

УДК 539.4

## ПОСТРОЕНИЕ УТОЧНЕННОЙ МОДЕЛИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ГИБКИХ АРМИРОВАННЫХ ПЛАСТИН ПРИ ДИНАМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

Янковский А.П.

*ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

### АННОТАЦИЯ

В приближении Кармана сформулирована начально-краевая задача изгибного динамического деформирования плоско-армированных пластин при упругопластическом поведении материалов фаз композиции. Механическое поведение компонентов композиции пластин описывается определяющими соотношениями теории пластического течения с изотропным упрочнением. Получены уравнения и соответствующие им начально-краевые условия, позволяющие с разной степенью точности рассчитывать напряженно-деформированное состояние гибких композитных пластин с учетом их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам. В первом приближении из разрешающих уравнений и начально-краевых условий вытекают соотношения традиционной неклассической теории Редди для гибких пластин. Численное интегрирование поставленной задачи осуществляется на основе метода шагов по времени с аппроксимацией производных по времени центральными конечными разностями. В случае нагрузок взрывного типа такая аппроксимация позволяет построить явную численную схему типа «крест». Исследовано динамическое упругопластическое поведение прямоугольных удлиненных и кольцевых армированных пластин при нагружении, вызванном воздушной взрывной волной. Пластины рационально армированы по направлениям главных деформаций и на кромках жестко закреплены. В отверстия кольцевых пластин вставлены абсолютно жесткие шайбы. Продемонстрировано, что при расчетных временах порядка нескольких десятых долей секунды и более расчетный динамический отклик композитных пластин, определенный по теории Редди, значительно отличается от результатов расчетов, выполненных в рамках уточненных теорий. Выявлено, что численная схема типа «крест», построенная на базе уравнений уточненных теорий, обладает существенно большей практической устойчивостью, чем при использовании соотношений теории Редди.

**Ключевые слова:** композитные пластины; армирование; теория Редди; динамический изгиб; уточненные теории изгиба; геометрическая нелинейность; упругопластическое деформирование; схема типа «крест»

## CONSTRUCTION OF REFINED MODEL OF ELASTIC-PLASTIC BEHAVIOR OF FLEXIBLE REINFORCED PLATES UNDER DYNAMIC LOADING

Yankovskii A.P.

*Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch  
of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia*

## ABSTRACT

The initial-boundary value problem of flexural dynamics of flat-reinforced elastic-plastic plates is formulated under von Kàrmàn's assumptions. The structural elements of the composite are assumed to satisfy the plastic yielding theory with isotropic hardening. The obtained equations and the corresponding boundary conditions allow to compute the stress-strain state of flexible composite plates accounting for weak transverse shear resistance with various orders of accuracy. The proposed higher-order plate model gives the known relations of the Reddy theory for flexible plates as a first approximation. The time-step integration using centered difference approximations allows to construct an explicit leap-frog scheme in the case of blast-loaded plate. The elastic-plastic flexural dynamics of oblong rectangular and annular plates reinforced along principal strain directions is investigated under air wave loadings. The plate boundaries are clamped, and the rigid disks are rigidly connected with contours of annular plates' holes. It is shown that the dynamic response computed on the background of the Reddy model differs significantly from the response given by refined plate theories at time moments upward of several tenths of second. Moreover the leap-frog difference schema based on refined plate dynamics equations offers better stability in practical computations as compared to Reddy's plate theory.

**Keywords:** laminated plate; reinforcement; Reddy theory; dynamic bending; refined theory of plate bending; geometrical nonlinearity; elastic-plastic strain state; leap-frog difference schema

## ВВЕДЕНИЕ

Проблема адекватного описания механического поведения пластин при их динамическом нагружении является актуальной в механике деформируемого твердого тела [1,2 и др.], в частности и в механике композитных конструкций [3-6 и др.]. При плоском перекрестном армировании пластин необходимо учитывать их ослабленное сопротивление поперечным сдвигам. Такой учет, как правило, осуществляется либо в рамках теории Рейсснера [3,7-10 и др.], либо теории Редди [11-15 и др.]. В монографии [12] показано, что при изгибе анизотропных линейно-упругих пластин не требуется уточнять решения, полученные на основе теории Редди, т.е. не требуется привлекать более точные теории [3,16 и др.].

В работе [15] на базе гипотез теорий Рейсснера и Редди были построены модели упругопластического деформирования изгибаемых армированных пластин при динамическом нагружении. При этом было показано, что в случае относительной толщины армированной пластины порядка 1/10 результаты расчетов по теории Рейсснера существенно отличаются от данных расчетов по теории Редди, которую там рекомендовано использовать как более точную, учитывающую искривление поперечной нормали к срединной плоскости пластины. Однако открытым остался вопрос о гарантированной точности теории Редди. Действительно, в [17] на примере армированной балки-стенки показано, что при статическом ее нагружении и упругопластическом поведении материалов компонентов композиции (в рамках деформационной теории пластичности) уточнение решения, полученного по второму варианту теории Тимошенко (которому в случае пластин соответствует теория Редди [18]), все-таки требуется.

В связи с этим настоящая работа посвящена построению более точной, чем теория Редди, модели динамического изгибного деформирования гибких пластин, армированных в своей плоскости и изготовленных из упругопластических материалов фаз композиции, механическое поведение которых описывается соотношениями теории течения с изотропным упрочнением. Для численного

интегрирования динамической задачи предполагается использовать метод шагов по времени с привлечением схемы типа «крест».

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается композитная пластина толщиной  $2h$ , состоящая из регулярно чередующихся в поперечном направлении элементарных армированных слоев. С пластиной связана декартова прямоугольная система координат  $x_i$ , причем отсчетная плоскость  $Ox_1x_2$  совмещена со срединной плоскостью пластины ( $|x_3| \leq h$ ). Структура армирования в направлении  $Ox_3$  квазиоднородна (рис.1).

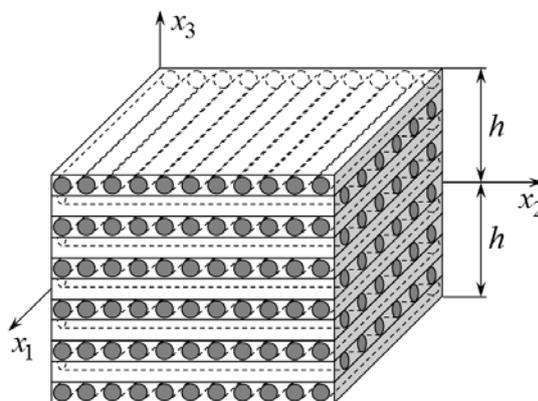


Рис.1. Элемент армированной пластины регулярной по толщине структуры.

Так как армирование осуществляется параллельно срединной плоскости пластины, она обладает ослабленным сопротивлением поперечным сдвигам [8,13-15,17,18 и др.]. Для уточненного описания этого свойства исследуемой тонкостенной конструкции осредненные деформации поперечных сдвигов ее композиции  $\varepsilon_{i3}$  аппроксимируем следующим образом [17]

$$\varepsilon_{i3}(t, \mathbf{r}) = \frac{x_3 + h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \frac{x_3 - h}{2h} \varepsilon_{i3}^{(-)}(t, \mathbf{x}) + \frac{h^2 - x_3^2}{h^2} \sum_{k=0}^K x_3^k \varepsilon_{i3}^{(k)}(t, \mathbf{x}), \quad (1)$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\},$$

$$\mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad i = 1, 2,$$

где  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(k)}$  – функции времени  $t$  и двух пространственных переменных  $x_1$  и  $x_2$ , подлежащие определению, причем  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$  – деформации на верхней и нижней ( $x_3 = \pm h$ ) лицевых поверхностях пластины;  $K$  – целое число, задающее количество слагаемых, удерживаемых в частичной сумме;  $G$  – область, занимаемая пластиной в плане;  $t_0$  – начальный момент времени. При  $K = 0$  получаем в дальнейшем соотношения, соответствующие теории Редди [11-15], который в русскоязычной литературе, как правило, называют вторым вариантом теории Тимошенко [17,18].

Используем традиционную для тонкостенных элементов конструкций кинематическую гипотезу, т.е. пренебрегаем изменчивостью перемещения  $U_3(t, \mathbf{r})$  в поперечном направлении  $x_3$  [1-15,17,18 и др.], тогда

$$U_3(t, \mathbf{r}) = w(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0. \quad (2)$$

На основании дифференциальных соотношений, связывающих деформации с перемещениями, с учетом равенств (1), (2) в приближении Кармана [19,20] получим

$$U_i(t, \mathbf{r}) = u_i(t, \mathbf{x}) - x_3 \partial_i w + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{x_3^2}{k+3} \right) \varepsilon_{i3}^{(k)} + \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) \varepsilon_{i3}^{(+)} - \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) \varepsilon_{i3}^{(-)}, \quad (3)$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2;$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12}(t, \mathbf{r}) &= \frac{1}{2} (\partial_1 u_2 + \partial_2 u_1) - x_3 \partial_1 \partial_2 w + \\ &+ \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{x_3^2}{k+3} \right) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(k)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(k)}) + \\ &+ \frac{x_3}{2h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(+)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(+)}) - \frac{x_3}{2h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) (\partial_1 \varepsilon_{23}^{(-)} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{(-)}) + \\ &+ \frac{1}{2} \partial_1 w \partial_2 w, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ii}(t, \mathbf{r}) &= \partial_i u_i - x_3 \partial_i^2 w + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{x_3^2}{k+3} \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(k)} + \\ &+ \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(+)} - \frac{x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) \partial_i \varepsilon_{i3}^{(-)} + \frac{1}{2} (\partial_i w)^2, \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2,$$

где  $U_i$  – перемещения точек конструкции в тангенциальных направлениях  $Ox_i$ ;  $u_i$  – то же для точек отсчетной плоскости ( $x_3 = 0$ );  $w$  – прогиб;  $\partial_i$  – оператор частного дифференцирования по переменной  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Таким образом, в выражениях (1)-(4) неизвестны функции  $w$ ,  $u_i$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(k)}$  ( $i = 1, 2$ ,  $0 \leq k \leq K$ ), которые зависят от времени  $t$  и двух пространственных переменных  $x_1$  и  $x_2$ .

Как и в работе [15], предполагаем, что материалы фаз композиции являются однородными и изотропными, упругопластическое поведение которых описывается определяющими соотношениями теории течения с изотропным упрочнением (см. равенства (6)-(9) в [15]), а их деформации малы. Используя традиционную для тонкостенных элементов конструкций силовую гипотезу  $\sigma_{33} \approx 0$  [1-15,17-20 и др.] и повторяя рассуждения из [15] (см. там соотношения (10)-(32)), получим следующее линейризованное матричное определяющее уравнение для рассматриваемой армированной пластины

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = B \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (5)$$

где (см. обозначения (18) в [15])

$$\begin{aligned} \dot{\sigma} &= \{\dot{\sigma}_1, \dot{\sigma}_2, \dot{\sigma}_3, \dot{\sigma}_4, \dot{\sigma}_5\}^* = \{\dot{\sigma}_{11}, \dot{\sigma}_{22}, \dot{\sigma}_{12}, \dot{\sigma}_{13}, \dot{\sigma}_{23}\}^*, \\ \dot{\epsilon} &= \{\dot{\epsilon}_1, \dot{\epsilon}_2, \dot{\epsilon}_3, \dot{\epsilon}_4, \dot{\epsilon}_5\}^* = \{\dot{\epsilon}_{11}, \dot{\epsilon}_{22}, \dot{\epsilon}_{12}, \dot{\epsilon}_{13}, \dot{\epsilon}_{23}\}^*; \end{aligned} \tag{6}$$

$\dot{\sigma}$ ,  $\dot{\epsilon}$  – пятикомпонентные векторы-столбцы, элементами которых являются скорости осредненных напряжений и деформаций в композиции  $\dot{\sigma}_{ij}$ ,  $\dot{\epsilon}_{ij}$ ;  $B$  –  $5 \times 5$ -матрица, определяемая соотношением (33) из [15]; точка означает производную по времени  $t$ ; звездочка означает операцию транспонирования. Используя равенство (5) с учетом обозначений (6), можно вычислить скорости всех силовых факторов в гибкой композитной пластине (для разрабатываемой в настоящем исследовании численной схемы это не потребуется).

Осредненные напряжения  $\sigma_{ij}$  удовлетворяют уравнениям движения элемента композитной среды, которые в рассматриваемом приближении (см. (2)) имеют вид [20,21]

$$\rho \ddot{U}_i(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^3 \partial_j (\sigma_{ij} - \sigma_{j3} \partial_i w) + X_i(t, \mathbf{r}), \quad i = 1, 2; \tag{7}$$

$$\rho \ddot{U}_3(t, \mathbf{r}) = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( \sigma_{j3} + \sum_{l=1}^2 \sigma_{jl} \partial_l w \right) + \partial_3 \sigma_{33} + X_3(t, \mathbf{r}), \tag{8}$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad t \geq t_0,$$

где (см. [22])

$$\rho = \rho_0 \omega_0 + \sum_{s=1}^N \rho_s \omega_s, \quad \omega_0 = 1 - \sum_{s=1}^N \omega_s; \tag{9}$$

$\rho_0$ ,  $\rho_s$  – объемная плотность материалов связующей матрицы и армирующих волокон  $s$ -го семейства в репрезентативной ячейке композиции;  $X_i$  – компоненты объемной нагрузки, действующей на композитный материал.

Для получения уравнений динамического равновесия гибкой пластины, записанных через силовые факторы, проинтегрируем соотношение (8) по ее толщине, а равенства (7) проинтегрируем по переменной  $x_3$  с весами  $x_3^l$ , тогда с учетом допущения (2) получим

$$\begin{aligned} \rho \ddot{u}_i^{(l)} &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{ij}^{(l)} - M_{j3}^{(l)} \partial_i w \right) - l M_{i3}^{(l-1)} + l M_{33}^{(l-1)} \partial_i w + \\ &+ h^l \left[ \sigma_{i3}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{i3}^{(-)} \right] - h^l \left[ \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \partial_i w + X_i^{(l)}, \end{aligned} \tag{10}$$

$$i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K + 1;$$

$$2h \rho \ddot{w} = \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{j3}^{(0)} + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^{(0)} \partial_i w \right) + \sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)} + X_3^{(0)}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \tag{11}$$

где

$$\begin{aligned} X_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-h}^h X_i(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad \sigma_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \sigma_{i3}(t, \mathbf{x}, \pm h), \\ M_{ij}^{(l)}(t, \mathbf{x}) &= \int_{-h}^h \sigma_{ij}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad u_m^{(l)}(t, \mathbf{x}) = \int_{-h}^h U_m(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \end{aligned} \tag{12}$$

$$i, j = \overline{1, 3}, \quad m = 1, 2.$$

**З а м е ч а н и е.** На основании третьих равенств (12) получаем, что  $M_{ij}^{(0)} \equiv F_{ij}$  и  $M_{i3}^{(0)} \equiv F_{i3}$  – мембранные и поперечные силы, а  $M_{ij}^{(1)} \equiv M_{ij}$  – механические изгибающие и крутящие моменты в пластине; остальные силовые факторы в (10), (11) – математические моменты высших порядков.

Согласно второму соотношению (12), напряжения  $\sigma_{i3}^{(\pm)}$  предполагаются известными из силовых граничных условий на лицевых поверхностях пластины ( $x_3 = \pm h$ ). В силу того что исследуется динамическое поведение пластины как тонкостенной механической системы и в силу предполагаемой малости ее относительной толщины, нормальное напряжение  $\sigma_{33}(t, \mathbf{r})$  в уравнении (8) вполне допустимо аппроксимировать линейно по поперечной координате  $x_3$  (так как ударно-волновые процессы здесь не рассматриваются [15])

$$\sigma_{33}(t, \mathbf{r}) = \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2h} x_3 + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(t, \mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(t, \mathbf{x})}{2}, \quad |x_3| \leq h. \quad (13)$$

Используя третье равенство (12) (при  $i = j = 3$ ) и соотношение (13), вычислим в уравнениях (10) сомножитель

$$lM_{33}^{(l-1)}(t, \mathbf{x}) = l \int_{-h}^h \sigma_{33}(t, \mathbf{r}) x_3^{l-1} dx_3 = \frac{h^l}{2} \left[ (\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}) (1 - (-1)^l) + \frac{l}{l+1} (\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}) (1 + (-1)^l) \right], \quad (14)$$

$$0 \leq l \leq K+1, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0.$$

К системе уравнений (10), (11) следует присоединить четыре граничных условия на лицевых поверхностях пластины (см. (1), (4)-(6) и (12))

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^2 b_{i+3,j}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \dot{\varepsilon}_{ij}(t, \mathbf{x}, \pm h) + b_{i+3,3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \dot{\varepsilon}_{i2}(t, \mathbf{x}, \pm h) + \\ & + \sum_{j=1}^2 b_{i+3,j+3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \dot{\varepsilon}_{j3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \dot{\sigma}_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $b_{i,j}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) \equiv b_{i,j}(t, \mathbf{x}, \pm h)$ ;  $b_{i,j}(t, \mathbf{r})$  ( $i = 4, 5, j = \overline{1, 5}$ ) – компоненты матрицы  $B$  в соотношении (5). Правые части в равенствах (15) известны.

В частном случае  $K = 0$ ,  $\sigma_{i3}^{(\pm)} = 0$  и  $X_j = 0$  ( $i = 1, 2, j = \overline{1, 3}$ ) уравнения (10), (11) с учетом выражений (12) и (14) при использовании соответствующих переобозначений (см. Замечание) полностью совпадают с уравнениями движения в рамках теории Редди (см. равенства (39), (40) в [15]).

Для однозначного интегрирования исследуемой задачи нужно задать граничные и начальные условия. Если на части торцевой поверхности пластины, которую обозначим  $G_\sigma$ , заданы силовые граничные условия, то в рамках используемого здесь приближения (см. (2)) получим [20]

$$n_1(\sigma_{i1} - \sigma_{i3} \partial_i w) + n_2(\sigma_{i2} - \sigma_{23} \partial_i w) = p_i(t, \mathbf{r}), \quad i = 1, 2; \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^2 n_j \left( \sigma_{j3} + \sum_{l=1}^2 \sigma_{jl} \partial_l w \right) = p_3(t, \mathbf{r}), \quad (17)$$

$$n_1 = \cos \gamma, \quad n_2 = \sin \gamma, \quad \mathbf{r} \in G_\sigma, \quad t \geq t_0.$$

Если же на части торцевой поверхности, которую обозначим  $G_u$ , заданы кинематические граничные условия, то, согласно (2) и (3), имеем

$$w(t, \mathbf{x}) = U_{*3}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u; \tag{18}$$

$$U_j(t, \mathbf{r}) = U_{*j}(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G_u, \quad t \geq t_0, \quad j = 1, 2. \tag{19}$$

Здесь  $p_i$  – заданные на поверхности  $G_\sigma$  внешние распределенные нагрузки, действующие в направлениях  $x_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ );  $\Gamma_u$  – проекция торцевой поверхности  $G_u$  на плоскость  $Ox_1x_2$  (т.е.  $\Gamma_u$  – часть контура  $\Gamma$ , ограничивающего область  $G$ , занимаемую пластиной в плане);  $U_{*3}$  – прогиб, заданный на  $\Gamma_u$ ;  $U_{*j}$  – перемещения в тангенциальных направлениях  $Ox_j$  ( $j = 1, 2$ ), заданные на торцевой поверхности  $G_u$ ;  $\gamma$  – угол, определяющий направление внешней нормали к контуру  $\Gamma$  (т.е. к торцевой поверхности  $G_\sigma \cup G_u$ ) и отсчитываемый от направления  $Ox_1$ .

В момент времени  $t = t_0$  следует задать начальные условия (см. (2), (3))

$$w(t_0, \mathbf{x}) = U_{03}(\mathbf{x}), \quad \dot{w}(t_0, \mathbf{x}) = V_{03}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G; \tag{20}$$

$$U_j(t_0, \mathbf{r}) = U_{0j}(\mathbf{r}), \quad \dot{U}_j(t_0, \mathbf{r}) = V_{0j}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad j = 1, 2, \tag{21}$$

где  $U_{0i}, V_{0i}$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) – известные в начальный момент времени перемещения и скорости точек конструкции.

Чтобы получить силовые граничные условия в силовых факторах (см. (10), (11)), проинтегрируем равенство (17) по толщине пластины, а соотношения (16) проинтегрируем по переменной  $x_3$  с весами  $x_3^l$ , тогда с учетом (12) будем иметь

$$n_1 (M_{i1}^{(l)} - M_{13}^{(l)} \partial_i w) + n_2 (M_{i2}^{(l)} - M_{23}^{(l)} \partial_i w) = P_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) \tag{22}$$

$$(i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K + 1),$$

$$\sum_{j=1}^2 n_j \left( M_{j3}^{(0)} + \sum_{l=1}^2 M_{jl}^{(0)} \partial_l w \right) = P_3^{(0)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad t \geq t_0,$$

где

$$P_j^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h p_j(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \quad \mathbf{r} \in G_\sigma, \quad j = 1, 2, 3; \tag{23}$$

$\Gamma_\sigma$  – проекция части торцевой поверхности  $G_\sigma$  на плоскость  $Ox_1x_2$  ( $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$ );  $P_i^{(l)}, P_3^{(0)}$  – известные на контуре  $\Gamma_\sigma$  силовые факторы, причем  $P_i^{(0)}, P_3^{(0)}$  – известные погонные усилия, действующие в направлениях  $Ox_i, Ox_3$  соответственно, а  $P_i^{(l)}$  ( $i = 1, 2$ ) – известные механические моменты; остальные величины в правых частях равенств (22) – известные математические моменты высших порядков.

Так как выражения (3) представляют собой частичные суммы по степеням переменной  $x_3$ , кинематические граничные условия (19) и начальные условия (21) невозможно удовлетворить в каждой точке  $\mathbf{r}$  пластины (в случае соотношений (21)) и торцевой поверхности  $G_u$  (в случае равенств (19)) при произвольных зависимостях функций  $U_{*i}, U_{0i}$  и  $V_{0i}$  от поперечной координаты  $x_3$ , поэтому, как и силовые граничные условия (см. (16), (17) и (22), (23)),

кинематические граничные (19) и начальные (21) условия будем удовлетворять лишь в интегральном смысле. Для этого проинтегрируем равенства (19), (21) по толщине пластины с весами  $x_3^l$ , тогда с учетом последних соотношений (12) получим

$$u_i^{(l)}(t, \mathbf{x}) = u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u, \quad t \geq t_0, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1; \quad (24)$$

$$u_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \quad \dot{u}_i^{(l)}(t_0, \mathbf{x}) = v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}), \quad (25)$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1,$$

где

$$u_{*i}^{(l)}(t, \mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{*i}(t, \mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad u_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h U_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad (26)$$

$$v_{0i}^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h V_{0i}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad i = 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1;$$

$u_{*i}^{(l)}$ ,  $u_{0i}^{(l)}$ ,  $v_{0i}^{(l)}$  – известные функции.

Таким образом, для однозначного интегрирования исследуемой динамической задачи в каждой точке области  $G$  в момент времени  $t_0$  следует задать начальные условия (20), (25) с учетом обозначений (26), а в каждой точке контура  $\Gamma$  – кинематические граничные условия (18), (24) или силовые граничные условия (22) с учетом (23) и (26). Возможно задание смешанных из (18), (22), (24) граничных условий, например, при шарнирном опирании кромки пластины.

Проинтегрируем соотношения (3) по толщине пластины с весами  $x_3^l$  ( $0 \leq l \leq K+1$ ), тогда с учетом последнего выражения (12) получим матричные равенства

$$C \boldsymbol{\varepsilon}_i = \mathbf{U}_i + \mathbf{W} \partial_i w - \mathbf{E}^{(+)} \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(+)} + \mathbf{E}^{(-)} \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(-)}, \quad i = 1, 2, \quad (27)$$

где

$$\mathbf{U}_i = \{u_i^{(0)}, u_i^{(1)}, u_i^{(2)}, \dots, u_i^{(K+1)}\}^*, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_i = \{u_i, \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(0)}, \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(K)}\}^*; \quad (28)$$

$C = (c_{ij})$  –  $(K+2) \times (K+2)$ -матрица,  $\mathbf{W} = \{w_i\}$  и  $\mathbf{E}^{(\pm)} = \{e_i^{(\pm)}\}$  –  $(K+2)$ -компонентные вектор-столбцы, элементы которых определяются по формулам

$$c_{l+1,1} = \frac{h^{l+1}}{l+1} (1 + (-1)^l), \quad w_{l+1} = \frac{h^{l+2}}{l+2} (1 - (-1)^l),$$

$$c_{l+1,k+2} = 2h^{l+k+2} (1 - (-1)^{l+k}) \left[ \frac{1}{(k+1)(l+k+2)} - \frac{1}{(k+3)(l+k+4)} \right], \quad (29)$$

$$e_{l+1}^{(\pm)} = h^{l+2} \left[ \frac{1 + (-1)^l}{2(l+3)} \pm \frac{1 - (-1)^l}{l+2} \right], \quad 0 \leq l \leq K+1, \quad 0 \leq k \leq K.$$

Согласно выражениям (29), компоненты матрицы  $C$  и вектор-столбцов  $\mathbf{W}$ ,  $\mathbf{E}^{(\pm)}$  достаточно вычислить только один раз. Следовательно, далее вместо (27) целесообразно использовать соотношения

$$\boldsymbol{\varepsilon}_i = C^{-1} \mathbf{U}_i + \bar{\mathbf{W}} \partial_i w - \bar{\mathbf{E}}^{(+)} \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(+)} + \bar{\mathbf{E}}^{(-)} \boldsymbol{\varepsilon}_{i3}^{(-)}, \quad i = 1, 2, \quad (30)$$

где

$$\bar{\mathbf{W}} = C^{-1}\mathbf{W}, \quad \bar{\mathbf{E}}^{(\pm)} = C^{-1}\mathbf{E}^{(\pm)}; \tag{31}$$

$C^{-1}$  – матрица, обратная матрице  $C$ .

Пусть из каких-то соображений в фиксированный момент времени известны функции  $w, u_i^{(l)}, \varepsilon_{i3}^{(\pm)}$  ( $0 \leq l \leq K+1$ ), тогда, используя (30) с учетом (28), (29) и (31), можем вычислить функции  $u_i$  и  $\varepsilon_{i3}^{(k)}$  ( $i=1, 2, 0 \leq k \leq K$ ), которые определяют средние деформации (1), (4) и тангенциальные перемещения (3) в пластине.

Часто при динамических нагрузках, например, взрывного типа [1,4,23], касательные нагрузки на лицевых поверхностях пластины пренебрежимо малы

$$\sigma_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \sigma_{i3}(t, \mathbf{x}, \pm h) \approx 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad i=1, 2. \tag{32}$$

В работе [15] продемонстрировано (см. там равенства (34)-(38)), что при выполнении соотношений (32) имеем

$$\varepsilon_{i3}^{(\pm)}(t, \mathbf{x}) = \varepsilon_{i3}(t, \mathbf{x}, \pm h) \approx 0, \quad \mathbf{x} \in G, \quad t \geq t_0, \quad i=1, 2. \tag{33}$$

Следовательно, при наличии только нормальных поверхностных внешних сил (см. (32)) средние деформации поперечных сдвигов  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$  ( $i=1, 2$ ) в равенствах (1), (3), (4), (27) и (30) тождественно равны нулю. При этом граничные условия (15) выполняются тождественно (см. [15]). (Напомним, что в рамках теории Рейсснера [3,7-10 и др.] силовые граничные условия (15) на лицевых поверхностях пластины удовлетворить вообще нельзя.

## 2. МЕТОД РАСЧЕТА

Для численного интегрирования рассматриваемой задачи динамического изгиба упругопластической армированной пластины используем метод шагов по времени [1,3-5,15 и др.], т.е. будем разыскивать решение в дискретные моменты времени  $t_{n+1} = t_n + \tau$  ( $n=0, 1, 2, \dots$ ), где  $\tau = \text{const} > 0$  – шаг по времени. При этом предполагается, что в моменты времени  $t_m$  уже известны значения следующих функций

$$\begin{aligned} &w^m(\mathbf{x}) \equiv w(t_m, \mathbf{x}), \quad u_i^{(l)m}(\mathbf{x}) \equiv u_i^{(l)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{j3}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) \equiv \sigma_{j3}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \\ &\dot{\sigma}_{i3}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) \equiv \dot{\sigma}_{i3}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad \sigma_{ij}^m(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}(t_m, \mathbf{r}), \quad \sigma_{ij}^{(s)m}(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{ij}^{(s)}(t_m, \mathbf{r}), \\ &X_j^m(\mathbf{r}) \equiv X_j(t_m, \mathbf{r}), \quad \varepsilon_{i3}^{(\pm)m}(\mathbf{x}) \equiv \varepsilon_{i3}^{(\pm)}(t_m, \mathbf{x}), \quad i=1, 2, \quad j=\overline{1, 3}, \\ &m = n-1, n, \quad 0 \leq l \leq K+1, \quad 0 \leq s \leq N, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \end{aligned} \tag{34}$$

где  $\sigma_{ij}^{(s)}$  – напряжения в  $s$ -м компоненте композиции пластины ( $s=0$  – связующий материал,  $s=1, 2, \dots, N$  – волокна  $s$ -го семейства).

На основании третьего выражения (12) с учетом (14) и предположения (34) в момент времени  $t_n$  можно определить все внутренние силовые факторы  $M_{ij}^{(l)}$  в правых частях уравнений движения (10), (11) и в граничных условиях (22).

В дальнейшем все производные по времени аппроксимируем центральными разностями [3,15,24 и др.]. При этом конечно-разностные аналоги уравнений (10), (11) с учетом обозначений, аналогичных (34), приводятся к виду

$$\begin{aligned}
\frac{2h\rho}{\tau^2} \left( w^{n+1} - 2w^n + w^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{j3}^n + \sum_{i=1}^2 M_{ji}^n \partial_i w^n \right) + \sigma_{33}^n - \sigma_{33}^{n-1} + X_3^n, \\
\frac{\rho}{\tau^2} \left( u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1} \right) &= \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( M_{ij}^n - M_{j3}^n \partial_i w^n \right) - l M_{i3}^n + \\
&\quad + l M_{33}^n \partial_i w^n + h^l \left[ \sigma_{i3}^n - (-1)^l \sigma_{i3}^{n-1} \right] - \\
&\quad - h^l \left[ \sigma_{33}^n - (-1)^l \sigma_{33}^{n-1} \right] \partial_i w^n + X_i^{(l)},
\end{aligned} \tag{35}$$

$\mathbf{x} \in G$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq l \leq K+1$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$

Используя соотношения (12) и (34), получаем, что правые части в (35) известны при  $t = t_n$ . Добавляя к уравнениям (35) необходимые граничные условия (см. (18), (22) и (24) с учетом (23), (26)), можно определить по явной численной схеме значения функций  $w$  и  $u_i^{(l)}$  ( $i = 1, 2$ ,  $0 \leq l \leq K+1$ ) в следующий момент времени  $t_{n+1}$ .

Аппроксимируя в силовых граничных условиях (15) производные  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  и  $\dot{\varepsilon}_{i3}^{(\pm)}$  центральными конечными разностями, для момента времени  $t_n$  получим

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^2 b_{i+3,j}^{(\pm)} \varepsilon_{jj} \Big|_{x_3=\pm h}^{n+1} + b_{i+3,3}^{(\pm)} \varepsilon_{12} \Big|_{x_3=\pm h}^n + \sum_{j=1}^2 b_{i+3,j+3}^{(\pm)} \varepsilon_{j3}^{n+1} &= S_{i3}^{(\pm)}(\mathbf{x}), \\
\mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{36}$$

где

$$S_{i3}^{(\pm)} \equiv 2\tau \dot{\sigma}_{i3}^{(\pm)} + \sum_{j=1}^2 b_{i+3,j}^{(\pm)} \varepsilon_{jj} \Big|_{x_3=\pm h}^{n-1} + b_{i+3,3}^{(\pm)} \varepsilon_{12} \Big|_{x_3=\pm h}^{n-1} + \sum_{j=1}^2 b_{i+3,j+3}^{(\pm)} \varepsilon_{j3}^{n-1}, \tag{37}$$

$i = 1, 2$ .

Согласно (37), (4), (30) и (34), правые части в равенствах (36) известны при  $t = t_n$ . Учтем в левых частях уравнений (36) выражения (4) и соотношения (30), тогда после элементарных, но громоздких преобразований получим

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^2 b_{i+3,j}^{(\pm)} \left\{ \left[ 2H_{(-)}^{(\pm)} \pm h \left( 1 \mp \frac{1}{2} \right) \right] \partial_j \varepsilon_{j3}^{n+1} - \left[ 2H_{(+)}^{(\pm)} \mp h \left( 1 \pm \frac{1}{2} \right) \right] \partial_j \varepsilon_{j3}^{n+1} \right\} + \\
&+ b_{i+3,3}^{(\pm)} \left\{ \left[ 2H_{(-)}^{(\pm)} \pm h \left( 1 \mp \frac{1}{2} \right) \right] \left( \partial_1 \varepsilon_{23}^{n+1} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{n+1} \right) - \right. \\
&- \left. \left[ 2H_{(+)}^{(\pm)} \mp h \left( 1 \pm \frac{1}{2} \right) \right] \left( \partial_1 \varepsilon_{23}^{n+1} + \partial_2 \varepsilon_{13}^{n+1} \right) \right\} + \sum_{j=1}^2 b_{i+3,j+3}^{(\pm)} \varepsilon_{j3}^{n+1} = \\
&= S_{i3}^{(\pm)} - \sum_{j=1}^2 b_{i+3,j}^{(\pm)} \left[ \sum_{l=0}^{K+1} (\bar{c}_{1,l+1} + 2\bar{C}_{l+1}^{(\pm)}) \partial_j u_j^{n+1} + (\bar{w}_1 \mp h + 2\bar{w}^{(\pm)}) \partial_j^2 w + \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2} \left( \partial_j w \right)^2 \right] - b_{i+3,3}^{(\pm)} \left[ \frac{1}{2} \sum_{l=0}^{K+1} (\bar{c}_{1,l+1} + 2\bar{C}_{l+1}^{(\pm)}) \left( \partial_1 u_2^{n+1} + \partial_2 u_1^{n+1} \right) + \right.
\end{aligned} \tag{38}$$

$$+ (\bar{w}_1 \mp h + \bar{w}^{(\pm)}) \partial_1 \partial_2^{n+1} w + \frac{1}{2} \partial_1^{n+1} w \partial_2^{n+1} w \Big], \quad \mathbf{x} \in G, \quad i = 1, 2,$$

где

$$H_{(-)}^{(\pm)} \equiv \sum_{k=-1}^{K+1} h_k^{(\pm)} \bar{e}_{k+2}^{(-)} \quad ((-) \rightarrow (+)), \quad \bar{C}_{l+1}^{(\pm)} \equiv \sum_{k=0}^{K+1} h_k^{(\pm)} \bar{c}_{k+2,l+1},$$

$$\bar{w}^{(\pm)} \equiv \sum_{k=0}^{K+1} h_k^{(\pm)} \bar{w}_{k+2}, \quad h_{-1}^{(\pm)} \equiv \frac{1}{2}, \quad h_k^{(\pm)} \equiv (\pm h)^{k+1} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right), \quad (39)$$

$$0 \leq k \leq K;$$

$\bar{c}_{i,j}$  и  $\bar{w}_i$ ,  $\bar{e}_i^{(\pm)}$  – компоненты матрицы  $C^{-1}$  и векторов-столбцов  $\bar{W}$ ,  $\bar{E}^{(\pm)}$  (см. (30), (31)).

В силу предположения о том, что значения функций  $w^{n+1}$  и  $u_i^{(l)n+1}$  ( $i = 1, 2, 0 \leq l \leq K + 1$ ) уже известны из уравнений (35), правые части в (38) с учетом (37), (39) известны в момент времени  $t_n$ . Четыре равенства (38) (при выборе верхних и нижних знаков « $\pm$ », « $\mp$ » и  $i = 1, 2$ ) образуют замкнутую относительно функций  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)n+1}$  систему линейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка. Исследование вопросов корректной постановки краевой задачи для системы (38) выходит за рамки настоящей работы. Здесь же лишь отметим: в случаях нагружения пластин, когда необходимо интегрировать краевую задачу для системы уравнений (38), нельзя построить явную численную схему. При нагрузках же взрывного типа, когда имеют место равенства (32) и деформации  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)}$  определяются из соотношений (33), можно построить явную численную схему (как и в [15] при  $K = 0$ , т.е. в рамках теории Редди). Именно этот случай далее и будем рассматривать. (При использовании теории Рейсснера, основанной на гипотезе независимой ротации недеформируемой поперечной нормали, всегда можно построить явную численную схему [3 и др.], но при этом нельзя удовлетворить силовые граничные условия (15) даже в случае выполнения условий (32) [15].)

Предполагаем, что при  $t = t_{n+1}$  значения функций  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)n+1}$  уже известны из (33) (или из решения краевой задачи для системы (38)), поэтому на основании равенств (30) с учетом выражений (29), (31) и обозначений (28) при известных  $w^{n+1}$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(\pm)n+1}$  и  $u_i^{(l)n+1}$  ( $0 \leq l \leq K + 1$ ) можно вычислить значения функций  $u_i^{n+1}$ ,  $\varepsilon_{i3}^{(k)n+1}$  ( $i = 1, 2, 0 \leq k \leq K$ ), а затем по формулам (1) и (4) можно определить осредненные деформации  $\varepsilon_{ij}^{n+1}$  в каждой точке композитной пластины. Дальнейшее решение исследуемой задачи строится совершенно так же, как описано в [15] (см. равенства (49)-(51) и пояснения к ним).

Согласно структуре левых частей уравнений (35), расчет по предлагаемой численной схеме можно начать только при известных функциях  $w^0$  и  $u_i^{(l)0}$  (которые получаем из начальных условий (20), (25)) и функциях  $w^1$ ,  $u_i^{(l)1}$  (см. (35) при  $n = 1$ ). Значения последних функций можно определить по формуле Тейлора

с учетом начальных условий (20), (25) и уравнений движения (10), (11) при  $t = t_0$  [24]

$$\begin{aligned} {}^1 w(\mathbf{x}) &= {}^0 w(\mathbf{x}) + \tau \dot{{}^0 w}(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{{}^0 w}(\mathbf{x}) + O(\tau^3) \approx 0, \\ u_i^{(l)}(\mathbf{x}) &= u_i^{(l)}(\mathbf{x}) + \tau \dot{u}_i^{(l)}(\mathbf{x}) + \frac{\tau^2}{2} \ddot{u}_i^{(l)}(\mathbf{x}) + O(\tau^3) \approx 0, \\ \mathbf{x} \in G, \quad i &= 1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1. \end{aligned} \quad (40)$$

Приближенные равенства в соотношениях (40) выполняются с точностью порядка  $\tau^3$ . При этом нулевые значения справа соответствуют такому начальному состоянию пластины, когда при  $t = t_0$  внешние нагрузки отсутствуют (т.е.  $\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$ ,  $X_i(t_0, \mathbf{r}) \equiv 0$ ; см. равенства (10)-(12)) и конструкция покоится ( $U_{0i} \equiv 0$ ,  $V_{0i} \equiv 0$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ; см. начальные условия (20), (21)).

Если область  $G$ , занимаемая пластиной в плане, является прямоугольной, то после замены в уравнениях (35) и в силовых граничных условиях (22) производных  $\partial_i(\cdot)$  по пространственным переменным  $x_i$  от известных, согласно (34), функций их конечно-разностными аналогами в случае выполнения равенств (32) и (33) получим явную численную схему типа «крест» [3,15 и др.]. Если же область  $G$  не является канонической, то для дискретизации равенств (22) и (35) по пространственным переменным  $x_i$  ( $i = 1, 2$ ) можно использовать вариационно-разностный подход, описанный в [3].

Необходимые условия устойчивости такой численной схемы, согласно [3], следуют из условия Куранта-Фридрихса-Леви и для рассматриваемой армированной пластины определяются неравенствами (60) из [15].

Используя общеизвестные формулы перехода от прямоугольной декартовой системы координат к цилиндрической системе [21], полученные в настоящем исследовании разрешающие уравнения и граничные условия можно записать в полярной системе координат. Это удобно сделать в тех случаях, когда область  $G$  является кругом, кольцом или их сектором.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

В качестве конкретных примеров исследуем изгибное динамическое поведение упругопластических армированных конструкций различной формы: 1) кольцевой пластины толщиной  $2h = 1$  см, ограниченной кромками радиусов  $r_0 = 10$  см и  $r_1 = 60$  см (рис.2а); прямоугольных удлиненных пластин шириной  $L = 1$  м, имеющих толщину  $2h = 1$  см и  $2h = 10$  см (рис.2б).

Объемные нагрузки не учитываем ( $X_i \equiv 0$ ,  $i = \overline{1, 3}$ ). Касательными нагрузками на лицевых поверхностях пренебрегаем (см. (32)), т.е. выполняются равенства (33). Конструкции нагружаются снизу давлением  $p(t)$ , вызванным воздушной взрывной волной (см. (10), (11), (13), (14), (35)) [1,4]

$$\sigma_{33}^{(+)} \equiv 0, \quad -\sigma_{33}^{(-)} \equiv p(t) = \begin{cases} p_{\max} t / t_{\max}, & 0 \leq t \leq t_{\max}, \\ p_{\max} \exp[-\alpha(t - t_{\max})], & t > t_{\max}, \end{cases} \quad (41)$$

где

$$\alpha = -\ln(0,01) / (t_{\min} - t_{\max}) > 0, \quad t_{\min} \gg t_{\max}; \tag{42}$$

$t_{\max}$  – момент времени, в который давление достигает максимума  $p_{\max}$ ;  $t_{\min}$  – момент времени, начиная с которого давление пренебрежимо мало по сравнению с  $p_{\max}$  (соотношение (42) соответствует случаю  $p(t_{\min}) = 0,01p_{\max}$ ). Согласно экспериментальным данным [1,4], в расчетах примем  $t_{\max} = 0,1$  мс и  $t_{\min} = 2$  мс или  $t_{\min} = 200$  мс.

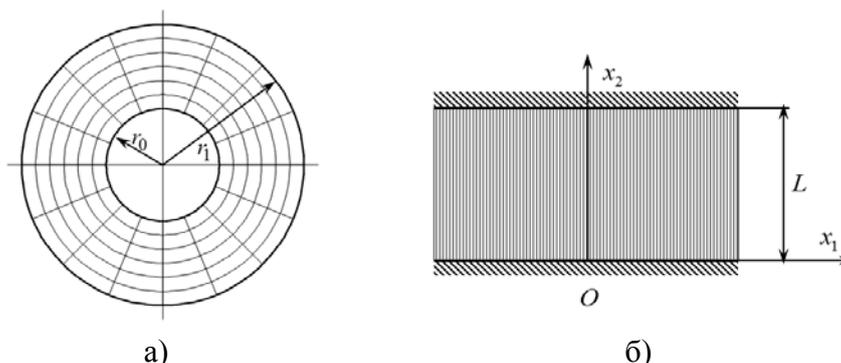


Рис.2. Структуры рассматриваемых пластин: а) радиально-окружное армирование кольцевой пластины; б) «поперечное» армирование прямоугольной удлиненной пластины.

В начальный момент времени композитные конструкции находятся в состоянии покоя (см. (20), (25) с учетом (26) при  $U_{0i} \equiv 0, V_{0i} \equiv 0, i = \overline{1, 3}$ ), и согласно (41) внешняя нагрузка отсутствует, поэтому справедливы равенства (40).

Пластины предполагаются изготовленными из эпоксидной смолы, отвержденной ароматическим аммиаком, и армированными стекловолокнами марки S-994. Упругопластическое поведение материалов фаз композиции при активном нагружении описывается идеализированной диаграммой с линейным упрочнением [25]

$$\sigma = \begin{cases} E_m \varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s^{(m)} = \sigma_s^{(m)} / E_m, \\ \text{sign}(\varepsilon) \sigma_s^{(m)} + E_s^{(m)} (\varepsilon - \text{sign}(\varepsilon) \varepsilon_s^{(m)}), & |\varepsilon| > \varepsilon_s^{(m)}, \quad 0 \leq m \leq N, \end{cases} \tag{43}$$

где  $\sigma, \varepsilon$  – осевые напряжение и деформация при растяжении и сжатии материала;  $E_m, E_s^{(m)}$  – модули Юнга и линейного упрочнения материала  $m$ -го компонента композиции;  $\sigma_s^{(m)}, \varepsilon_s^{(m)}$  – предел текучести и соответствующая ему деформация того же материала. Физико-механические характеристики материалов фаз композиции приведены в табл.1, где  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $a$  – скорость звука, вычисленная для каждого компонента композиции по формуле, аналогичной (60) из [15].

Таблица 1.

Физико-механические характеристики материалов компонентов композиции пластин [22,26].

| Материал            | $\rho, \text{ кг / м}^3$ | $\nu$ | $\sigma_s, \text{ МПа}$ | $E, \text{ ГПа}$ | $E_s, \text{ ГПа}$ | $a, \text{ м / с}$ |
|---------------------|--------------------------|-------|-------------------------|------------------|--------------------|--------------------|
| Эпоксидная смола    | 1210                     | 0,33  | 20                      | 2,8              | 1,114              | 1521,2             |
| Стекловолокно S-994 | 2520                     | 0,25  | 4500                    | 86,8             | 6,230              | 5868,9             |

Кольцевая пластина предполагается осесимметрично армированной двумя ( $N=2$ ) семействами волокон, одно из которых уложено в радиальном направлении, а другое – в окружном (рис.2а). Волокна имеют постоянные поперечные сечения, поэтому плотность армирования волокнами радиального семейства  $\omega_1$  (см. (9)) в осесимметричном случае определяется по формуле [13]

$$\omega_1(r) = r_0 \omega_{01} / r, \quad \omega_{01} \equiv \omega_1(r_0), \quad r_0 \leq r \leq r_1, \quad (44)$$

где  $r$  – полярный радиус;  $\omega_{01}$  – интенсивность армирования, заданная на внутренней кромке  $r=r_0$ .

Плотность же армирования волокнами окружного семейства  $\omega_2(r)$  может быть задана достаточно произвольно. Зададим функцию  $\omega_2(r)$  таким образом, чтобы суммарная плотность армирования  $\omega(r) = \omega_1(r) + \omega_2(r)$  с учетом (44) была величиной постоянной, причем в расчетах примем  $\omega(r) = \omega_{01} = 0,4$ .

Внешняя кромка кольцевой пластины предполагается жестко закрепленной, поэтому в равенствах (18) и (24) следует принять  $U_{*3} \equiv 0$ ,  $u_{*i}^{(l)} \equiv 0$  ( $0 \leq l \leq K+1$ ), так как  $U_{*i} \equiv 0$  ( $i=1, 2$ ) при  $r=r_1$  (см. первое выражение (26)). В отверстие такой пластины вставлена абсолютно жесткая шайба, которая жестко прикреплена к пластине по ее внутренней кромке, поэтому выполняются кинематические условия сопряжения решения

$$w_0(t) = w|_{r=r_0}, \quad u_i^{(l)}|_{r=r_0} = 0, \quad i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1, \quad t \geq t_0, \quad (45)$$

где  $w_0$  – осевое перемещение шайбы как жесткого целого (прогиб точек внутренней кромки пластины).

При заданных типах нагружения (см. (41), (42)), закрепления (см. (45)) и структуре армирования (см. (44)) в кольцевой пластине реализуется случай осесимметричного изгиба, т.е. решение соответствующей динамической задачи не зависит от полярного угла. При этом поперечные сдвиги и тангенциальные перемещения в окружном направлении отсутствуют ( $u_2^{(l)} \equiv 0$ ,  $0 \leq l \leq K+1$ ), поэтому, согласно (28) и (30),  $u_2 \equiv 0$ ,  $\varepsilon_{23}^{(l)} \equiv 0$ ,  $0 \leq l \leq K$ ).

Чтобы замкнуть систему разрешающих уравнений при наличии шайбы, необходимо использовать дополнительное уравнение ее динамического равновесия, которое с учетом (41) запишется так

$$M_0 \ddot{w}_0 = \pi r_0^2 p(t) + 2\pi r_0 M_{13}^{(0)}(t, r_0), \quad t \geq t_0, \quad (46)$$

где  $M_0$  – масса шайбы;  $M_{13}^{(0)}$  – поперечная сила (см. (12)). Для материала шайбы примем  $\rho = 1590 \text{ кг/м}^3$ , что соответствует магниевым сплавам [22], а толщину шайбы зададим вдвое большей, чем толщина  $2h$  кольцевой пластины. По этим данным можно рассчитать массу шайбы  $M_0$  (см. (46)).

При проведении расчетов вдоль полярного радиуса  $r$  вводилась сетка с шагом  $\Delta r = (r_1 - r_0) / 100 = 5 \text{ мм}$ , а шаг по времени  $\tau = 0,5 \text{ мкс}$ . При этом получаем  $\Delta r / \tau = 10 \text{ км/с}$  и  $2h / \tau = 20 \text{ км/с}$ . Эти отношения превышают значения  $a$ , указанные в таблице, поэтому необходимые условия устойчивости используемой численной схемы «крест» для кольцевой пластины выполняются со значительным запасом (см. формулы (60) в [15] и пояснения к ним).

На рис.3 изображены зависимости  $w_0(t)$ , соответствующие параметрам нагрузки  $p_{\max} = 1$  МПа и  $t_{\min} = 2$  мс (см. (41), (42)). Пунктирная кривая 1 на этом рисунке рассчитана по теории Редди (при  $K = 0$  в выражениях (1), (3), (4)), а сплошная линия 2 – по уточненной теории при  $K = 7$ . В окрестности начального момента времени ( $0 \leq t < 300$  мс) кривые 1 и 2 визуально различаются незначительно (однако деформированное состояние в связующем при этих расчетах различается существенно), поэтому осцилляции шайбы на этом интервале времени не изображены.

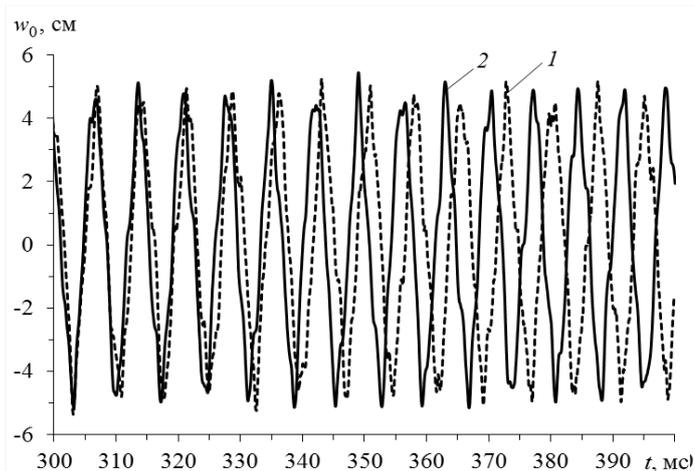


Рис.3. Осцилляции шайбы в кольцевой пластине, рассчитанные по двум теориям.

Сопоставление кривых на рис.3 свидетельствует о том, что с течением времени уточненное решение все больше отличается от решения, построенного в рамках теории Редди. Такое различие решений, полученных при  $K = 0$  и  $K = 7$ , накапливается с течением времени и становится существенно заметным при  $t \approx 1$  с и более. Поэтому низкая точность теории Редди может привести к совершенно неадекватным результатам расчетов, особенно при повторных динамических нагружениях кольцевой пластины.

В работе [15] в качестве примеров исследовалось динамическое упругопластическое поведение прямоугольных удлиненных армированных пластин при цилиндрическом изгибе. При этом рассматривались лишь малые интервалы времени в окрестности начала движения (порядка нескольких первых периодов колебаний пластины). Результаты же расчетов, приведенных на рис.3, показывают, что значительное различие решений, полученных по разным теориям, наблюдается при временах порядка десятых долей секунды, т.е. после нескольких десятков колебаний пластины. Поэтому вновь обратимся к прямоугольным удлиненным пластинам, сориентированным вдоль оси  $Ox_1$ , жестко закрепленным вдоль продольных кромок ( $x_2 = 0, L$ ) и усиленных волокнами одного семейства ( $N = 1$ ) в поперечном направлении, т.е. вдоль оси  $Ox_2$  (см. рис.2б), с постоянной плотностью армирования  $\omega_1 = \text{const}$ .

Отметим, что все рассматриваемые в настоящем разделе структуры армирования (см. рис.2) условно можно считать рациональными, так как при выполнении равенств (32), по крайней мере на лицевых поверхностях ( $x_3 = \pm h$ ),

направления такого армирования совпадают с направлениями главных напряжений и деформаций.

Расчеты прямоугольных цилиндрических пластин, изгибаемых цилиндрически, проводились при разбижке интервала  $x_2 = [0, L]$  равномерной сеткой с шагом  $\Delta x_2 = L/100 = 1$  см и при  $\tau = 0,5$  мкс, поэтому  $\Delta x_2 / \tau = 20$  км/с. Ниже рассматриваются прямоугольные пластины толщиной  $2h = 1$  см и  $2h = 10$  см, для которых  $2h/\tau = 20$  км/с и  $2h/\tau = 200$  км/с соответственно. Приведенные отношения существенно превосходят значения  $a$ , указанные в таблице, поэтому и для таких пластин необходимые условия устойчивости схемы «крест» выполняются с запасом.

На рис.4 и 5 изображены зависимости  $w_*(t) = w(t, L/2)$ , характеризующие поперечные осцилляции точек центральных сечений прямоугольных удлиненных пластин разной толщины при разных значениях  $\omega_1$ ,  $p_{\max}$  и  $t_{\min}$ . На рис.4а и рис.5а приведены результаты расчетов, выполненных по теории Редди ( $K = 0$ ), а на рис.4б и рис.5б – по уточненной теории при  $K = 7$ .

Кривые на рис.4 получены для весьма тонкой пластины ( $2h = 1$  см,  $2h/L = 1/100$ ) при  $\omega_1 = 0,3$ ,  $p_{\max} = 1,5$  МПа и  $t_{\min} = 2$  мс. Согласно (41) и (42), при  $t > 2$  мс колебания такой пластины можно рассматривать как свободные. В [15] показано (см. там кривые 1''–3'' на рис.7), что в окрестности начала движения (на интервале времени порядка одного периода колебаний) зависимости  $w_*(t)$  для таких весьма тонких армированных пластин, рассчитанные по классической теории, теории Рейсснера и теории Редди, визуально практически неразличимы. Однако сравнение кривых, изображенных на рис.4а и рис.4б, свидетельствует о том, что теория Редди (которая с точки зрения математического моделирования является более точной, чем классическая теория и теория Рейсснера [15]), не гарантирует получения адекватных результатов расчетов динамического упругопластического поведения даже весьма тонких армированных пластин при расчетных временах порядка нескольких десятых долей секунды.

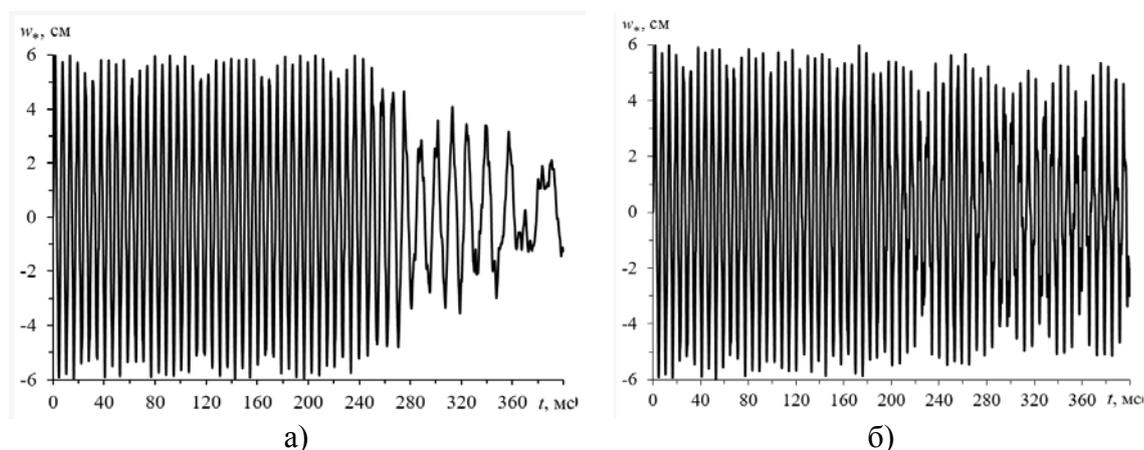


Рис.4. Осцилляции центрального сечения весьма тонкой прямоугольной удлиненной пластины: а) расчет по теории Редди; б) расчет по уточненной теории.

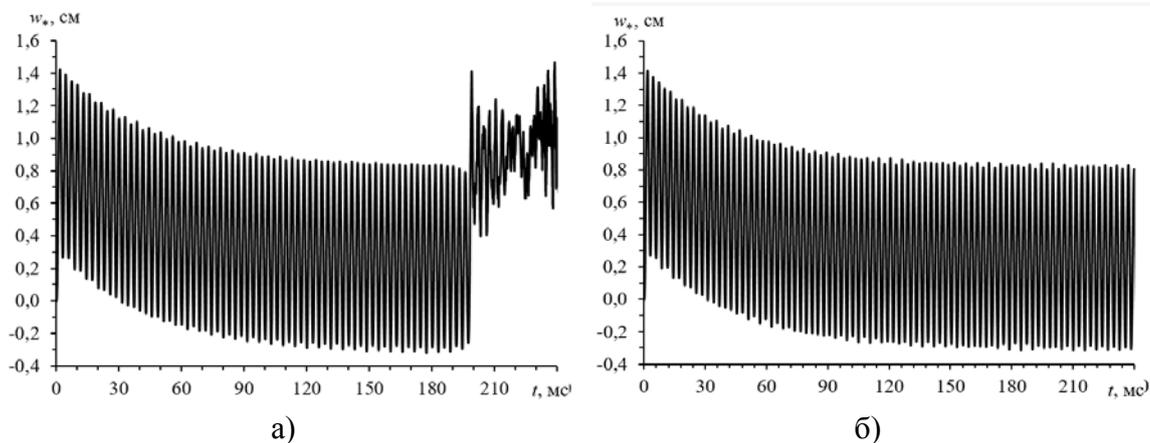


Рис.5. Осцилляции центрального сечения относительно толстой прямоугольной удлиненной пластины: а) расчет по теории Редди; б) расчет по уточненной теории.

В работе [27] на примерах динамических расчетов гибких композитных балок-стенок, выполненных из линейно-упругих материалов, было показано, что в рамках первого и второго вариантов теории Тимошенко (которым в случае пластин соответствуют теория Рейсснера и теория Редди [18]) необходимые условия устойчивости схемы «крест», вытекающие из условия Куранта (см. (60) в [15]), не являются достаточными, т.е. в геометрически нелинейных задачах можно говорить только о практической устойчивости этой схемы. Там же продемонстрировано, что этот вывод справедлив и при цилиндрическом изгибе гибких прямоугольных удлиненных армированных пластин, изготовленных из линейно-упругих материалов. Естественно, этот вывод переносится и на более сложный случай упругопластического деформирования гибких композитных пластин. Действительно, многочисленные расчеты, проведенные автором, показали, что при использовании теории Редди ( $K = 0$ ) встречаются ситуации, в которых явная схема «крест» проявляет неустойчивость даже в тех случаях, когда условия Куранта (см. (60) в [15]) выполняются со значительным запасом. При этом, как правило, вычисления, проводимые по уточненным теориям ( $K \geq 2$ ), оказываются более устойчивыми. (Объяснить причину этого пока не удалось.) Продemonстрируем этот факт.

Приведенные на рис.5 зависимости  $w_*(t)$  построены для относительно толстой пластины ( $2h = 10$  см,  $2h/L = 1/10$ ) при  $\omega_1 = 0,5$ ,  $p_{\max} = 4,5$  МПа и  $t_{\min} = 200$  мс. Расчет такой пластины в рамках классической теории, теории Рейсснера и теории Редди проводился и в [15], где показано (см. рис.5 и рис.6), что даже в окрестности начального момента времени не только классическая теория, но и теория Рейсснера приводят к результатам, существенно отличающимся от решения, полученного в рамках теории Редди. Зависимости  $w_*(t)$ , изображенные на рис.5, позволяют верифицировать точность теории Редди (рис.5а). Видно, что на начальном интервале времени ( $0 \leq t \leq 180$  мс) теория Редди обеспечивает вполне приемлемую точность определения прогибов рассматриваемой пластины. Однако в рамках этой теории при  $t > 190$  мс численная схема «крест» проявляет неустойчивость (т.е. практическая устойчивость имеет место при  $0 \leq t \leq 180$  мс). Расчет же, проведенный

по уточненной теории (рис.5б), остается устойчивым. (В действительности вычисления проводились на интервале времени  $0 \leq t \leq 0,4$  с, и на всем этом интервале наблюдалась устойчивость расчета по уточненной теории.)

В работе [27] неустойчивость схемы «крест» при расчете динамики композитных балок-стенок из линейно-упругих материалов проявлялась «взрывным» образом. При расчете же динамики упругопластической армированной пластины в рамках теории Редди (рис.5а) неустойчивость не проявляет себя «взрывным» образом. (Такой расчет удалось провести на всем интервале времени  $0 \leq t \leq 0,4$  с без автоматического останова вычислений.) Объясняется это, по-видимому, тем, что при возникновении неустойчивости схемы расчетные пластические деформации и их скорости в компонентах композиции существенно возрастают, что приводит к резкому увеличению расчетной механической диссипации энергии и, как результат, к сдерживанию неограниченного роста по модулю перемещений и деформаций.

Дополнительные расчеты, проведенные для всех рассмотренных выше пластин при  $K \geq 8$  (см. (1), (3) и (4)), показали, что разработанная в настоящем исследовании численная схема (см. раздел 2), как правило, проявляет неустойчивость. Объясняется это тем, что для тонкостенных пластин матрица  $C$  в равенстве (27) (см. (29)) при  $K \geq 8$  плохо обусловлена (расчеты проводились с двойной точностью), поэтому численное обращение этой матрицы (см. (30), (31)) приводит к большим ошибкам, что негативно сказывается на устойчивости предложенной численной схемы.

В работе [15] показано, что для построенной там и использованной здесь структурной модели механики композитов в фиксированный момент времени  $t_n$  в каждой точке пластины, независимо от соседних точек, нужно использовать итерационный процесс, качественно аналогичный процедуре посадки напряженного состояния на поверхность текучести [3]. Проведенные исследования продемонстрировали, что на каждом шаге по времени достаточно сделать две итерации. Вторая итерация уточняет деформации компонентов композиции на относительную величину порядка относительной толщины пластины. Последующие итерации не приводят к заметному уточнению решения.

## ВЫВОДЫ

В работе [15] было показано, что теория Рейсснера, основанная на кинематической гипотезе независимой ротации недеформируемой поперечной нормали, непригодна для практических расчетов упругопластического изгиба плоско-армированных гибких пластин, имеющих относительную толщину порядка  $1/10$  и более, поэтому в [15] было рекомендовано использовать для проведения адекватных расчетов теорию Редди, учитывающую искривление поперечной нормали пластины. Проведенные же в настоящем исследовании расчеты продемонстрировали, что при изучении упругопластического динамического поведения плоско-армированных гибких пластин использование теории Редди на расчетных временах порядка нескольких десятых долей секунды и более приводит к значительному отличию от результатов расчетов, выполненных в рамках уточненной теории даже для весьма тонких композитных пластин (с относительной толщиной порядка  $1/100$ ). Это различие с увеличением

расчетного времени возрастает и наиболее ярко проявляется при сравнении расчетных деформированных состояний материалов компонентов композиции.

Явная численная схема типа «крест», использованная для интегрирования сформулированных начально-краевых задач и построенная на базе уравнений уточненных теорий, обладает большей практической устойчивостью, чем в рамках традиционной неклассической теории Редди.

Таким образом, для получения надежных результатов расчетов динамического упругопластического поведения плоско-армированных пластин следует рекомендовать использование уточненных теорий, предложенных в настоящем исследовании.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading* // Computers & Structures. – 1987. – Vol.26. – No.1-2. – Pp.1-15.
2. Немировский Ю.В., Романова Т.П. *Динамика пластического деформирования пластин с криволинейным контуром* // Прикладная механика. – 2001. – Т.37. – №12. – С.68-79.
3. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. – Н.Новгород: ННГУ, 2002. – 400 с.
4. Librescu L., Oh S.-Y., Hohe J. *Linear and non-linear dynamic response of sandwich panels to blast loading* // Composites. – 2004. – Part B 35. – Pp.673-683.
5. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses* // Intern. J. of Non-Linear Mechanics. – 2011. – Vol.46. – Pp.807-817.
6. Романова Т.П. *Моделирование динамического поведения мозаично-армированных трехслойных квадратных пластин* // Проблемы прочности и пластичности. – 2016. – Т.78. – №2. – С.145-155.
7. Reissner E. *The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plate* // J. Appl. Mech. – 1945. – Vol.12. – No.2. – Pp.69-77.
8. Васильев В. В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
9. Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А. *Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи*. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 336 с.
10. Юдин А.С. *Устойчивость и колебания конструктивно-анизотропных и армированных оболочек вращения*. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального ун-та, 2011. – 362 с.
11. Reddy J.N. *A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation* // Int. J. of Solids and Structures. – 1984. – Vol.20. – No.9. – Pp.881-896.
12. Амбарцумян С.А. *Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания*. – М.: Наука, 1987. – 360 с.
13. Немировский Ю.В., Резников Б.С. *Прочность элементов конструкций из композитных материалов*. – Новосибирск: Наука, 1986. – 168 с.
14. Андреев А. *Упругость и термоупругость слоистых композитных оболочек. Математическая модель и некоторые аспекты численного анализа*. – Saarbrücken (Deutschland): Palmarium Academic Publishing, 2013. – 93 с.

15. Янковский А.П. *Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т.9. – №3. – С.279-297.
16. Christensen R., Lo K., Wu E. *A high-order theory of plate deformation. Part 1: homogeneous plates* // J. Appl. Mech. – 1977. – Vol.44. – No.7. – Pp.663-668.
17. Романова Т.П., Янковский А.П. *Сравнительный анализ моделей изгибного деформирования армированных балок-стенок из нелинейно-упругих материалов* // Проблемы прочности и пластичности. – 2014. – Т.76. – №4. – С.297-309.
18. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. *Сопротивление полимерных и композитных материалов*. – Рига: Зинатне, 1980. – 571 с.
19. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
20. Амбарцумян С.А. *Общая теория анизотропных оболочек*. – М.: Наука, 1974. – 446 с.
21. Новожилов В.В. *Теория упругости*. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 371 с.
22. *Композиционные материалы. Справочник*. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
23. *Динамический расчет сооружений на специальные воздействия: Справочник проектировщика*. – М.: Стройиздат, 1981. – 215 с.
24. Самарский А.А. *Теория разностных схем*. – М.: Наука, 1989. – 616 с.
25. Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
26. *Справочник по композитным материалам: В 2-х кн. Кн.1.* – М.: Машиностроение, 1988. – 448 с.
27. Янковский А.П. *Практическая устойчивость схемы «крест» при численном интегрировании уравнений динамики для гибких тонкостенных элементов конструкций, подчиняющихся гипотезам теории Тимошенко* // Математические методы и физико-механические поля. – 2015. – Т.58. – №1. – С.65-83.

## REFERENCES

1. Houlston R., DesRochers C.G. *Nonlinear structural response of ship panels subjected to air blast loading*. Computers & Structures, 1987, Vol.26, No.1-2, Pp.1-15.
2. Nemirovskii Yu.V., Romanova T.P. *Dynamic plastic deformation of curvilinear plates*. Int. Appl. Mech., 2001, Vol.37, No.12, Pp.1568-1578.
3. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineinye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksii [Nonlinear problems of dynamics composites designs]*. – Nizhniy Novgorod, Nizhniy Novgorod State University, 2002, 400 p.
4. Librescu L., Oh S.-Y., Hohe J. *Linear and non-linear dynamic response of sandwich panels to blast loading*. Composites, 2004, Part B 35, Pp.673-683.
5. Kazanci Z. *Dynamic response of composite sandwich plates subjected to time-dependent pressure pulses*. Intern. J. of Non-Linear Mechanics, 2011, Vol.46, Pp.807-817.
6. Romanova T.P. *Modelirovanie dinamicheskogo povedeniia mozaichno-armirovannykh trekhslonnykh kvadratnykh plastin [Modeling of dynamic behavior*

- of mosaic-reinforced three-layer square plates*]. Problemy prochnosti i plastichnosti, 2016, Vol.78, No.2, Pp.145-155.
7. Reissner E. *The effect of transverse shear deformations on the bending of elastic plate*. J. Appl. Mech. 1945, Vol.12, No.2, Pp.69-77.
  8. Vasil'ev V.V. *Mekhanika konstruktсии iz kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite structures]*. – Moskva: Mashinostroenie, 1988, 272 p.
  9. Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei N.A. *Nelineinoe deformirovanie i ustoichivost' uprugikh obolochek neodnorodnoi struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi [Nonlinear deformation and stability of elastic shells of non-uniform structure: Models, methods, algorithms, the insufficiently studied and new problems]*. – Moskva, Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2012, 336 p.
  10. Yudin A.S. *Ustoichivost' i kolebaniia konstruktivno-anizotropnykh I artifizirovannykh obolochek vrashcheniia [Stability and oscillations of constructively-anisotropic and articulated shells of rotation]*. – Rostov-na-Donu, Publ. of Southern federal university, 2011, 362 p.
  11. Reddy J.N. *A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation*. Int. J. of Solids and Structures, 1984, Vol.20, No.9, Pp.881-896.
  12. Ambarcumian S.A. *Teoriia anizotropnykh plastin. Prochnost', ustoichivost' i kolebaniia [The theory of anisotropic plates. Strength, stability and fluctuations]*. – Moskva, Nauka, 1987, 360 p.
  13. Nemirovskii Yu.V., Reznikov B.S. *Prochnost' elementov konstruktсии iz kompozitnykh materialov [Strength of elements of designs from composites materials]*. Novosibirsk, Nauka, 1986, 168 p.
  14. Andreev A.N. *Uprugost' i termouprugost' sloistykh kompozitnykh obolochek. Matematicheskaiia model' i nekotorye aspekty chislennogo analiza [Elasticity and thermo-elasticity layered composite shells. Mathematical model and some aspects of the numerical analysis.]*. Saarbrucken (Deutschland), Palmarium Academic Publishing, 2013, 93 p.
  15. Yankovskii A.P. *Primenenie iavnogo po vremeni metoda tsentral'nykh raznostei dlia chislennogo modelirovaniia dinamicheskogo povedeniia uprugoplasticheskikh gibkikh armirovannykh plastin [Using of explicit time-central difference method for numerical simulation of dynamic behavior of elasto-plastic flexible reinforced plates]*. Vychislitel'naia mekhanika sploshnykh sred, 2016, Vol.9, No.3, Pp.279-297.
  16. Christensen R., Lo K., Wu E. *A high-order theory of plate deformation. Part 1: homogeneous plates*. J. Appl. Mech. 1977, Vol.44, No.7, Pp.663-668.
  17. Romanova T.P., Yankovskii A.P. *Sravnitel'nyi analiz modelei izgibnogo deformirovaniia armirovannykh balok-stenok iz nelineino-uprugikh materialov [Comparative analysis of models of bending deformation of reinforced walls-beams of nonlinear elastic materials]*. Problemy prochnosti i plastichnosti, 2014, Vol.76, No.4, Pp.297-309.
  18. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie polimernykh i kompozitnykh materialov [Resistance polymeric and composite materials]*. Riga, Zinante, 1980, 571 p.
  19. Washizu K. *Variational methods in elasticity and plasticity*. Oxford – New York – Toronto – Sydney – Paris – Frankfurt, Pergamon Press, 1982.
  20. Ambarcumian S.A. *Obshchaia teoriia anizotropnykh obolochek [The general theory of anisotropic shells]*. Moskva, Nauka, 1974, 446 p.

21. Novozhilov V.V. *Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]*. Leningrad, Sudpromgiz, 1958, 371 p.
22. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Composite materials. Reference Book]*. Kiev, Naukova dumka, 1985, 592 p.
23. *Dinamicheskii raschet sooruzhenii na spetsial'nye vozdviistviia: Spravochnik proektirovshchika [Dynamic calculation of structures for special effects: Designer's Handbook]*. Moskva, Stroiizdat, 1981, 215 p.
24. Samarskii A.A. *Teoriia raznostnykh skhem [The theory of finite difference schemes]*. Moskva, Nauka, 1989, 616 p.
25. Malinin N.N. *Prikladnaia teoriia plastichnosti i polzuchesti [The applied theory of plasticity and creep]*. Moskva, Mashinostroenie, 1968, 400 p.
26. *Handbook of composites*. New York: Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1982.
27. Yankovskii A.P. *Prakticheskaia ustoichivost' skhemy "krest" pri chislennom integririvanii uravnenii dinamiki dlia gibkikh tonkostennykh elementov konstruktsiy, podchiniaiushchikhsia gipotezam teorii Timoshenko [Practical stability of the "cross" scheme in the numerical integration of dynamic equations for flexible thin-walled structural elements under the hypotheses of the Timoshenko theory]*. Matematicheskie metody i fiziko-mekhanicheskie polia, 2015, Vol.58, No.1, Pp.65-83.

*Поступила в редакцию 4 апреля 2017 года*

---

Сведения об авторе:

Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., проф., в.н.с., Лаборатория «Физики быстропотекающих процессов», ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: [lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru)