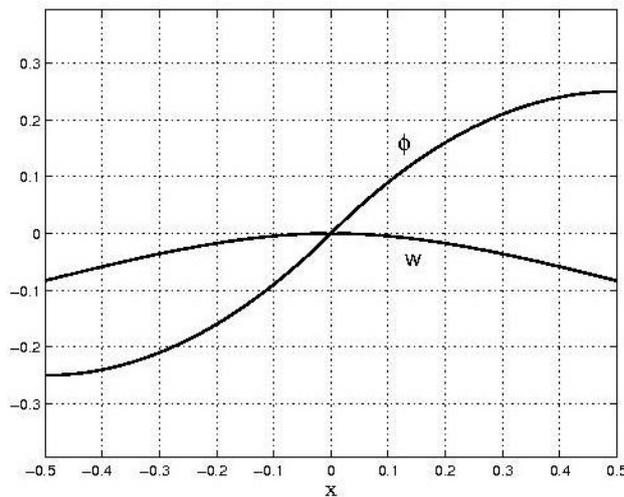


Рис.4. Графики функций $\tilde{w}(x)$ и $\tilde{\varphi}(x)$ на отрезке $\tilde{x} \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Таким образом, при отсутствии всех внешних нагрузок система может иметь бесконечное число форм равновесия, и одной из предельных форм является нетривиальная деформированная форма (29). Как видно из (28), эта форма не является чисто предельной для всего стержня, однако является таковой для каждой из его половин. При этом полученное решение, например, для правой половины (для точек $x \in \left[\frac{l}{2}, l\right]$, то есть точек $\tilde{x} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$) является решением смешанной краевой задачи для половинного стержня со свободным правым концом и защемлённым левым концом ($w=0$, $\frac{dw}{dx}=0$, $\varphi_{вкл.}=0$ при $x=\frac{l}{2}$); это решение является единственным чисто предельным решением, отвечающим тождеству $M_{вкл. \rightarrow ст.} \equiv -M_{\max.}$. Оно же является единственным (с точностью

до жёстких движений) чисто предельным решением второй краевой задачи для половинного стержня со свободным правым концом и с условиями $P=0$, $Q=0$, $M_{ст.} = -\frac{1}{2}M_{\max.}l$, $M_{вкл.} = \frac{1}{2}M_{\max.}l$ на левом конце. Решение аналогичных смешанной и второй краевых задач для левой половины стержня также единственное чисто предельное, отвечающее тождеству $M_{вкл. \rightarrow ст.} \equiv M_{\max.}$.

2.3. Случай «самоуравновешенности» моментов.

Рассмотрим ту же задачу с другими граничными условиями: пусть на концах стержня внешние силы отсутствуют, относительные углы поворота крайнего левого и крайнего правого включений фиксированы (при этом они не обязательно равны между собой), а также на концах стержня выполнено условие «самоуравновешенности» изгибного и передаточного моментов (суммарный момент равен нулю). При этом левый конец стержня закрепляем от перемещений и поворотов.

С учётом соотношений (12)-(16), общих для всех случаев отсутствия распределённых нагрузок, выделим независимую систему граничных условий этой задачи, а именно, семь условий при $x=0$

$$P=0, Q=0, M_{ст.} + M_{вкл.} = 0, \varphi_{вкл.} - \frac{dw}{dx} = \varphi_0, u=0, w=0, \frac{dw}{dx} = 0, \quad (32)$$

и одно условие при $x=l$

$$\varphi_{вкл.} - \frac{dw}{dx} = \varphi_l. \quad (33)$$

В общем случае эта задача имеет бесконечное множество решений, каждое из которых однозначно определяется функцией $M_{вкл. \rightarrow ст.}$. При этом в отличие от предыдущих случаев выбор этой функции ничем не ограничен, кроме определяющего соотношения (3). Для любой так выбранной функции $M_{вкл. \rightarrow ст.}$ существует единственное решение задачи вида

$$u \equiv 0, w = -\frac{B}{6EJ_{сеч.}}x^3 - A\frac{C}{2EJ_{сеч.}}x^2, \varphi_{вкл.} = \frac{D}{C} + Ax + \varphi_0, P \equiv 0, Q \equiv 0, \quad (34)$$

$$M_{ст.} = -\int_0^x M_{вкл. \rightarrow ст.}(x')dx' - AC, M_{вкл.} = \int_0^x M_{вкл. \rightarrow ст.}(x')dx' + AC$$

с константами

$$B = \int_0^l \left(\int_0^x M_{вкл. \rightarrow ст.}(x')dx' \right) dx, D = \int_0^l \left(\int_0^x \left(\int_0^{x'} M_{вкл. \rightarrow ст.}(x'')dx'' \right) dx' \right) dx, \quad (35)$$

$$A = \frac{\varphi_l - \varphi_0 - \left(\frac{1}{EJ_{сеч.}} + \frac{1}{C} \right) B}{\left(1 + \frac{C}{EJ_{сеч.}} \right) l}.$$

Рассмотрим предельный случай $M_{вкл. \rightarrow ст.} = M_{\max.} \forall x \in [0, l]$. В этом случае решение (34) даёт

$$\varphi_{\text{вкл.}} = \frac{M_{\text{max.}}}{2C} x^2 + Ax + \varphi_0, \quad w(x) = -\frac{M_{\text{max.}}}{6EJ_{\text{сеч.}}} x^3 - A \frac{C}{2EJ_{\text{сеч.}}}, \quad (36)$$

$$M_{\text{ст.}} = -M_{\text{max.}}x - AC, \quad M_{\text{вкл.}} = M_{\text{max.}}x + AC,$$

$$\text{где } A = \frac{\varphi_l - \varphi_0 - \frac{M_{\text{max.}} l^2}{2} \left(\frac{1}{EJ_{\text{сеч.}}} + \frac{1}{C} \right)}{l \left(1 + \frac{C}{EJ_{\text{сеч.}}} \right)}.$$

Таким образом, здесь $\varphi_{\text{вкл.}}(0) = \varphi_0$, а комбинация $(\varphi_l - \varphi_0)$ входит в коэффициент при первой степени x в выражении для $\varphi_{\text{вкл.}}(x)$ и в коэффициент при x^2 в выражении для $w(x)$.

На рис.5 изображены графики функций $\varphi_{\text{вкл.}}$ и $\frac{w}{l}$ при следующих значениях констант: $E = 2 \cdot 10^{11} \frac{H}{M^2}$, $J_{\text{сеч.}} = 5.2 \cdot 10^{-11} M^4$, $C = 25 H \cdot M^2$, $l = 1 м$, $M_{\text{max.}} = 10 H$ (что соответствует реальной конструкции, рассмотренной в [2]). Левый рисунок соответствует случаю $\varphi_0 = 0$, $\varphi_l = \frac{\pi}{3}$, а правый – случаю $\varphi_0 = -\frac{\pi}{6}$, $\varphi_l = \frac{\pi}{3}$.

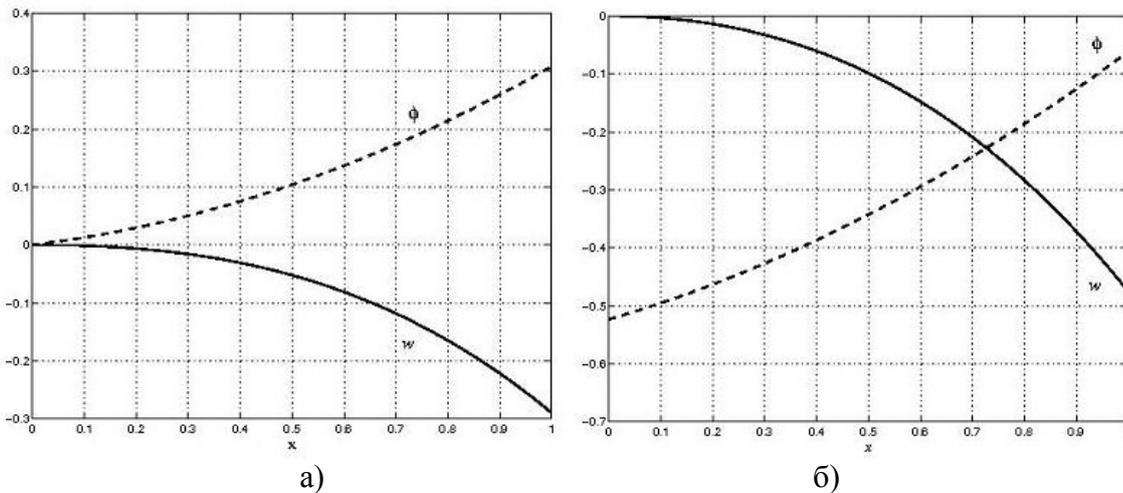


Рис.5. Графики функций $\varphi_{\text{вкл.}}$ и $\frac{w}{l}$ для случаев $\varphi_0 = 0$, $\varphi_l = \frac{\pi}{3}$ (а) и $\varphi_0 = -\frac{\pi}{6}$, $\varphi_l = \frac{\pi}{3}$ (б).

В частном случае, когда $\varphi_0 = \varphi_l$, имеем $A = -\frac{M_{\text{max.}} l}{2C}$, и график w , очевидно, не будет зависеть от φ_0 и от C . То есть, равновесие стержневой части конструкции будет независимо от упругости ременных передач, связывающих диски, и от кинематического граничного условия. При этом w будет зависеть от максимального момента и жёсткости стержня на изгиб. Чем меньше $M_{\text{max.}}$ и больше $EJ_{\text{сеч.}}$, тем слабее стержень отклоняется от прямолинейной

недеформированной формы. На рис.6 изображено взаимное расположение функций $\frac{w(x)}{l}$ и $\varphi_{\text{вкл.}}(x)$ для случая $\varphi_0 = \varphi_l = 0$.

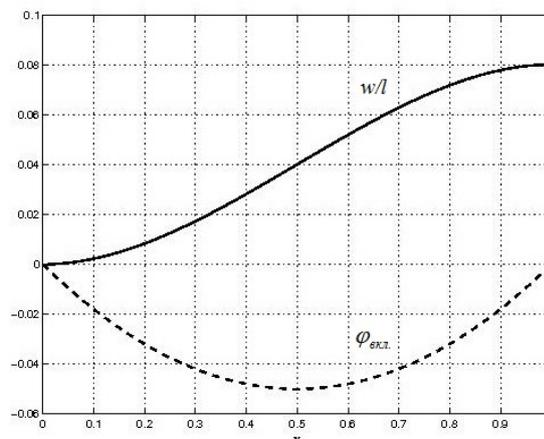


Рис.6. Взаимное расположение функций $\frac{w(x)}{l}$ и $\varphi_{\text{вкл.}}(x)$ для случая $\varphi_0 = \varphi_l = 0$.

Интересно, что в общем рассматриваемом случае решение существует при любых граничных условиях на относительные углы поворота крайних включений. То есть, при указанном виде взаимодействий включений и стержня можно решить задачу при любой (в том числе, сколь угодно большой) разности между углами закручивания на правом и левом концах.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучены формы равновесия конструкции, моделирующей одномерный континуум Коссера, при условии, что моментная связь между включениями и несущим стержнем является идеально жёсткопластической (сухое трение). Исследованы общие постановки краевых задач статики при малых деформациях системы, отмечена аналогия с равновесием несвязанной модели, выявлены условия существования решения, установлена его неединственность в общем случае, и показано, что случаи единственности соответствуют чисто предельным состояниям равновесия. В качестве примеров рассмотрены случаи равновесия системы при отсутствии внешних распределённых нагрузок: общий случай второй краевой задачи, случай свободного стержня и случай взаимного закрепления включений и элементов несущего стержня на его концах при «самоуравновешенности» граничных изгибающих и передаточных моментов. Во всех случаях получены конечные выражения для сил и моментов в различных, в том числе предельных состояниях равновесия, формы равновесия системы (прогибы несущего стержня и углы поворота включений) проиллюстрированы графиками.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des corps deformables* // Paris: Hermann. – 1909. – 226 с.

2. Бровко Г.Л., Иванова О.А. *Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера* // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 2008. – №1. – С.22-36.
3. Бровко Г.Л. *Об одной конструкционной модели среды Коссера* // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 2002. – №1. – С.75-91.
4. Бровко Г.Л., Ильюшин А.А. *Об одной плоской модели перфорированных плит* // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. – 1993. – №2. – С.83-91.
5. Ляв А. *Математическая теория упругости*. – М.-Л.: ОНТИ, 1953. – 674 с.
6. Попов Е.П. *Теория и расчет гибких упругих стержней*. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
7. Ильюшин А.А. *Механика сплошной среды*. – М.: МГУ, 1990. – 310 с.
8. Ильюшин А.А., Ленский В.С. *Сопротивление материалов*. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 373 с.

REFERENCES

1. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des corps deformables*. Paris, Hermann, 1909, 226 p.
2. Brovko G.L., Ivanova O.A. *Modelirovanie svoistv i dvizhenii neodnorodnogo odnomernogo kontinuumata slozhnoi mikrostruktury tipa Kossera [The modeling of one-dimensional Cosserat continuum with complex microstructure]*. Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2008, No.1, Pp.22-36.
3. Brovko G.L. *Ob odnoi konstruksionnoi modeli sredy Kossera [About one mechanical model of Cosserat continuum]*. Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2002, No.1, Pp.75-91.
4. Brovko G.L., Il'iushin A.A. *Ob odnoi ploskoi modeli perforirovannykh plit [About one plane model of perforated plates]*. Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta, Vol.1, Matematika, mekhanika, 1993, No.2, Pp.83-91.
5. Love A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Mineola, N.Y., Dover, 1944, 652 p.
6. Popov E.P. *Teoriia i raschet gibkikh uprugikh stержней [Theory and engineering analysis of elasticas]*. Moskva, Nauka, 1986, 296 p.
7. Il'iushin A.A. *Mekhanika sploshnoi sredy [Continuum mechanics]*. Moskva, Moskovskii gosudarstvennyi universitet, 1990, 310 p.
8. Il'iushin A.A., Lenskii V.S. *Soprotivlenie materialov [Strength of materials]*. Moskva, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury, 1959, 373 p.

Поступила в редакцию 27 декабря 2016 года.

Сведения об авторе:

Иванова Ольга Алексеевна – к.ф.-м.н, нач.лаб., АО «Концерн радиостроения «Вега», г. Москва, Россия; e-mail: O.Ivanova.88@bk.ru