

УДК 539.4

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ О МАРТЕНСИТНОЙ НЕУПРУГОСТИ И ПРЯМОМ ФАЗОВОМ ПРЕВРАЩЕНИИ В БАЛКЕ ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ С УЧЕТОМ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ И РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ ЭТИХ СПЛАВОВ¹

Сафронов П.А.

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

В работе решены задачи о чистом и консольном изгибе балок сплошного прямоугольного сечения из сплава с памятью формы (СПФ) при прямом термоупругом фазовом и структурном превращениях. Анализ проведен на основе модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. В работе принимаются положения об активных процессах пропорционального нагружения, а задачи изгиба балки рассматриваются в рамках гипотез Бернулли-Эйлера. Учитывается упругая составляющая полных деформаций, а также асимметрия кривых деформирования для образцов из СПФ при их растяжении и сжатии. Полуобратным методом получено численное решение задач в несвязной постановке. Построены графики зависимости безразмерной координаты нейтральной плоскости и безразмерной кривизны балки от величины безразмерного изгибающего момента. Для задачи о прямом превращении установлено, что зависимость безразмерной кривизны балки от величины параметра фазового состава является линейной, а безразмерные нормальные продольные напряжения в сечении балки являются функцией параметра фазового состава. Показано влияние свойства разносопротивляемости СПФ растяжению и сжатию на зависимость безразмерного прогиба балки от безразмерной продольной координаты для задачи о консольном изгибе.

Для задачи о мартенситной неупругости (МН) установлено, что положение безразмерной координаты нейтральной плоскости для малых значений безразмерного изгибающего момента определяется отношением модулей упругости СПФ, соответствующих растяжению и сжатию. Аналогичная зависимость получена при решении задачи о прямом фазовом превращении (ПП) для малых значений параметра фазового состава.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; разносопротивляемость; упругие деформации; фазовые переходы; структурные переходы; балки; изгиб

TENSION-COMPRESSION ASYMMETRY AND ELASTIC STRAIN INCORPORATING IN SOLUTION THE PROBLEM OF MARTENSITIC NON-ELASTICITY AND DIRECT MARTENSITIC TRANSITION IN BEAMS FROM SHAPE MEMORY ALLOY UNDER BEND

Safronov P.A.

Moscow aviation institute (National Research Center), Moscow, Russia

¹ Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, проект № 17-01-00216

ABSTRACT

In this paper the problems cantilever and pure bending of beam with solid rectangular cross-section from shape memory alloy (SMA) in direct thermoelastic phase end structure transitions are solved. This paper is database on non-linear model of SMA straining in phase and structure transitions. Proposition of active processes proportional loading and hypothesis of Bernoulli-Euler in bending problem are accept. Elastic part of full strain and tension-compression asymmetry of the SMA stress-strain curves is incorporated. By semi-inverse method, numerical solution of the problem in non-coupled formulation is obtain. Diagrams of dimensionless neutral surface coordinate and dimensionless beam curving from dimensionless bending moment are shown. In case of direct transition effect, linear response of martensite volume fraction on dimensionless beam curving and dependence of dimensionless normal axial stress from martensite volume fraction are obtained. Impact tension-compression asymmetry of SMA on dependence of dimensionless beam flexure from dimensionless axial coordinate in case of cantilever bending problem is show.

In case of martensite non-elasticity effect and in the region of small values of dimensionless bending moment, the dimensionless neutral surface coordinate are only depend on ratio of tension and compression elastic modules of SMA. Similar results are obtain in case of direct transition effect and in the region of small values of dimensionless martensite volume fraction.

Keywords: shape memory alloys; tension-compression asymmetry; elastic strain; phase transitions; structure transitions; beams; bend

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время сплавы с памятью формы (СПФ) являются одними из наиболее перспективных материалов, используемых при проектировании широкого класса конструкций, представляющих собой всевозможные актуаторы, мартенситные двигатели, силовозбудители и проч. Повышенный интерес к изучению механического поведения, а также применению данных материалов обусловлен их уникальными термомеханическими свойствами. Благодаря таким явлениям как мартенситная неупругость, прямое превращение и сверхупругость, элемент конструкции, выполненный из СПФ способен накапливать значительные неупругие деформации при механическом или термическом воздействии, а также «вспоминать» первоначальную форму или инициировать значительные реактивные усилия в заневоленном состоянии при нагреве или разгрузке.

Однако, ограниченное применение этих сплавов на практике обусловлено отсутствием решений соответствующих краевых задач. Помимо выбора модели деформирования СПФ, способной корректно описывать механическое поведение этого материала, а также явления, проистекающие в нем, необходимо учитывать и такие свойства данных сплавов, которые могут оказывать значительное влияние на поведение материала в конкретной задаче. Так, при проектировании активного элемента конструкции из СПФ, работающего преимущественно на изгиб, необходимо учитывать свойство разносопротивляемости. Суть данного явления заключается в существенном несовпадении кривых деформирования при растяжении и сжатии образца из СПФ во всем диапазоне нагружения [1,2]. Причем, данное свойство установлено для образцов из СПФ как для режимов мартенситной неупругости [3] и сверхупругости [4,5], так и для процесса прямого термоупругого превращения [6,7]. Таким образом, свойство разносопротивляемости необходимо учитывать для элементов конструкции из СПФ, работающих на изгиб, поскольку часть поперечного сечения этого

элемента будет испытывать напряжения растяжения, в то время как другая часть – напряжения сжатия.

Узкий круг работ посвящен решению краевых задач об изгибе балочных элементов конструкции с учетом свойства разнсопротивляемости этих сплавов. Среди них присутствует решение задач об изгибе балки из СПФ в режиме сверхупругости [8] на основе модели [9,10], а также в режимах мартенситной неупругости и прямого термоупругого превращения [11] на основе модели [12-15], однако без учета упругой составляющей полных деформаций. Решению аналогичных краевых задач без учета свойства асимметрии кривых деформирования СПФ посвящены работы [16,17] выполненные на основе модели линейного деформирования этих сплавов, а также работы [14,18-21], на основе модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [12-15].

Данная работа посвящена решению задач о чистом и консольном изгибе балок из СПФ для явлений мартенситной неупругости и прямого фазового превращения. В рамках модели [12-15], в несвязной постановке получено решение рассматриваемых задач с учетом свойства разнсопротивляемости и с учетом упругой составляющей полных деформаций.

1. МОДЕЛЬ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СПФ

Рассуждения в данной работе построены на основе модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, предложенной в [12-15]. Данная модель позволяет качественно и количественно верно описывать механическое поведение этих сплавов. Девиатор фазово-структурных деформаций в рамках данной модели записывается согласно (1.1)

$$d\varepsilon'_{ij} = \left(\frac{3}{2} \rho_1(\mu_\sigma) \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} (1 - qf(q)) \varphi_1(\sigma_i) + f(q) \varepsilon'_{ij} \right) dq + \frac{3}{2} \rho_2(\mu_\sigma) \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} q \varphi_2(\sigma_i) d\sigma_i \quad (1.1)$$

Здесь σ_i, σ'_{ij} – интенсивность и девиатор тензора напряжений, q – параметр состояния материала, численно равный объемной доле мартенситной фазы в аустенитно-мартенситном состоянии, $\rho_1(\mu_\sigma), \rho_2(\mu_\sigma)$ – функция параметра вида напряженного состояния для фазового и структурного переходов соответственно, $f(q)$ – материальная функция, которая удовлетворяет неравенству $0 \leq f(q) \leq 1/q$, $\varphi_1(\sigma_i) \neq \varphi_2(\sigma_i)$ – представляют собой интегральные функции распределения интенсивностей микронапряжений в представительском объеме СПФ. При этом $\varphi_1(\sigma_i)$ соответствует фазовой, а $\varphi_2(\sigma_i)$ – структурной составляющей девиатора неупругих деформаций.

В рамках используемой модели доказаны положения об активных процессах пропорционального нагружения [22]. Таким образом, если происходит пропорциональное изменение компонент девиатора напряжений, отсутствует разгрузка, процесс начинается из полностью аустенитного состояния или из состояния полностью сдвойникового мартенсита и выполняются соотношения

$$\begin{cases} \varphi_1(\sigma_i) = \varphi_2(\sigma_i) = \varphi(\sigma_i) \\ \rho_1(\mu_\sigma) = \rho_2(\mu_\sigma) = \rho(\mu_\sigma) \end{cases} \quad (1.2)$$

то уравнение для поиска тензора фазово-структурных деформаций (1.1) может быть проинтегрировано, и при нулевых начальных условиях имеет единственное решение

$$\varepsilon'_{ij} = \rho_D \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} q \varphi(\sigma_i) \quad (1.3)$$

Далее будет показано, что в поперечном сечении балки из силовых факторов присутствуют только продольные нормальные напряжения, таким образом условие пропорционального изменения компонент девиатора напряжений выполняется априори. Соотношения (1.2) являются более критичными, и не выполняются для большинства СПФ. Однако, для рассматриваемых в данной работе задач выполнение этого условия не требуется. Это связано с тем, что при решении задачи о мартенситной неупругости, параметр фазового состава принимается постоянным $q=1$, таким образом отсутствует приращение фазовых деформаций, а в качестве функции $\varphi(\sigma_i)$ следует использовать $\varphi_2(\sigma_i)$, и $\rho(\mu_\sigma) = \rho_2(\mu_\sigma)$. Для численного моделирования процесса прямого термоупругого превращения под действием постоянного напряжения наоборот, отсутствует приращение структурных деформаций, откуда $\varphi(\sigma_i) = \varphi_1(\sigma_i)$ и $\rho(\mu_\sigma) = \rho_1(\mu_\sigma)$.

Представим решение уравнения (1.1) в виде зависимости интенсивности неупругих деформаций от интенсивности действующих напряжений. Для этого выражение (1.3) умножим само на себя и сворачиваем по двум индексам

$$\varepsilon_i^{phst} = \delta_0 \varphi(\sigma_i) q \quad (1.4)$$

В выражении (1.4) $\varepsilon_i = \sqrt{2\varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{ij}/3}$ – интенсивность фазово-структурных деформаций. При моделировании явления мартенситной неупругости в качестве функции $\varphi(\sigma_i) = \varphi_2(\sigma_i) = \Phi_2(\sigma_i / \sigma_0)$ следует принимать распределение Вейбулла, $\Phi_2(x) = 1 - \exp(-x^\alpha)$, $\alpha > 1$, а для прямого термоупругого превращения хорошо подходит распределение Лапласа, таким образом $\varphi(\sigma_i) = \Phi_1(x) = \text{erf}(x / (\sigma_0 \sqrt{2}))$. Параметр σ_0 представляет собой среднеквадратичное уклонение интенсивности микронапряжений. Величины $\delta_0, \sigma_0, \alpha$ – являются параметрами материала, которые подбираются из соответствующих экспериментов, причем для случаев растяжения и сжатия образцов из СПФ, наборы данных параметров будут разными.

2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЧИСТОМ ИЗГИБЕ БАЛКИ ИЗ СПФ

В работе рассматривается изгиб балок сплошного прямоугольного сечения шириной b и высотой h . Распределение параметра фазового состава q полагается постоянным по сечению. Данное предположение правомерно в рамках рассматриваемой несвязной постановки задачи, когда действующие в поперечном сечении балки напряжения не влияют на параметр фазового состава, а рассматриваемый процесс является медленным. Таким образом, при решении задачи о прямом термоупругом превращении температура остается постоянной по сечению за счет явления теплопроводности. Решение задачи о мартенситной неупругости не требует дополнительных предположений, поскольку $q=1$ всегда.

Задача о изгибе балки решается в рамках гипотез Бернулли-Эйлера. Таким образом, единственным ненулевым силовым фактором в поперечном сечении балки является продольное нормальное напряжение. В свою очередь поперечные нормальные напряжения, а так же касательные напряжения принимаются малыми и в определяющих соотношениях не учитываются. Деформации поперечного сдвига так же считаются малыми. Поскольку рассматриваемая задача сходится к одномерной в отношении напряжений и деформаций в сечении балки, то $\varepsilon_i^{phst} = |\varepsilon^{phst}|$, $\sigma_i = |\sigma|$.

Согласно гипотезе плоских сечений, полная продольная деформация волокна в поперечном сечении балки на расстоянии z от нейтральной плоскости определяется согласно

$$\varepsilon = kz, \quad (2.1)$$

здесь k – кривизна нейтральной плоскости балки, соответственно z – поперечная координата.

Полная продольная деформация так же может быть представлена в виде

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{phst} \quad (2.2)$$

здесь ε^e – упругая составляющая, ε^{phst} – фазово-структурная составляющая полных деформаций. Для упругих деформаций справедливо выражение

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E(q)} \quad (2.3)$$

здесь предполагается осреднение по Рейсу для модуля упругости первого рода $\frac{1}{E(q)} = \frac{q}{E_M} + \frac{1-q}{E_A}$, E_M и E_A – мартенситный и аустенитный модули соответственно.

Распространим соотношения для полных продольных деформаций на случай разносопротивляющегося растяжению и сжатию материала. Таким образом, с учетом формул (1.4) и (2.3), выражение (2.2) примет вид

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \frac{\sigma_t}{E_t(q)} + \delta_t q \Phi_t(\sigma_t / \sigma_{0t}), \sigma > 0 \\ \varepsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c(q)} + \delta_c q \Phi_c(\sigma_c / \sigma_{0c}), \sigma < 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

здесь и далее величины, обозначенные нижним индексом "t" соответствуют растяжению, а индексом "c" – соответствующие сжатию. Для модуля упругости первого рода принимаются зависимости $\frac{1}{E_t(q)} = \frac{q}{E_{Mt}} + \frac{1-q}{E_{At}}$ и $\frac{1}{E_c(q)} = \frac{q}{E_{Mc}} + \frac{1-q}{E_{Ac}}$ для случаев растяжения и сжатия соответственно. Функции Φ_t и Φ_c доопределяются нечетным образом для отрицательных значений аргумента: $\Phi_t(-x) = -\Phi_t(x)$ и $\Phi_c(-x) = -\Phi_c(x)$.

Изгибающий момент в рассматриваемом поперечном сечении балки можно определить путем интегрирования нормальных продольных растягивающих и сжимающих напряжений по соответствующим областям

$$M = \int \sigma_c(z) z dF_c + \int \sigma_t(z) z dF_t \quad (2.5)$$

В отличие от классической постановки задачи об изгибе балки, распределение нормальных напряжений по высоте сечения заранее неизвестно, равно как и

положение нейтральной плоскости. Выразить нормальные напряжения из соотношений (2.4) и (2.1) в явном виде не представляется возможным. Обозначим отклонение нейтральной плоскости от оси симметрии балки через A таким образом, что положительные значения отклонения нейтральной плоскости ($A > 0$) будут соответствовать смещению этой нейтральной плоскости к зоне сечения, испытывающей напряжения сжатия (рис.1).

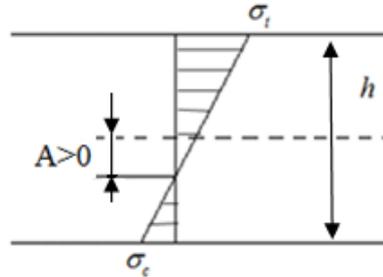


Рис.1.

Таким образом, зоны интегрирования для выражения изгибающего момента могут записаны в явном виде, а выражение (2.5) примет вид

$$M = \int_0^{0.5h-A} b\sigma_c(z)zdz + \int_0^{0.5h+A} b\sigma_t(z)zdz \quad (2.6)$$

С учетом принятых обозначений, уравнение равновесия отсеченной части балки в проекции на продольную ось соответствует (2.7)

$$\int_0^{0.5h-A} b\sigma_c(z)dz = \int_0^{0.5h+A} b\sigma_t(z)dz \quad (2.7)$$

Объединяя выражения (2.1), (2.4) и (2.6)-(2.7) запишем блок уравнений (2.8), определяющий процессы прямого термоупругого превращения при действии постоянного изгибающего момента, а так же явление мартенситной неупругости при нагружении балки внешним возрастающим изгибающим моментом.

$$\begin{cases} \varepsilon_t = y\xi_t, & \varepsilon_c = y\xi_c \\ \varepsilon_t = \frac{s_t}{e_t(q)} + \delta_t q \Phi_t(s_t), & \varepsilon_c = \frac{s_c}{e_c(q)} + \delta_c q \Phi_c(s_c) \\ \mu = \int_0^{0.5+a} s_t(\xi_t)\xi_t d\xi_t + s_{ct} \int_0^{0.5-a} s_c(\xi_c)\xi_c d\xi_c \\ \int_0^{0.5+a} s_t(\xi_t) d\xi_t = s_{ct} \int_0^{0.5-a} s_c(\xi_c) d\xi_c \end{cases} \quad (2.8)$$

Для блока уравнений (2.8) приняты следующие безразмерные величины: $\xi = z/h$ – безразмерная координата по высоте сечения, соответственно $0 \leq \xi_c \leq (0,5 - a)$ и $0 \leq \xi_t \leq (0,5 + a)$. Безразмерное положение нейтральной плоскости – $a = A/h$, безразмерная кривизна нейтральной плоскости балки – $y = kh$, имеющая физический смысл полной деформации волокна балки на расстоянии h от нейтральной плоскости. Безразмерные нормальные продольные напряжения – $s_t = \sigma_t/\sigma_{0t}$ и $s_c = \sigma_c/\sigma_{0c}$, безразмерное значение модуля упругости первого рода – $e_t(q) = E_t(q)/\sigma_{0t}$ и $e_c(q) = E_c(q)/\sigma_{0c}$,

безразмерный изгибающий момент $\mu = M/bh^2\sigma_{0t}$ и безразмерный коэффициент $s_{ct} = \sigma_{0c}/\sigma_{0t}$.

Решение задач об изгибе балки в рамках рассматриваемой постановки для режимов как мартенситной неупругости, так и явления прямого превращения требует совместного решения сразу всех уравнений блока (2.8), поскольку закон распределения нормальных напряжений по сечению балки заранее неизвестен, равно как и положение нейтральной плоскости. Важно заметить, зависимость кривизны от параметра фазового состава так же заранее неизвестна, в то время как при решении аналогичной задачи об изгибе балки без учета упругой составляющей полных деформаций [11] эта зависимость имела явный линейный характер.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О МАРТЕНСИТНОЙ НЕУПРУГОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МОНОТОННО ВОЗРАСТАЮЩЕГО ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

Задача о чистом изгибе балки из СПФ в режиме мартенситной неупругости предполагает постоянное значение параметра фазового состава $q=1$. Таким образом упругий модуль первого рода определяется зависимостью $e_t = E_{Mt}/\sigma_{0t}$ и $e_c = E_{Mc}/\sigma_{0c}$, не зависит от q . В качестве интегральной функции распределения интенсивностей микронапряжений выступает распределение Вейбулла $\Phi_t(s_t) = 1 - \exp(-s_t^{\alpha_t})$, $\alpha_t > 1$, и $\Phi_c(s_c) = 1 - \exp(-s_c^{\alpha_c})$, $\alpha_c > 1$.

Решение блока уравнений (2.8) может быть получено только с использованием численных методов. В данной работе использовался полуобратный метод Сен-Венана. На первом шаге задается массив значений для безразмерной кривизны $y = \{0..y_{\max}\}$. Предельное значение кривизны y_{\max} по ходу решения задачи и соответствует достижению фазово-структурной продольной деформации ее предельному значению $\varepsilon_t^{phst}(0,5+a) = \delta_{0t}$ или $\varepsilon_c^{phst}(0,5-a) = \delta_{0c}$. Дальнейшее решение задачи нецелесообразно ввиду ухудшения механических свойств СПФ. Затем, для каждого заданного значения кривизны y_i выполняется поиск такого значения положения нейтральной плоскости a_i , для которого найденные значения нормальных напряжений согласно первым двум уравнениям блока (2.8) будут удовлетворять последнему уравнению равновесия этого блока. В силу ограниченности значений безразмерной кривизны, значения безразмерного изгибающего момента так же будут ограничены $0 \leq \mu \leq \mu_{\max}$.

Система уравнений (2.8) имеет особенность в области малых значений изгибающего момента и требует дополнительного исследования. Малые значения изгибающего момента диктуют малые величины кривизны нейтральной плоскости балки. Первое уравнение системы (2.8) показывает, что значения продольных деформаций так же будут малы. Выделим уравнение (2) системы (2.8) и разложим его в ряд Тейлора относительно действующих нормальных напряжений с учетом $\Phi(x) = 1 - \exp(-x^\alpha) \approx 1 - (1 - x^\alpha + \dots) \approx x^\alpha$

$$\varepsilon_t \approx \frac{s_t}{e_t} + s_t^{\alpha_t}, \varepsilon_c \approx \frac{s_c}{e_c} + s_c^{\alpha_c} \quad (3.1)$$

Согласно выражению (3.1), а так же условиям $\alpha_t > 1$ и $\alpha_c > 1$ можно утверждать, что полные продольные деформации в балке в области малых значений продольных нормальных напряжений определяются только упругой составляющей

$$\lim_{s_t \rightarrow 0} \varepsilon_t = \lim_{s_t \rightarrow 0} \frac{s_t}{e_t}, \quad \lim_{s_c \rightarrow 0} \varepsilon_c = \lim_{s_c \rightarrow 0} \frac{s_c}{e_c} \quad (3.2)$$

Используя соотношения (3.2) перепишем уравнения равновесия отсеченной части балки (4) блока (2.8)

$$\int_0^{0.5+a} e_t y \xi_t d\xi_t = s_{ct} \int_0^{0.5-a} e_c y \xi_c d\xi_c \quad (3.3)$$

Интегрируя уравнение (3.3) в заданных пределах, а так же решая получающееся квадратное уравнение относительно a , можно установить предельное положение нейтральной плоскости

$$a = \begin{cases} 0, & E_c = E_t \\ \frac{0,5(e+1) - \sqrt{e}}{e-1}, & E_c \neq E_t \end{cases}, \quad (3.4)$$

Здесь принято $e = E_c / E_t$ – безразмерное отношение упругих модулей. Таким образом, соотношения (3.4) однозначно определяют предельное положение нейтральной плоскости при $\mu \rightarrow 0$, которое не зависит ни от параметров материала $\alpha_t, \alpha_c, \delta_t, \delta_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$, ни от численного значения упругих модулей, а только от их отношения $e = E_c / E_t$. Интересно отметить, что в ходе решения аналогичной задачи об изгибе балки без учета упругих деформаций [11] так же установлено предельное положение нейтральной плоскости, которое зависело только от соотношения показателей α_t и α_c , и принадлежало либо верхней, либо нижней границе сечения балки.

Ниже представлены результаты численного моделирования явления мартенситной неупругости в балке из СПФ при чистом изгибе. На рис.2а и 2б приведены зависимости безразмерной кривизны, а также безразмерного положения нейтральной плоскости от величины безразмерного изгибающего момента. Значение параметров материала для каждой кривой приведены в таблице 1.

Кривая 1 на рис.2а и 2б соответствует плющинке из равноатомного никелида титана ($Ni_{50}Ti_{50}$), прошедшего температурную обработку – отжиг при температуре $450^\circ C$ в течении 30 минут. Кривые 2-4 показывают степень влияния каждого из параметров материала $\alpha_t, \alpha_c, \delta_t, \delta_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$ на положение нейтральной плоскости, рис.2б, и на кривизну балки, рис.2а.

Таблица 1.

Номер кривой	Вид нагрузки	δ , доли	σ_0 , МПа	α	$e = E_c / E_t$
Кривая 1	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 2	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0209	216,6	4,88	
Кривая 3	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0132	180,65	4,88	
Кривая 4	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0132	216,6	4,3635	

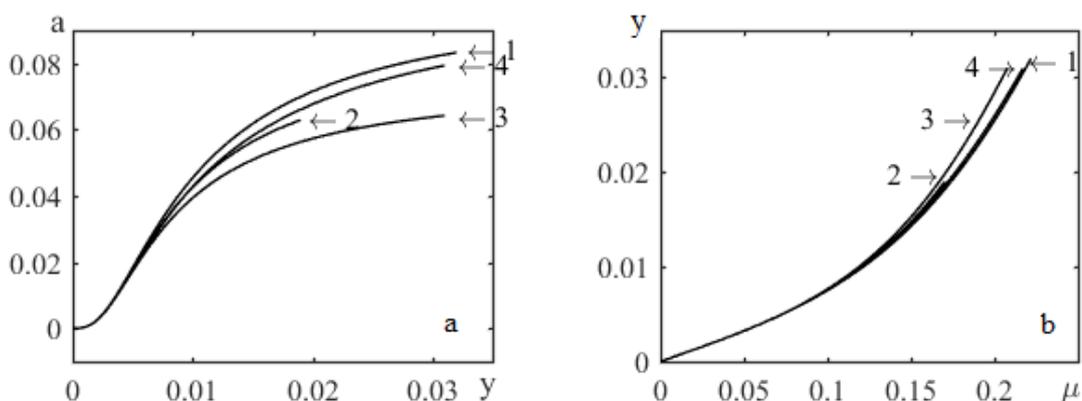


Рис.2.

Ранее было показано, что в рассматриваемой постановке задачи об изгибе балки с учетом свойства разносопротивляемости СПФ и учетом упругой составляющей полных деформаций, положение нейтральной плоскости в области малых значений изгибающего момента не зависит от параметров материала $\alpha_t, \alpha_c, \delta_t, \delta_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$, а при выполнении условия $e = E_c / E_t = 1$, положение нейтральной плоскости и вовсе совпадает с плоскостью симметрии балки, соотношения (3.4). Поведение кривых 1-4 на рис.2b полностью отвечают данному суждению. Зависимость положения нейтральной плоскости от изгибающего момента в сечении балки для различного отношения упругих модулей материала показано на рис.3. Параметры материалов для кривых 1-5 на рис.3 соответствуют значениям из таблицы 2.

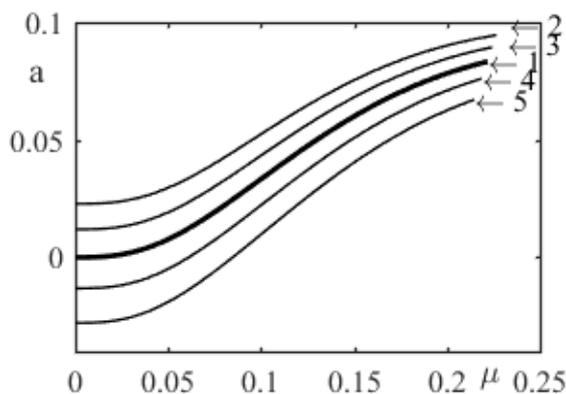


Рис.3.

Таблица 2.

Номер кривой	Вид нагрузки	δ , доли	σ_0 , МПа	α	$e = E_c / E_t$
Кривая 1	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 2	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1,2
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 3	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1,1
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 4	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	0,9
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 5	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	0,8
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	

Из таблицы 2 видно, что параметры материала $\alpha_t, \alpha_c, \delta_t, \delta_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$ для кривых 1-5 на рис.3 одинаковые, поэтому оценивается влияние только отношения упругих модулей материала на положение нейтральной плоскости. Таким образом, поведение кривых 1-5 снова подтверждает суждение о том, что положение нейтральной плоскости в области малых значений изгибающего момента определяется только отношением упругих модулей. Отметим, что увеличение упругого модуля, соответствующего растяжению материала в сравнении с модулем, соответствующим сжатию ($E_t > E_c$), положение нейтральной плоскости ожидаемо смещается в зону сечения балки, испытывающую напряжения растяжения.

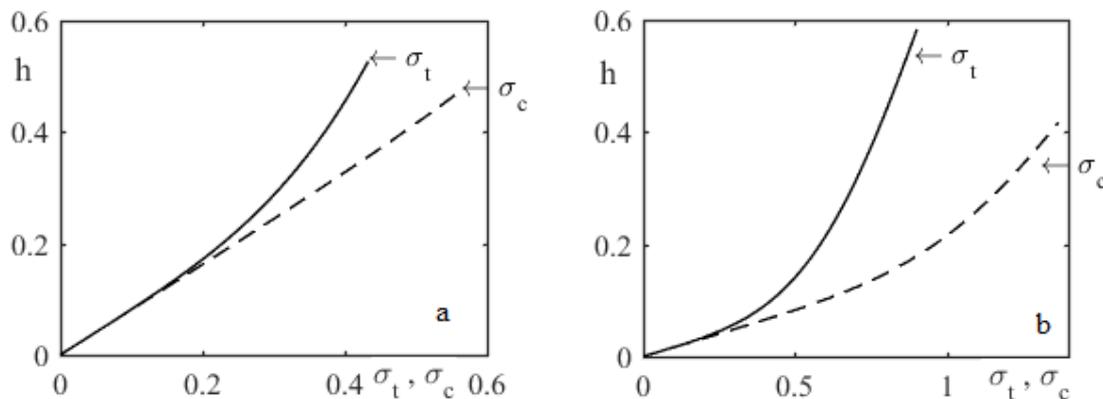


Рис.4.

На рис.4 показано распределение безразмерных нормальных продольных напряжений по безразмерной высоте сечения балки. Параметры материала соответствуют разносопротивляющемуся равноатомному никелиду титана, материал 1 из табл.1. При этом, рис.4а соответствует распределению напряжений в сечении балки при безразмерной величине изгибающего момента $\mu = 0,2\mu_{\max}$, а рис.4б соответствует $\mu = \mu_{\max}$. Таким образом, можно заключить, что распределение нормальных напряжений в сечении балки отличается от линейного распределения, соответствующего классической постановке задачи об изгибе балки даже для малых значений изгибающего момента. При этом отличие между кривыми, соответствующими напряжениям растяжения и сжатия увеличивается с ростом изгибающего момента.

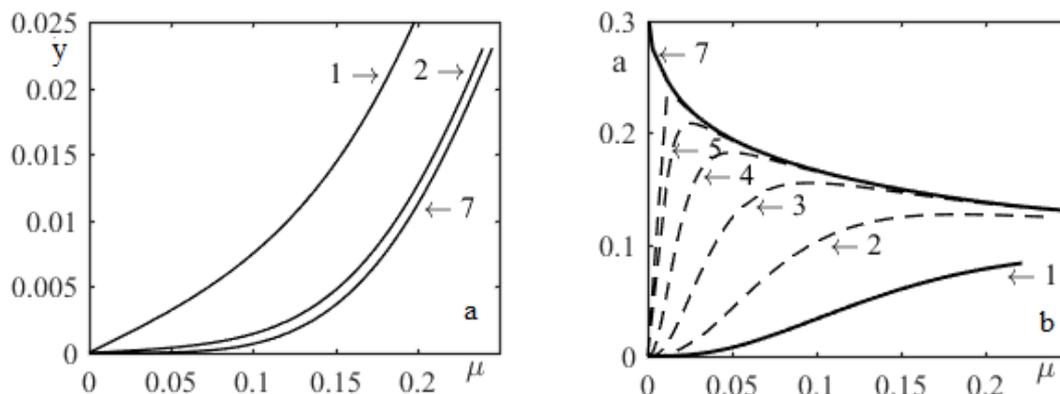


Рис.5.

На рис.5а и 5б показаны зависимости безразмерной кривизны и безразмерного положения нейтральной плоскости от безразмерного изгибающего момента. Параметры материала для кривых 1-7 соответствуют величинам из табл. 3. Таким образом, кривые 2-6 показывают стремление решения задачи об изгибе балки с учетом упругих деформаций, кривая 1, к решению аналогичной задачи, но без учета упругих деформаций, кривая 7, при редуцировании упругой составляющей полных продольных деформаций. Можно утверждать, что учет упругой составляющей полных деформаций выполнен верно относительно известного решения [11].

Таблица 3.

Номер кривой	Нагрузка	δ , доли	σ_0 , МПа	α	$E_c = E_t$, МПа
Кривая 1	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	28000
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 2	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	$28000 \cdot 10^1$
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 3	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	$28000 \cdot 10^2$
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 4	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	$28000 \cdot 10^3$
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 5	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	$28000 \cdot 10^4$
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 6	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	$28000 \cdot 10^5$
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 7	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	-
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	

Для решения задач о консольном изгибе балки из СПФ, блок уравнений (2.8) необходимо дополнить соотношениями (3.5)

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = \int_0^1 \int_0^1 y(v) dv dv \\ \mu = p(1-v), \quad p \neq 0, g = 0 \\ \mu = g(1-v)^2, \quad p = 0, g \neq 0 \end{array} \right. \quad (3.5)$$

здесь приняты следующие безразмерные величины: $\nu = x/L$ – безразмерная координата по длине балки, $p = PL/h^2b\sigma_{0t}$ – безразмерная сосредоточенная сила, приложенная к свободному концу балки, $g = GL^2/2h^2b\sigma_{0t}$ – безразмерная интенсивность распределенной нагрузки по всей длине балки.

На рис.6а и 6б приведены зависимости безразмерного прогиба балки по ее длине для задач консольного изгиба под действием безразмерной сосредоточенной силы $p = 0,175$ и безразмерной распределенной нагрузки интенсивностью $g = 0,175$ соответственно.

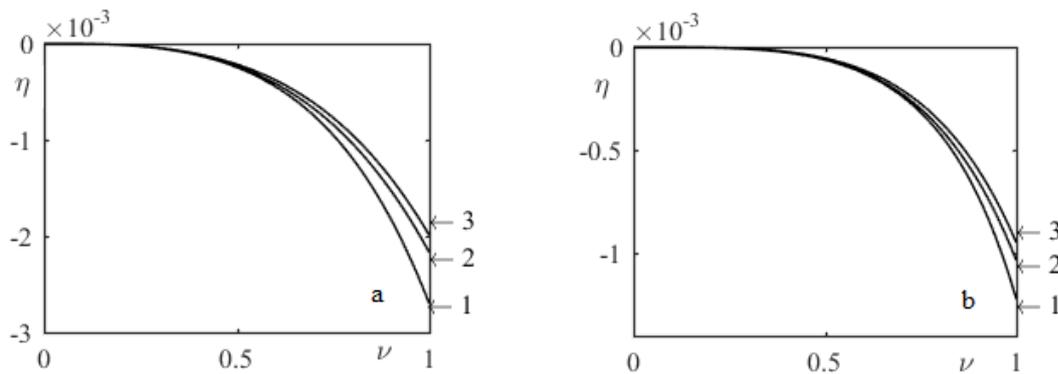


Рис.6.

Кривые, обозначенные цифрой 1 на рис.6а и 6б, получены для случая одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию материала балок. Кривые, отмеченные цифрой 2 соответствуют решению с учетом разносопротивляемости и с учетом упругих деформаций, однако без учета разномодульности ($e = E_c / E_t = 1$). Наконец кривые 3, демонстрирующие наименьшую податливость балок и соответствуют случаю, когда учитывается и разносопротивляемость и разномодульность ($e = E_c / E_t = 1,2$) материала. Отличие в максимальных прогибах свободного конца балки для кривых 1 и 2 составляет порядка 23,5%, для кривых 1 и 3 – порядка 36,5%. Столь существенные различия в максимальных прогибах демонстрируют необходимость учитывать и свойство разносопротивляемости и свойство разномодульности при решении краевых задач изгиба для элементов из СПФ.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРЯМОМ ТЕРМОУПРУГОМ ПРЕВРАЩЕНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОГО ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

В ходе решения аналогичной задачи об изгибе балки, однако без учета упругой составляющей полных деформаций [11], была установлена явная линейная зависимость кривизны балки y от параметра фазового состава q . При этом получалось, что при постоянном изгибающем моменте в сечении балки, положение нейтральной плоскости a и распределение нормальных продольных напряжений $s_c(\xi_c), s_t(\xi_t)$ не зависели от q . В рамках рассматриваемой постановки задачи, явную зависимость y от q установить не удалось. Численное решение блока уравнений (2.8) получено с использованием полуобратного метода

Сен-Венана. Для решения задачи о прямом термоупругом превращении под действием постоянного изгибающего момента, сперва необходимо установить начальное состояние балки. В начальный момент параметр фазового состава имеет значение $q_0 = 0$. В начальный момент параметр фазового состава имеет значение $q_0 = 0$. Таким образом, полная продольная деформация волокон балки определяется только упругой составляющей. Это видно из уравнения (2) блока (2.8)

$$\varepsilon_t = \frac{s_t}{e_t(q_0)}, \quad \varepsilon_c = \frac{s_c}{e_c(q_0)} \quad (4.1)$$

Здесь $e_t(q_0) = E_{At}/\sigma_{0t}$ и $e_c(q_0) = E_{Ac}/\sigma_{0c}$. Выражая нормальные продольные безразмерные напряжения из (4.1) и подставляя их в первое уравнение блока (2.8), получим

$$s_t(\xi_t) = e_t(q_0)y\xi_t, \quad s_c(\xi_c) = e_c(q_0)y\xi_c \quad (4.2)$$

Подстановка соотношений (4.2) в последнее уравнение блока (2.8), а так же интегрирование получившегося выражения позволяет установить положение нейтральной плоскости при $q_0 = 0$, соотношения (3.4). Таким образом, как и при решении задачи о мартенситной неупругости, положение нейтральной плоскости не зависит от параметров материала $\delta_t, \delta_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$ при $q_0 = 0$ и определяется отношением упругих модулей, соответствующих аустенитному состоянию. Подстановка выражений (4.1) в третье уравнение блока (2.8) позволяет установить значение изгибающего момента

$$\mu = \frac{\varepsilon_0}{3(0,5+|a|)} \left(e_t(0,5+a)^3 + s_{ct}e_c(0,5-a)^3 \right) \quad (4.3)$$

Здесь ε_0 – наибольшая из начальных деформаций крайних волокон, принадлежащих верхней или нижней кромке сечения балки. Дело в том, что задачи о прямом превращении принято решать для таких значений внешних силовых факторов (в данном случае изгибающих моментов), которые иницируют некоторые установленные значения начальных деформаций ε_0 . В данной работе рассматриваются следующие значения начальных деформаций крайних волокон балки: $\varepsilon_0 = 0,1\%$, $0,2\%$, $0,5\%$ и 1% .

Уравнения (3.4), (4.1-4.3) полностью определяют первоначальное состояние балки при $q_0 = 0$. Для дальнейшего решения задачи необходимо задать некоторый массив значений параметра фазового состава $q = \{0..1\}$. Затем безразмерная кривизна и безразмерное положение нейтральной плоскости варьируются таким образом, что бы подобранная пара значений y_i и a_i удовлетворяла последним двум уравнениям блока (2.8) одновременно. Ниже представлены результаты численного моделирования задачи изгиба балки для явления прямого превращения.

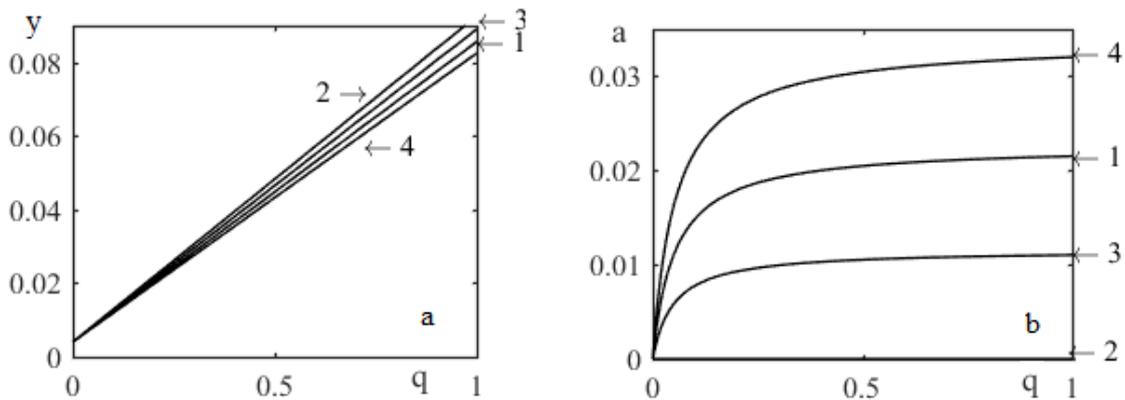


Рис.7.

На рис.7а и 7б показаны зависимости безразмерной кривизны y и безразмерного положения нейтральной плоскости a от параметра фазового состава q соответственно, для различных значений параметров материала $\delta_t, \delta_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$. Численные значения данных параметров для кривых 1-4 приведены в табл.4 и обозначены соответствующими номерами. Таким образом, кривая 2 соответствует решению без учета свойства разнсопротивляемости, поэтому кривая 2 на рис.7б совпадает с плоскостью симметрии балки и отвечает классической постановке задачи изгиба. Кривые 1,3 показывают влияние каждого из параметров материала в отдельности. Кривая, обозначенная номером 4, соответствует решению, когда оба параметра варьируются одновременно.

Таблица 4.

Номер кривой	Вид нагрузки	δ , доли	σ_0 , МПа	$e = E_c / E_t$	ε_0
Кривая 1	Растяжение	0,056	169	1	0,2%
	Сжатие	0,0465	169		
Кривая 2	Растяжение	0,056	169	1	0,2%
	Сжатие	0,056	169		
Кривая 3	Растяжение	0,056	169	1	0,2%
	Сжатие	0,056	189		
Кривая 4	Растяжение	0,056	169	1	0,2%
	Сжатие	0,0465	189		

В таблице 4 параметры материала, соответствующие растяжению, получены для плющинки из равноатомного никелида титана. Установлены следующие значения этих параметров $\sigma_{0t} = 169 \text{ МПа}$ и $\delta_t = 0.056$. Коэффициент, на который была уменьшена величина δ_t по отношению к δ_c , отвечает данным эксперимента, представленным в работе [23]. Испытания образцов из сплава на основе CuAlZnMn показали, что различие в максимальных прогибах прямого термоупругого мартенситного превращения под действием постоянных растягивающих и сжимающих напряжений в 300МПа составляет порядка 17%.

На рис.8а и 8б показана зависимость распределения безразмерных нормальных напряжений по высоте сечения балки от величины параметра фазового состава. Более жирные кривые соответствуют значению параметра фазового состава $q = 1$, а более тонкие – $q = 0,1$. Рис.8а отвечает постановке задачи с учетом только разнсопротивляемости и соответствует материалу 4

из таблицы 4, рис.8b отвечает постановке с учетом и разносопротивляемости и разномодульности ($e = E_c / E_t = 0,8$). Важно отметить, что с учетом упругой составляющей полных деформаций зависимость $y(q)$ остается линейной, рис.7а, однако положение нейтральной плоскости и распределение нормальных напряжений по сечению балки теперь являются функциями параметра фазового состава, рис.7b, 8а, 8b.

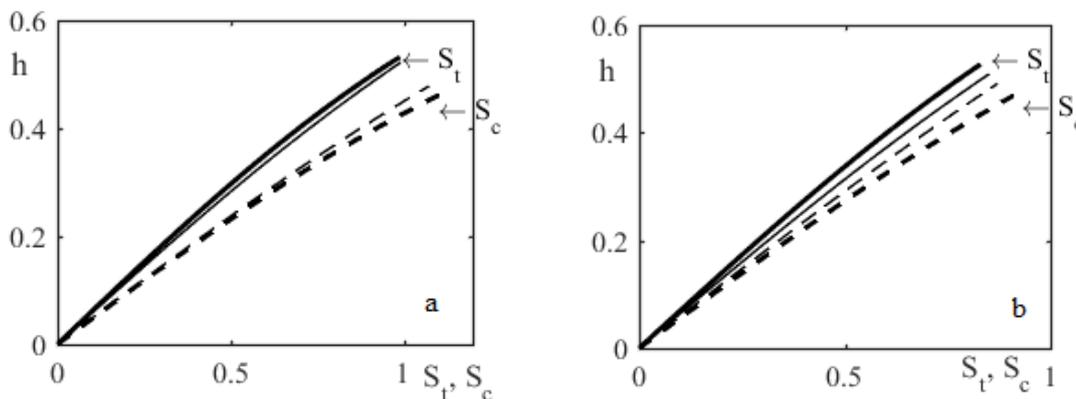


Рис.8.

Ниже приведены результаты исследования влияния параметра $e = E_c / E_t$ на распределение безразмерных нормальных напряжений по высоте сечения, рис.9а, и на зависимость положения нейтральной плоскости от параметра фазового состава, рис.9б.

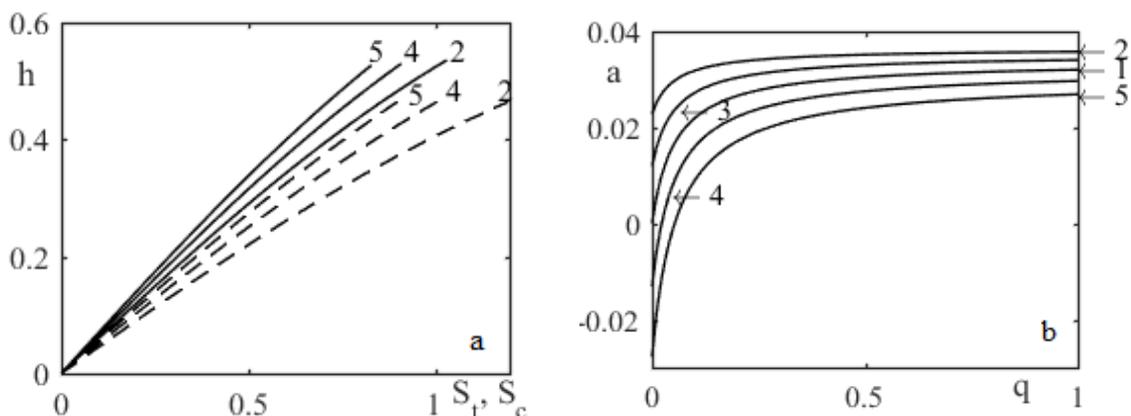


Рис.9.

Поведение кривых на рис.7b и 9b отвечают полученным ранее соотношениям (3.4), а именно: положение нейтральной плоскости при $q_0 = 0$ определяется только отношением упругих модулей, в то время как при средних и больших значениях q поведение $a(q)$ в большей степени зависит от параметров материала $\delta_t, \delta_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$.

Таблица 5.

Номер кривой	Вид нагрузки	δ , доли	σ_0 , МПа	$e = E_c / E_t$	ε_0
Кривая 1	Растяжение	0,056	169	1	0,2%
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 2	Растяжение	0,056	169	1,2	0,2%
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 3	Растяжение	0,056	169	1,1	0,2%
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 4	Растяжение	0,056	169	0,9	0,2%
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 5	Растяжение	0,056	169	0,8	0,2%
	Сжатие	0,0465	189		

На рис.10а и 10б показаны зависимости $y(q)$ и $a(q)$ для разносопротивляющегося материала 4 из таблицы 4. При этом кривые 1-4 отвечают решению задачи для разных значений начальной деформации крайних волокон $\varepsilon_0 = 0,1\%$, $0,2\%$, $0,5\%$ и 1% соответственно. Иными словами, кривые 1-4 получены для разных значений безразмерного изгибающего момента $\mu = 0,08284$; $0,16568$; $0,4142$ и $0,8284$ соответственно. Отметим, что с ростом безразмерного изгибающего момента при прямом термоупругом превращении ожидаемо растет безразмерная кривизна балки, однако положение нейтральной плоскости стремится к оси симметрии балки. Такое поведение кривых 3-4 объясняется тем, что они построены для достаточно больших значений безразмерного изгибающего момента ($\mu = 0,4142$ и $0,8284$), при которых значения упругих деформаций достигают тех же порядков, что и фазовые деформации. Поскольку данный график соответствует разносопротивляющемуся материалу, без учета свойства разномодульности, то смещение нейтральной плоскости к оси симметрии балки является закономерным.

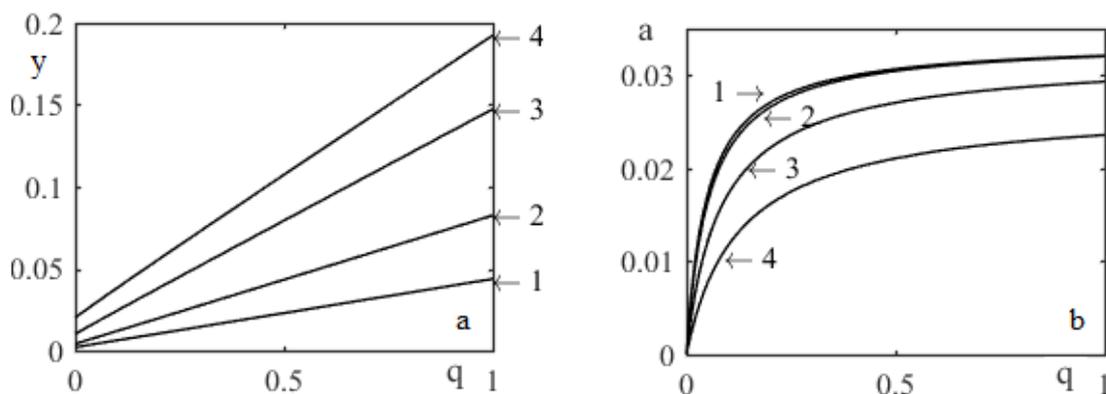


Рис.10.

На рис.11а показаны зависимости безразмерного положения нейтральной плоскости от параметра фазового состава. Кривые 1-5 построены для параметров материала, указанных в таблице 6. Таким образом, поведение кривых 1-5 демонстрируют сходимость решения задачи об изгибе балки с учетом упругих деформаций, кривая 1, к решению аналогичной задачи, но без учета упругих деформаций [11], кривая 5, при редуцировании упругой составляющей полных

продольных деформаций. Таким образом, при редуцировании упругих деформаций снижается степень влияния параметра фазового состава на положение нейтральной плоскости, и, в конечном счете, а перестает быть функцией $a(q)$.

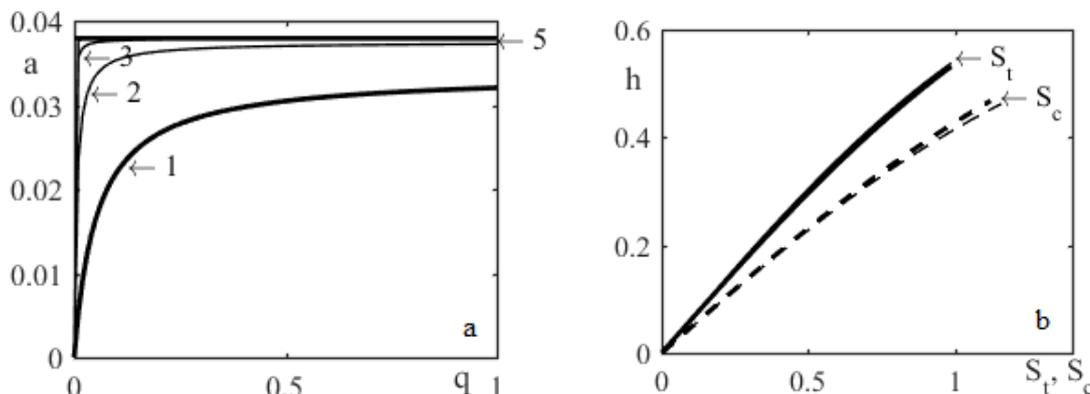


Рис.11.

На рис.11b показано распределение безразмерных продольных нормальных напряжений по высоте сечения балки. Более жирные кривые отвечают материалу 1 из таблицы 6 и соответствуют постановке задачи с учетом упругой составляющей полных деформаций, в то время как более тонкие – материалу 5 и постановке без учета упругих деформаций. Для наглядности, сжимающие напряжения перенесены в верхнюю полуплоскость балки с отрицательным знаком. Отметим слабовыраженную зависимость распределений напряжений в сечении балки от учета упругих деформаций. Это связано с выбором параметра разномодульности $e = E_c / E_t = 1$. Если вернуться к рис.9а, станет очевидно, что при отличии параметра разномодульности материала балки от единицы ($e \neq 1$), влияние учета упругих деформаций на распределение нормальных напряжений вырастет.

Таблица 6.

Номер кривой	Вид нагрузки	δ , доли	σ_0 , МПа	ϵ_0	E , МПа
Кривая 1	Растяжение	0,056	169	0,2%	E
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 2	Растяжение	0,056	169	0,2%	$E \cdot 10^1$
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 3	Растяжение	0,056	169	0,2%	$E \cdot 10^2$
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 4	Растяжение	0,056	169	0,2%	$E \cdot 10^3$
	Сжатие	0,0465	189		
Кривая 5	Растяжение	0,056	169	0,2%	-
	Сжатие	0,0465	189		

ВЫВОДЫ

Получено решение задач об изгибе балок из СПФ для режимов мартенситной неупругости и прямого фазового превращения с учетом свойства разносопротивляемости для данных сплавов, а также с учетом упругой

составляющей полных продольных деформаций, что в свою очередь позволило учесть свойство разномодульности. В ходе решения данных задач удалось выявить существенное влияние как свойства разнсопротивляемости, так и свойства разномодульности на податливость балки из СПФ. Для обеих задач установлено, что положение нейтральной плоскости определяется отношением упругих модулей материала для малых значений изгибающего момента (МН) или при малых значениях параметра фазового состава (ПП). Для задачи о прямом фазовом превращении установить явный вид зависимости кривизны от параметра фазового состава из системы определяющих соотношений не удалось, однако в ходе численного решения данной системы выявлен линейный характер данной зависимости. Установлено, что распределение продольных нормальных напряжений по высоте сечения балки, а также положение нейтральной плоскости являются функциями параметра фазового состава ($s_c = s_c(q), s_t = s_t(q), a = a(q)$). Таким образом, задачу об изгибе балки из СПФ с учетом разнсопротивляемости и с учетом упругих деформаций для режима прямого фазового превращения необходимо рассматривать в рамках связанной постановки. При редуцировании упругой составляющей полных деформаций установлено, что полученные зависимости сходятся к решению аналогичной задачи, однако без учета упругих деформаций [11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин Е.В. *Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами* // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т.10. – №5. – С.41-52.
2. Lomakin E.V. *Constitutive models of mechanical behavior of media with stress state dependent material properties* // Adv. Structur. Materials. – 2011. – Vol.7. – Pp.339-350.
3. Yong Liu, Z. Xie, J. Van Humbeeck, L. Delaey. *Asymmetry of stress-strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys* // Acta mater. – 1998. – Vol.46. – No.12. – Pp.4325-4338.
4. Huseyin Sehitoglu, Zhang X.Y., Chumlyakov Y.I., Karaman I., Gall K., Maier H.J. *Observations on stress-induced transformations in NiTi alloys* / IUTAM Symposium on mechanics of martensitic phase transformation in solids. – 2002. – Pp.103-109.
5. Thamburaja P., Anand L. *Polycrystalline shape-memory materials: effect of crystallographic texture* // J. Mech. Phys. Solids. – 2001. – Vol.49. – Pp.709-737.
6. Ken Gall, Huseyin Sehitoglu, Rob Anderson, Ibrahim Karaman, Yuriy I. Chumlyakov, Irina V. Kireeva. *On the mechanical behavior of single crystal NiTi shape memory alloys and related polycrystalline phenomenon* // Materials Science and Engineering. – 2001. – Vol.317. – Pp.85-92.
7. Lexcelent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modelling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol.43 – Pp.613-626.
8. Reza Mirzaeifar, Reginald DesRoches, ArashYavari, Ken Gall. *On superelastic bending of shape memory alloy beams* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2013. – Vol.50 – Pp.1664-1680.

9. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *Thermodynamical constitutive model for shape memory materials. Part I. the monolithic shape memory alloy* // Intern. J. of Plasticity. – 1996. – Vol.12(6). – Pp.805-842.
10. Qidwai M.A., Lagoudas D.C. *On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material* // Intern. J. of Plasticity. – 2000. – Vol.16(10). – Pp.1309-1343.
11. Сафронов П.А. *Учет разнсопротивляемости сплавов с памятью формы при решении задач о мартенситной неупругости и прямом превращении в балке, находящейся под действием изгибающего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №1. – С.114-127.
12. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. *Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – №3. – С.118-130.
13. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Изв. РАН. МТТ. – 2011. – №2. – С.44-56.
14. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений* // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – №1. – С.37-53.
15. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – №2. – С.78-95.
16. Мовчан А.А. *Учет переменности упругих модулей и влияния напряжений на фазовый состав в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. МТТ. – 1998. – №1. – С.79-90.
17. Мовчан А.А. *Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы* // ПМТФ. – 1998. – Т.39. – №1. – С.87-97.
18. Саганов Е.Б. *Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №3. – С.454-468.
19. Машихин А.Е. *Задача о контакте цилиндра из сплава с памятью формы с упругой трубой при обратном фазовом превращении* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.624-636.
20. Саганов Е.Б. *Решение задачи об обратном мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.663-674.
21. Мовчан А.А., Тант Зин Аунг, Мовчан И.А. *Решение задач изгиба балок из сплавов с памятью формы в рамках модели нелинейного деформирования этих материалов при фазовых и структурных превращениях* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т.15. – №3. – С.422-436.
22. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.

23. Sittner P., Novak V. *Anisotropy of Cu-based shape memory alloys in tension/compression thermomechanical loads* // Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol. – 1999. – Vol.121. – №1. – Pp.48-55.

REFERENCES

1. Lomakin E.V. *Mechanics of media with stress-state dependent properties*. Physical Mesomechanics, 2007, Vol.10, No.5-6, Pp.255-264.
2. Lomakin E.V. *Constitutive models of mechanical behavior of media with stress state dependent material properties*. Adv. Structur. Materials, 2011, Vol.7, Pp.339-350.
3. Yong Liu, Xie Z., J. Van Humbeeck, Delaey L. *Asymmetry of stress-strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys*. Acta mater., 1998, Vol.46, No.12, Pp.4325-4338.
4. Huseyin Sehitoglu, Zhang X.Y., Chumlyakov Y.I., Karaman I., Gall K., Maier H.J. *Observations on stress-induced transformations in NiTi alloys*. IUTAM Symposium on mechanics of martensitic phase transformation in solids, 2002, Pp.103-109.
5. Thamburaja P., Anand L. *Polycrystalline shape-memory materials: effect of crystallographic texture*. J. Mech. Phys. Solids, 2001, Vol.49, Pp.709-737.
6. Ken Gall, Huseyin Sehitoglu, Rob Anderson, Ibrahim Karaman, Yuriy I. Chumlyakov, Irina V. Kireeva. *On the mechanical behavior of single crystal NiTi shape memory alloys and related polycrystalline phenomenon*. Materials Science and Engineering, 2001, Vol.317, Pp.85-92.
7. Lexcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modelling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions*. Intern. J. of Solids and Structures, 2006, Vol.43, Pp.613-626.
8. Reza Mirzaeifar, Reginald DesRoches, Arash Yavari, Ken Gall. *On superelastic bending of shape memory alloy beams*. Intern. J. of Solids and Structures, 2013, Vol.50, Pp.1664-1680.
9. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *Thermodynamical constitutive model for shape memory materials. Part I. the monolithic shape memory alloy*. Intern. J. of Plasticity, 1996, Vol.12(6), Pp.805-842.
10. Qidwai M.A., Lagoudas D.C. *On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material*. Intern. J. of Plasticity, 2000, Vol.16(10), Pp.1309-1343.
11. Safronov P.A. *Uchet raznosoprotivliaemosti splavov s pamiat'iu formy pri reshenii zadach o martensitnoi neuprugosti i priamom prevrashchenii v balke, nakhodiashcheisia pod deistviem izgibaiushchego momenta [Tension-compression asymmetry incorporating in solution the problem of martensitic non-elasticity and direct martensitic transition in beams from shape memory alloy under bend]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.114-127.
12. Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L.G. *Micromechanical model of nonlinear deformation of shape memory alloys under phase and structure transitions*. Mechanics of Solids, 2010, Vol.45, No.3, Pp.406-416.
13. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. *Taking account of the martensite inelasticity in the reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.

14. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.
15. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.
16. Movchan A.A. *Consideration of the elastic modulus variability and the effect of stresses on the phase composition in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 1998, Vol.33, No.1, Pp.64-72.
17. Movchan A.A. *Coupling effects in bending problems for beams of a shape memory alloys*. J. of Applied Mechanics and Technical Physics, 1998, Vol.39, No.1, Pp.143-151.
18. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o priamom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamiat'iu formy, nakhodiashchemsia pod deistviem postoiannogo krutiashchego momenta [Solution the problem of direct martensitic transition in rods from shape memory alloy under constant torque]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2014, Vol.20, No.3, Pp.454-468.
19. Mashikhin A.E. *Zadacha o kontakte tsilindra iz splava s pamiat'iu formy s uprugoi truboi pri obratnom fazovom prevrashchenii. [Contact problem for shape memory alloy cylinder with elastic tube during reverse phase transformation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2014, Vol.20, No.4, Pp.624-636.
20. Saganov E.B. *Reshenie zadachi ob obratnom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamiat'iu formy, nakhodiashchemsia pod deistviem postoiannogo krutiashchego momenta [Solution the problem of reverse martensitic transition in rod from shape memory alloy under constant torque]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2014, Vol.20, No.4, Pp.663-674.
21. Movchan A.A., Tant Zin Aung, Movchan I.A. *Reshenie zadach izgiba balok iz splavov s pamiat'iu formy v ramkakh modeli nelineinogo deformirovaniia etikh materialov pri fazovykh i strukturnykh prevrashcheniiakh. [Solution of beam bending problems for shape memory alloys in framework of non-linear straining model of this material in phase and structure transformation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2009, Vol.15, No.3, Pp.422-436.
22. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: Experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems*. Physical Mesomechanics, 2012, Vol.15, No.3, Pp.214-223.
23. Sittner P., Novak V. *Anisotropy of Cu-based shape memory alloys in tension/compression thermomechanical loads*. Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol, 1999, Vol.121, No.1, Pp.48-55.

Поступила в редакцию 16 января 2017 года

Сведения об авторе:

Сафронов Павел Андреевич – асп., Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: www-midnight-express@yandex.ru