

О ПРИМЕНЕНИИ МОДЕЛИ ОСТВАЛЬДА – ДЕ ВИЛЯ ДЛЯ АНАЛИЗА ТЕЧЕНИЯ КУЭТТА

Шаповалов В.М., Харитонов В.Н.

*Волжский политехнический институт (филиал) Волгоградского
государственного технического университета, г. Волжский, Россия*

АННОТАЦИЯ

Червячные машины широко применяются для переработки полимерных систем и композитных материалов со сложным реологическим поведением. Для описания течения перерабатываемых сред используются различные реологические модели. Широкое распространение получили математические модели течения, основанные на применении модели Оствальда – де Виля (степенная модель). Это объясняется её относительной простотой, наглядностью и лёгкостью определения реологических параметров.

Между тем известен недостаток степенной модели: завышенная вязкость при малых скоростях деформации. Следовательно, математические модели течений, базирующиеся на степенной модели, должны давать неточный прогноз в определении интегральных параметров.

В настоящей работе оценка погрешности модели Оствальда – де Виля выполнена путём сопоставления расчётных результатов с результатами, полученными с помощью «эталонной» модели, в качестве которой использовалась трёхпараметрическая реологическая модель Эллиса. Модель Эллиса хорошо описывает реологическое поведение полимерных растворов и расплавов в области малых и средних скоростей деформации. Насколько известно авторам, подобных оценок для рассматриваемого течения не проводилось.

Рассматривается течение обобщённой ньютоновской жидкости между двумя параллельными плоскими стенками (развёртка червяка), из которых одна покоится, а другая движется в своей плоскости с постоянной скоростью. Расстояние между стенками (глубина нарезки шнека) постоянна. Течение ламинарное, установившееся, изотермическое. Среда несжимаемая. Инерционные и массовые силы по сравнению с силами вязкого трения пренебрежимо малы. Скольжение на поверхностях отсутствует.

Работа включает общее решение задачи куэттовского течения обобщённой ньютоновской жидкости, получение расчётных формул для моделей Оствальда – де Виля и Эллиса, сопоставление расчётных результатов полученных решений.

В результате анализа полученных результатов показано, что степенная модель приводит существенным ошибкам при сравнительно низких скоростях движения стенки.

Ключевые слова: эффективная вязкость; скорость; давление; течение; касательное напряжение; модель Оствальда – де Виля; модель Эллиса

APPLICATION OF MODELS OSTWALD - DE VILLE FOR ANALYSIS COUETTE FLOW

Shapovalov V.M., Kharitonov V.N.

*Complete denomination: Volzhsky Polytechnical Institute (branch of) State Educational
Institution of Higher Professional Education “Volograd State Technical University”,
Volzhsky, Russia*

ABSTRACT

Worm cars are widely used for the processing of polymer systems and composite materials with complex rheological behavior. To describe the flow of recyclable media using different rheological models. Widespread mathematical flow models based on the use of models Ostwald - de Waele (grade model). This is due to its relative simplicity, clarity and ease of determination of rheological parameters.

Meanwhile, the lack of known power-law model: inflated viscosity at low strain rates. Therefore, the mathematical model of flows, based on a power model should give inaccurate forecasts in determining the integral parameters.

In this paper, error estimation model Ostwald – de Waele made by comparing the calculated results with the results obtained using the "standard" model, which was used as a rheological model three-parameter Ellis. Ellis model well describes the rheological behavior of polymer solutions and melts in the field of small and medium strain rates. To our knowledge, such assessments for the considered flow was carried out.

The flow of the generalized Newtonian fluid between the two parallel flat walls (unfolding worm), of which one is at rest, and the other moves in its own plane with a constant velocity. The distance between the walls (the depth of the screw cutting) is constant. The flow is laminar, steady, isothermal. Wednesday incompressible. Inertial mass and strength compared to viscous friction forces are negligible. Slipping on missing surfaces.

The work includes the general solution of Couette flow of generalized Newtonian fluid, obtaining computational formulas for models Ostwald – de Waele and Ellis, a comparison of the calculated results of the solutions.

The analysis of the results shows that power law model causes significant errors at relatively low speeds wall motion.

Keywords: effective viscosity; speed; pressure; flow; shear stress; model Ostwald – de Waele; Ellis model

ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на привлекательную простоту двухпараметрической модели Оствальда – де Вилля, модель имеет существенный недостаток – бесконечно возрастающую вязкость при малых скоростях сдвига [1]. Тем не менее, степенная модель широко используется как в фундаментальных исследованиях, так и в инженерных расчётах технологического оборудования, в частности, течения полимерных систем в червячных машинах [2-8] и др.

Гидродинамическая теория переработки неньютоновских сред на червячных машинах базируется на течении Куэтта [9,10]. В настоящей работе оценка погрешности модели Оствальда – де Вилля выполнена путём сопоставления расчётных результатов с результатами, полученными с помощью «эталонной» модели, в качестве которой использовалась трёхпараметрическая реологическая модель Эллиса. Модель Эллиса хорошо описывает реологическое поведение полимерных растворов и расплавов в области малых и средних скоростей деформации. Насколько известно авторам, подобных оценок не проводилось.

Работа включает общее решение задачи куэттовского течения обобщённой ньютоновской жидкости, получение расчётных формул для моделей Оствальда – де Вилля и Эллиса, сопоставление расчётных результатов полученных решений.

1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КУЭТТОВСКОГО ТЕЧЕНИЯ ОБОБЩЁННОЙ НЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Расчётная схема представлена на рис.1. Рассматриваем течение обобщённой ньютоновской жидкости между двумя параллельными плоскими стенками (развёртка червяка), из которых одна покоится, а другая движется в своей плоскости с постоянной скоростью V . Расстояние между стенками (глубина нарезки шнека) равна h . Течение ламинарное, установившееся, изотермическое. Среда несжимаемая. Инерционные и массовые силы по сравнению с силами вязкого трения пренебрежимо малы. Скольжение на поверхностях отсутствует. Ось x лежит на поверхности нижней пластины, ось y перпендикулярна пластине. В направлении оси x существует противодавление, созданное сопротивлением, расположенным на достаточном удалении от рассматриваемого сечения.

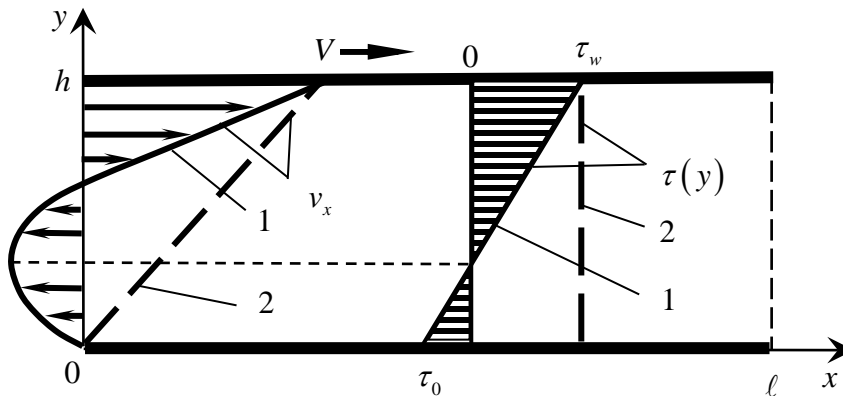


Рис.1. Схема течения.

С учётом принятых допущений, течение описывается следующей системой уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dx} &= \frac{d\tau}{dy}, \quad \tau = \eta(\tau) \frac{dv_x}{dy} \\ y=0, \quad v_x &= 0, \quad \tau = \tau_0 \\ y=h, \quad v_x &= V, \quad \tau = \tau_w \end{aligned} \quad (1)$$

где p – давление, τ , τ_0 , τ_w – касательное напряжение текущее, на нижней стенке, на верхней стенке, η – эффективная вязкость, x , y – декартовы координаты, v_x – осевая скорость, V – скорость движения верхней стенки. Для упрощения индексы у компоненты тензора напряжения опускаются.

В записи (1) первое уравнение – сохранения импульса, второе – реологического состояния обобщённой ньютоновской жидкости [11]. Левая часть уравнения движения (1) зависит только от x , а правая от y ; это означает, что $dp/dx = const$ и $d\tau/dy = const$. Градиент давления постоянен по длине канала, и определяется соотношением $dp/dx = \Delta p/l$, где Δp – избыточное давление в конце зоны течения (давление на входе в фильеру), l – длина канала (см. рис.1).

В результате интегрирования уравнения движения (1) по y , с учётом граничных условий, можем записать следующие соотношения

$$\tau = \frac{dp}{dx} y + \tau_0, \quad \tau_w = \frac{dp}{dx} h + \tau_0, \quad \tau = (\tau_w - \tau_0) \frac{y}{h} + \tau_0, \quad d\tau = (\tau_w - \tau_0) \frac{dy}{h}. \quad (2)$$

Согласно (2) касательное напряжение описывается линейной функцией. Поэтому для описания профиля скорости, наравне с ординатой y может использоваться τ .

Можно выделить два предельных случая течения: 1) режим наибольшего градиента давления (нулевого расхода) – линии 1 на рис.1; 2) режим нулевого градиента давления (наибольшего расхода) – линии 2 на рис.1. В первом режиме имеет место продольная циркуляция жидкости (противоток), и эпюра скорости имеет экстремум. В сечении экстремума скорости касательное напряжение равно нулю ($\tau = 0$). При этом на нижней пластине касательное напряжение отрицательно ($dp/dx = \max$, $\tau_0 < 0$). Во втором режиме эпюра осевой скорости линейна (простой сдвиг), касательное напряжение однородно по высоте зазора, и соответствует напряжению на верхней пластине ($dp/dx = 0$, $\tau_0 = \tau_w$). Переход от одного режима к другому характеризуется условием: $y = 0$, $\tau_0 = 0$, $dv_x/dy = 0$.

Профиль скорости найдём, используя реологическое уравнение

$$dv_x = \frac{\tau}{\eta} dy.$$

Используя четвёртое соотношение из (2) и граничные условия (1), можем записать

$$v_x = \int_0^{v_x} dv_x = \frac{h}{(\tau_w - \tau_0)} \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{\xi}{\eta(\xi)} d\xi. \quad (3)$$

Граничное условие на верхней плоскости (1) позволяет записать уравнение, связывающее касательные напряжения τ_0 и τ_w

$$V = \frac{h}{(\tau_w - \tau_0)} \int_{\tau_0}^{\tau_w} \frac{\xi}{\eta(\xi)} d\xi. \quad (4)$$

Расход, приходящийся на единицу ширины канала Q , определяется интегралом

$$Q = \int_0^h v_x dy. \quad (5)$$

Подставив в формулу (5) выражение (3), с учётом граничных условий (1) и соотношений (2), можем записать

$$Q = \frac{h^2}{(\tau_w - \tau_0)^2} \int_{\tau_0}^{\tau_w} \int_{\tau_0}^{\xi} \frac{\zeta}{\eta(\zeta)} d\zeta d\xi. \quad (6)$$

Выполнив в выражении (6) интегрирование по частям, получим расчётную формулу для расхода

$$Q = \frac{h^2}{(\tau_w - \tau_0)^2} \int_{\tau_0}^{\tau_w} (\tau_w - \xi) \frac{\xi}{\eta(\xi)} d\xi. \quad (7)$$

Уравнение связи (4) позволяет несколько упростить формулу (7)

$$Q = \frac{Vh\tau_w}{(\tau_w - \tau_0)} - \frac{h^2}{(\tau_w - \tau_0)^2} \int_{\tau_0}^{\tau_w} \frac{\xi^2}{\eta(\xi)} d\xi. \quad (8)$$

Для расчёта расходной характеристики (8) необходимо задать функцию $\eta(\tau)$, т.е. выбрать конкретную реологическую модель.

2. РАСЧЁТНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ МОДЕЛЕЙ ОСТВАЛЬДА – ДЕ ВИЛЯ И ЭЛЛИСА

Для жидкости Оствальда – де Виля $\tau = \eta_0 (dv_x/dy)^n$ выражение эффективной вязкости $\eta = \eta_0 (\tau/\eta_0)^{\frac{n-1}{n}}$, η_0, n – постоянные. Подставив это выражение в выражения (4), (8) и выполнив интегрирование, получим уравнения, связывающие расход, давление и касательное напряжение τ_0

$$\gamma q = \frac{n}{(n+1)\eta_0^{\frac{1}{n}}} \left[(q + \tau_0)^{\frac{1}{n}+1} - |\tau_0|^{\frac{1}{n}+1} \right], \quad (9)$$

$$Q_s = \frac{(q + \tau_0)}{q} - \frac{n}{(2n+1)\gamma q^2 \eta_0^{\frac{1}{n}}} \left[(q + \tau_0)^{\frac{1}{n}+2} - |\tau_0|^{\frac{1}{n}+2} \text{sign}(\tau_0) \right],$$

где $Q_s = \frac{Q}{Vh}$ – безразмерный расход, $q = \frac{dp}{dx} h$ – эквивалент градиента давления, $\gamma = \frac{V}{h}$ – эффективная скорость сдвига.

В случае отсутствия противодействия имеет место течение простого сдвига, для которого справедливо соотношение: $q \rightarrow 0$, $Q_s \rightarrow 0,5$. Расход наибольший. При этом величина γ характеризует скорость простого сдвига.

Пусть моменту начала циркуляции (см. пп.1) отвечает значение модифицированного давления q_0 . Условие наличия циркуляции: $\tau_0 \geq 0$, $q \geq q_0$. При этом из первого уравнения (9) для величины q_0 получаем простое соотношение $q_0 = \eta_0 [\gamma(1+n)/n]^n$. В ньютоновском случае: $n = 1$, $q_0 = 2\eta_0\gamma$.

Для реологической модели Эллиса $dv_x/dy = a\tau + b\tau^\alpha$ эффективная вязкость определяется выражением $\eta = (a + b\tau^{\alpha-1})^{-1}$, где a, b, α – постоянные. Подставив выражение для эффективной вязкости в выражения (4), (8) и выполнив интегрирование, получим уравнения, связывающие расход, давление и касательное напряжение τ_0

$$\gamma q = \frac{a}{2} q(q + 2\tau_0) + \frac{b}{\alpha+1} \left[(q + \tau_0)^{\alpha+1} - |\tau_0|^{\alpha+1} \right], \quad (10)$$

$$Q_E = \frac{(q + \tau_0)}{q} - \frac{1}{\gamma q^2} \left\{ \frac{a}{3} \left[(q + \tau_0)^3 - \tau_0^3 \right] + \frac{b}{\alpha+2} \left[(q + \tau_0)^{\alpha+2} - |\tau_0|^{\alpha+2} \text{sign}(\tau_0) \right] \right\}$$

Как уравнения (9), так и (10) решаются в следующей последовательности. Задаётся значение давления (q) и из первого трансцендентного уравнения находится соответствующее значение касательного напряжения τ_0 . Далее величины q и τ_0 подставляются во второе уравнение для расчёта расхода.

При решении трансцендентного уравнения начальное приближение для τ_0 выбиралось порядка 0,3.

Первое уравнение в (10) приводит к следующему соотношению для вычисления граничного значения модифицированного давления

$$\frac{b}{\alpha+1} q_0^\alpha + \frac{a}{2} q_0 - \gamma = 0.$$

В ньютоновском случае ($n=1$, $\eta_0 = \eta$, $a = \eta^{-1}$, $b=0$, где η – ньютоновская вязкость) обе модели (9), (10) сводятся к известному выражению [9]

$$Q_E = Q_s = \frac{1}{2} - \frac{q}{12\gamma\eta}, \quad q_m = 6\eta_0\gamma.$$

3. ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Для численного анализа воспользуемся данными реологических исследований из работы [12]. Измерения выполнены на капиллярном вискозиметре плунжерного типа. Резиновая смесь следующего состава [в ч. (масс)]: СКН-40 – 100, мел – 40, сера – 1,5, оксид цинка – 5, каптакс – 0,8, стеарин – 1,5. Диаметр плунжера и цилиндрической камеры термостатирования 9,52 мм, диаметр капилляра 2 мм, температура смеси при испытании 120°C. Исследован интервал касательных напряжений от 0,123 МПа до 0,203 МПа.

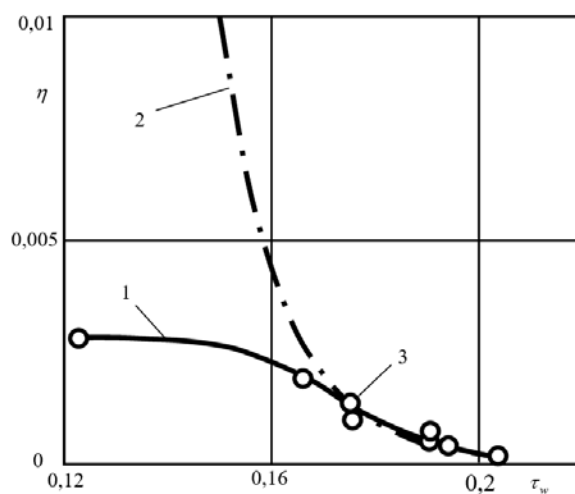


Рис.2. Зависимость эффективной вязкости жидкостей Эллиса (линия 1) и Оствальда – де Вилля (2) от касательного напряжения на стенке. Экспериментальные точки – 3.

В результате обработки кривой течения (методом выбранных точек) получены следующие значения реологических констант для модели Эллиса: $\alpha = 17,893$, $a = 350,217 \text{ МПа}^{-1}\text{с}^{-1}$, $b = 2,373 \times 10^{15} \text{ МПа}^{-\alpha}\text{с}^{-1}$. Соответственно, для модели Оствальда – де Вилля: $n = 0,071$, $\mu_0 = 0,124 \text{ МПа} \cdot \text{с}^{0,071}$. Материал является ярко выраженным псевдопластиком. Обработка реологических данных выполнена без учёта поправки Вайссенберга – Рабиновича, поскольку она качественно не влияет на результат. Выражения (2) позволяют давление и касательное напряжение выразить в мегапаскалях (МПа), а эффективную вязкость в мега

паскаль секундах (МПа·с), соответственно. При этом расчётные выражения не изменяются.

Расчётные результаты зависимости эффективной вязкости от касательного напряжения представлены на рис.2. Видно, что при больших значениях касательных напряжений обе модели дают близкий результат. Однако при напряжениях меньше 0,16 МПа наблюдается сильное расхождение прогнозируемых вязкостей. Модель Эллиса показывает монотонно изменяющуюся вязкость и хорошо согласуется с экспериментальными результатами. Модель Оствальда – де Вилля показывает завышенную вязкость, это, в частности следует из её свойств (при $n < 1$, $\tau_w \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow \infty$).

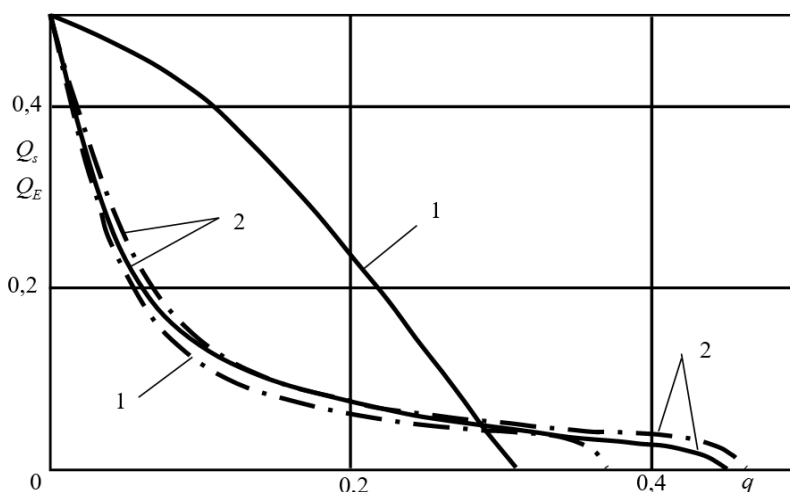


Рис.3. Расходные характеристики для жидкости Эллиса (сплошные линии) и Оствальда – де Вилля (штрихпунктирные): 1 – $\gamma = 43 \text{ с}^{-1}$, 2 – $\gamma = 1000 \text{ с}^{-1}$.

На рис.3 представлены, рассчитанные с помощью формул (9) и (10), расходные характеристики. Расчёты выполнены для двух значений параметра γ : $\gamma = 43 \text{ с}^{-1}$ и $\gamma = 1000 \text{ с}^{-1}$. Из рисунка видно, что при малых значениях параметра γ имеет место существенное расхождение расходных характеристик, полученных с использованием моделей Оствальда – де Вилля и Эллиса: одному и тому же давлению степенная модель на участке $q < 0,3$ предсказывает заниженный расход (при $q = 0,16$ расхождение достигает $\max(Q_E / Q_s) = 4,16$). В области высоких давлений $q > 0,3$ расходные характеристики отличаются величиной предельного давления. Значения граничного давления для модели Оствальда – де Вилля $q_0 = 0,196$, соответственно, для модели Эллиса – $q_0 = 0,186$. При больших скоростях деформаций ($\gamma = 1000 \text{ с}^{-1}$) обе модели предсказывают близкий результат (линии 2). Следует отметить, что в случае жидкости Оствальда – де Вилля конфигурация расходных характеристик мало меняется с изменением параметра γ , отличаясь величиной предельного давления.

ВЫВОДЫ

При описании течения Куэтта математическая модель, построенная на уравнении Оствальда – де Вилия, показывает существенную погрешность при малых скоростях движения пластины.

Погрешность возрастает с усилением аномально вязких свойств жидкости, т.е. с увеличением отклонения индекса течения от единицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шульман З.П. *Конвективный теплоперенос реологически сложных жидкостей*. – М.: Энергия, 1975. – 352 с.
2. Торнер Р.В. *Теоретические основы переработки полимеров*. – М.: Химия, 1977. – 464 с.
3. Самойлов А.В. *Тепловые расчёты червячных и валковых машин*. – М.: Машиностроение, 1978. – 152 с.
4. Ким В.С. *Теория и практика экструзии полимеров*. – М.: Химия, КолосС, 2005. – 568 с.
5. Труфанова Н.М., Щербинин А.Г., Янков В.И. *Плавление полимеров в экструдерах*. – М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Институт комплексных исследований. 2009. – 336 с.
6. Бортников В.Г. *Производство изделий из пластических масс. Том 3. Проектирование и расчет технологической оснастки*. – Казань: Дом печати, 2004. – 310 с.
7. Хаметова М.Г. *Описание стационарного, неизотермического течения неньютоновской жидкости в одношнековом экструдере // Вестник Саратовского государственного технического университета. Проблемы естественных наук. Математика*. – 2012. – Т.1.– №2(64). – С.15-19.
8. Пономарёва М.А., Филина М.П., Якутёнок В.А. *Циркуляционное течение высоковязкой неньютоновской жидкости в канале одношнекового экструдера // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика*. – 2016. – №2(40). – С.97-107.
9. Мак-Келви Д.М. *Переработка полимеров*. – М.: Химия, 1965. – 444 с.
10. Шлихтинг Г. *Теория пограничного слоя*. – М.: Наука, 1974. – 712 с.
11. Астарита Дж., Марручи Дж. *Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей*, Москва: Мир, 1978. – 312 с.
12. Красовский В.Н., Воскресенский А.М., Харчевников В.М. *Примеры и задачи по технологии переработки эластомеров*. – Л.: Химия, 1984. – 240 с.

REFERENCES

1. Shul'man Z.P. *Konvektivnyi teplomassoperenos reologicheski slozhnykh zhidkosti [Convective heat and mass transfer of rheologically complex fluids]*. Moskva, Energiia, 1975, 352 p.
2. Torner R.V. *Teoreticheskie osnovy pererabotki polimerov [Theoretical basis of polymer processing]*. Moskva, Khimiia, 1977, 464 p.
3. Samoilov A.V. *Teplovye raschety cherviachnykh i valkovykh mashin [Thermal calculations of worm and roll machines]*. Moskva, Mashinostroenie, 1978, 152 p.
4. Kim V.S. *Teoriia i praktika ekstruzii polimerov [Theory and practice of polymer extrusion]*. Moskva, Khimiia, KolosS, 2005, 568 p.

5. Trufanova N.M., Shcherbinin A.G., Iankov V.I. *Plavlenie polimerov v ekstruderakh [Melting polymers in extruders]*. Moskva, Izhevsk: NITs «Reguliarnaiia i khaoticheskaia dinamika», Institut kompleksnykh issledovaniy, 2009, 336 p.
6. Bortnikov V.G. *Proizvodstvo izdelii iz plasticheskikh mass. Tom 3. Proektirovanie i raschet tekhnologicheskoi osnastki [Manufacture of plastic products. Volume 3. Designing and calculation of technological equipment]*. Kazan', Dom pechati, 2004, 310 p.
7. Khametova M.G. *Opisanie statsionarnogo, neizotermicheskogo techeniia nen'iutonovskoi zhidkosti v odnoshnekovom ekstrudere [Description of stationary, nonisothermal flow of non-Newtonian fluid in a single-screw extruder]*. Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Problemy estestvennykh nauk. Matematika, 2012, Vol.1, No.2(64), Pp.15-19.
8. Ponomareva M.A., Filina M.P., Iakutenok V.A. *Tsirkulatsionnoe techenie vysokoviazkoi nen'iutonovskoi zhidkosti v kanale odnoshnekovogo ekstrudera [Circulation flow of high-viscosity non-Newtonian liquid in the channel of a single-screw extruder]*. Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika i mekhanika, 2016, No.2(40), Pp.97-107.
9. McKelvey, James M. *Polymer Processing*. John Wiley & Sons Inc, New York, 1962, 444 p.
10. Schlichting H. *Granzschicht-Theorie*. Karlsruhe, G. Braun, 1951, 712 p.
11. Giovanni Astarita, G. Marrucci. *Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, McGraw-Hill Inc., US, May 1974, 312 p.
12. Krasovskii V.N., Voskresenskii A.M., Kharchevnikov V.M. *Primery i zadachi po tekhnologii pererabotki elastomerov [Examples and tasks of elastomer processing technology]*. Leningrad, Khimiia, 1984, 240 p.

Поступила в редакцию 15 декабря 2016 года

Сведения об авторах:

Шаповалов Владимир Михайлович – д.т.н., проф., Волжский политехнический институт (филиал) Волгоградского государственного технического университета, г. Волжский, Россия; e-mail: svm-5@meil.ru

Харитонов Владимир Николаевич – к.т.н., доц., Волжский политехнический институт (филиал) Волгоградского государственного технического университета, г. Волжский, Россия; e-mail: hvnlearning@gmail.com