

УДК 539.3

БИМЕТАЛЛИЧЕСКАЯ ПЛАСТИНА В ОДНОРОДНОМ ТЕМПЕРАТУРНОМ ПОЛЕ

Глаголев В.В., Маркин А.А., Пашинов С.В.

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

АННОТАЦИЯ

Рассматривается равновесное термоупругое состояние тел, связанных тонким плоским слоем. Полагается, что сопротивление слоя взаимодействия изгибным деформациям незначительно (мягкий слой). При описании напряженно-деформированного состояния слоя используются осредненные по его толщине характеристики, выражаемые через граничные перемещения по закону Дюгамеля-Неймана. В результате задача о температурных деформациях в композиции тел с различными термомеханическими характеристиками сводится к системе вариационных уравнений относительно полей перемещений в двух телах, разделенных слоем взаимодействия. Дана частная постановка задачи о температурных воздействиях на биметаллическую пластину. При этом перемещения по толщине пластин выражаются через перемещения границ слоя взаимодействия и углы поворота нормалей к ним. Задача сводится к системе шести дифференциальных уравнений второго порядка. Рассмотрены температурные деформации биметаллической пластины, защемленной на одном краю и свободной на другом.

В случае нулевой толщины слоя взаимодействия получен закон изменения линии сопряжения пластин вдоль их длины в зависимости от температуры. При однородном состоянии (чистый изгиб) кривизна линии сопряжения становится постоянной. В случае нулевого коэффициента Пуассона приходим к известной зависимости кривизны от температуры.

Получено аналитическое решение при конечной толщине слоя взаимодействия и однородном по толщине пластин распределении деформаций. При несимметричной структуре композита тепловое воздействие приводит к односторонним неравномерным перемещениям пластин. В случае симметричной структуры учет граничных условий приводит к неравномерному симметричному распределению перемещений. Неравномерности имеют характер краевых эффектов, связанных с учетом сдвиговых деформаций.

Ключевые слова: биметаллическая пластина; мягкий слой; однородное температурное воздействие

BIMETALLIC PLATE IN A HOMOGENEOUS TEMPERATURE FIELD

Glagolev V.V., Markin A.A., Pashinov S.V.

Tula State University, Tula, Russia

ABSTRACT

We consider the equilibrium thermoelastic condition of the bodies tied by a thin flat layer. It is reckoned that the interaction layer resistance to flexural deformations is insignificant (a soft layer). The averaged on layer thickness characteristics expressed through boundary movements under Duhamel-Neumann's law are used for the description of the intense deformed condition of a layer. As a result, the task about temperature deformations in bodies' composition with

various thermomechanical characteristics comes down to system of the variation equations concerning movement fields in two bodies divided by an interaction layer. Partial definition of problem about temperature impacts on a bimetallic plate is given. At the same time, movements on thickness of plates are expressed through movements of layer borders of interaction and rotation angles of normals to them. The task comes down to system of six-second order differential equations. Temperature deformations of the bimetallic plate jammed at one edge and free on another are considered.

The change law of the interface line of plates along their length depending on temperature is received in case of the zero thickness of a layer of interaction. At a homogeneous state (a pure bend), the line curvature of interface becomes a constant. In case of zero Poisson coefficient, we come to the known dependence of curvature on temperature.

The analytical decision is received at a final thickness of an interaction layer and homogeneous in plate's thickness distribution of deformations. At asymmetrical structure of a composite thermal effect leads to unilateral uneven movements of plates. In case of symmetric structure, the accounting of boundary conditions leads to uneven symmetric distribution of movements. Unevenness have the nature of the edge effects connected with shift deformations accounting.

Keywords: bimetallic plate; soft layer; homogeneous temperature effect

ВВЕДЕНИЕ

Создание многослойных композиционных материалов, в том числе и материалов с памятью формы, требует адекватных методов расчета их напряженно-деформированного состояния (НДС) при различных внешних воздействиях, включая температурные [1-5]. Как правило, основным подходом для расчетов такого рода материалов является метод конечных элементов (МКЭ) [6-7]. МКЭ, для областей без особенностей, имеет вычислительную сходимость в зависимости от количества элементов разбиения рассматриваемого тела. Но для того каким образом строить генерацию КЭ желательно иметь аналитические решения задачи, пусть даже с определенными ограничениями. Построение решений для тел, состоящих из многослойных пластин, использует представления теории пластин и оболочек [8-13]. Принципиальным моментом в соответствующих моделях является учет клеевой подложки или слоя сопряжения материалов [14], деформации которого рассматриваются вне рамок оболочечной модели. Данные слои, следуя терминологии [9], определяются как мягкие. Их учет может не только существенно усложнить модель, но и приводить к результатам, не описываемым в рамках только жёстких слоев. В данной работе исследуется НДС двуслойной пластины, компоненты которой связаны посредством мягкого слоя при однородном температурном воздействии. Для описания поведения слоя сопряжения пластин используется концепция слоя взаимодействия [15,16], позволяющая учитывать, как сдвиговой характер нагружения, так и обжатие-растяжение промежуточного слоя.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

На рис.1 представлена биметаллическая пластина длиной l , состоящая из трех слоев с различными материальными свойствами.

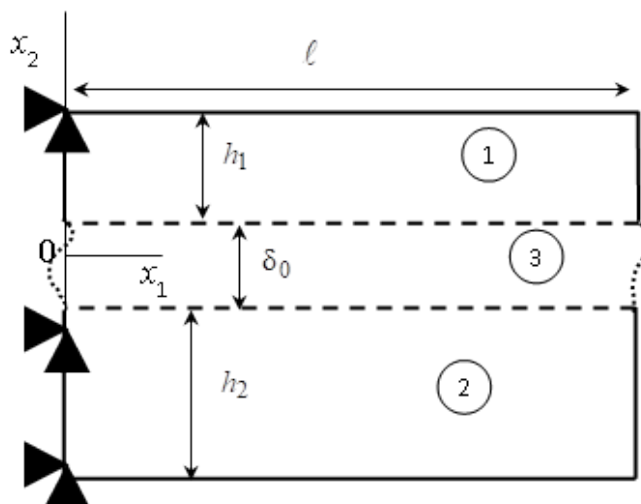


Рис.1. Биметаллическая пластина с адгезионным слоем.

Пластины 1 и 2 с толщинами h_1 и h_2 связаны слоем 3 толщиной δ_0 . Материал слоя 3 может быть клеевой подложкой либо сплавом тел 1 и 2. Предполагаем, что нагрев биметаллической пластины осуществлен на величину ΔT от начального состояния и распределение температуры однородно. Левый торец пластины жестко закреплен от перемещений, а вся остальная поверхность свободна от внешней нагрузки.

Для описания взаимодействия слоя 3 с телами 1 и 2 применим концепцию «слоя взаимодействия», развитую в работах [14,15]. В этом случае равновесие тел 1 и 2 в отсутствии внешней силовой нагрузки, согласно [14,15], запишем в вариационной форме для тела 1

$$\int_{s_1} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta \epsilon} ds + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^+ dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^+ dx_1 + 0.5\delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^+}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \frac{\partial \delta u_2^+}{\partial x_2} dx_1 \right) = 0 \tag{1}$$

и тела 2

$$\int_{s_2} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\delta \epsilon} ds - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{22} \delta u_2^- dx_1 - \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \delta u_1^- dx_1 + 0.5\delta_0 \left(\int_{\ell} \bar{\sigma}_{11} \frac{\partial \delta u_1^-}{\partial x_1} dx_1 + \int_{\ell} \bar{\sigma}_{12} \frac{\partial \delta u_2^-}{\partial x_1} dx_1 \right) = 0 \tag{2}$$

где s_1, s_2 – площади поперечных сечений тел 1 и 2; $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\cdot \cdot$ – операция двойного скалярного умножения (свертка тензоров); $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{12}$ – компоненты тензора средних напряжений слоя:

$$\bar{\sigma}_{21}(x_1) = \bar{\sigma}_{12}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{21}(x_1, x_2) dx_2, \quad \bar{\sigma}_{22}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{22}(x_1, x_2) dx_2, \\ \bar{\sigma}_{11}(x_1) = \frac{1}{\delta_0} \int_{-0.5\delta_0}^{0.5\delta_0} \sigma_{11}(x_1, x_2) dx_2; \quad u_k^+, u_k^- \text{ – соответственно компоненты векторов}$$

перемещений верхней и нижней границ слоя; $k = 1, 2$ здесь и далее. Постулируется жесткое сцепление между границами области 3 и областями 1, 2

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{u}(x_1, \delta_0/2); \quad \mathbf{u}^- = \mathbf{u}(x_1, -\delta_0/2); \quad x_1 \in [0, \ell]. \quad (3)$$

Уравнения (1) и (2) замкнем определяющими соотношениями Дюгамеля-Неймана в форме

$$\sigma_{ij} = \frac{E_k}{1+\nu_k} \left(\varepsilon_{ij} + \frac{\nu_k}{1-2\nu_k} \varepsilon \delta_{ij} \right) - \frac{E_k}{1-2\nu_k} \alpha_k \Delta T \delta_{ij}, \quad (4)$$

где E_k , ν_k – модуль упругости и коэффициент Пуассона k -ого тела; α_k – коэффициент температурного расширения; $\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$ – объемное расширение; δ_{ij} – символ Кронекера; $i, j = 1, 2, 3$.

Для материала слоя взаимодействия 3 определяющие соотношения считаем справедливыми для средних компонент тензоров напряжений и деформаций

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{E_3}{1+\nu_3} \left(\bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_3}{1-2\nu_3} \bar{\varepsilon} \delta_{ij} \right) - \frac{E_3}{1-2\nu_3} \alpha_3 \Delta T \delta_{ij}, \quad (5)$$

где компоненты средних деформаций и перемещений определяются следующим образом [14,15]

$$\bar{\varepsilon}_{22}(x_1) = \left(\frac{u_2^+(x_1) - u_2^-(x_1)}{\delta_0} \right), \quad \bar{\varepsilon}_{11}(x_1) = 0.5 \left(\frac{\partial u_1^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1^-(x_1)}{\partial x_1} \right), \quad (6)$$

$$\bar{\varepsilon}_{21}(x_1) = \bar{\varepsilon}_{12}(x_1) = 0.5 \left(\frac{u_1^+(x_1) - u_1^-(x_1)}{\delta_0} + 0.5 \left(\frac{\partial u_2^+(x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^-(x_1)}{\partial x_1} \right) \right), \quad (7)$$

$$\bar{u}_1 = \frac{(u_1^+(x_1) + u_1^-(x_1))}{2}, \quad \bar{u}_2 = \frac{(u_2^+(x_1) + u_2^-(x_1))}{2}. \quad (8)$$

Таким образом, решение системы (1)-(8) сводится к определению поля перемещений $\mathbf{u}(x_1, x_2)$ в телах 1 и 2 (см. рис.1).

Для упрощения задачи принимаем, что поле перемещений в телах 1 и 2, с учетом условия (5), определено следующим образом

$$u_1^{(1)}(x_1, x_2) = u_1^+(x_1) - \varphi_1(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad u_2^{(1)}(x_1, x_2) = u_2^+(x_1), \quad (9)$$

$$u_1^{(2)}(x_1, x_2) = u_1^-(x_1) - \varphi_2(x_1)(x_2 + \delta_0/2), \quad u_2^{(2)}(x_1, x_2) = u_2^-(x_1). \quad (10)$$

Входящие в представления (9), (10) параметры φ_k имеют геометрический смысл малых углов поворота материальных нормалей к плоскостям $x_2 = \pm \delta_0/2$ в телах 1 и 2. Согласно распределению (9), (10) отличные от нуля деформации в теле 1 будут определяться в виде

$$\varepsilon_{11}^{(1)} = \frac{du_1^+}{dx_1} - \varphi_1'(x_1)(x_2 - \delta_0/2), \quad \varepsilon_{12}^{(1)} = \varepsilon_{21}^{(1)} = 0.5 \left(\frac{du_2^+}{dx_1} - \varphi_1(x_1) \right), \quad (11)$$

а в теле 2

$$\varepsilon_{11}^{(2)} = \frac{du_1^-}{dx_1} - \varphi_2'(x_1)(x_2 + \delta_0/2), \quad \varepsilon_{12}^{(2)} = \varepsilon_{21}^{(2)} = 0.5 \left(\frac{du_2^-}{dx_1} - \varphi_2(x_1) \right). \quad (12)$$

Выражения (11), (12), как и теория Тимошенко [7], учитывают сдвиговые деформации и повороты нормалей в телах 1 и 2. Если принять сдвиговые

деформации нулевыми (гипотеза Кирхгоффа), то из (11) и (12) следует, что

$$\varphi_1(x_1) = \frac{du_2^+(x_1)}{dx_1}; \quad \varphi_2(x_1) = \frac{du_2^-(x_1)}{dx_1}.$$

Полагаем, что рассматриваемая пластина жестко закреплена по левому торцу

$$\mathbf{u}|_{x_1=0} = 0, \quad (13)$$

а правый край свободен от внешней нагрузки

$$\sigma_{11}^{(k)}|_{x_1=\ell} = 0, \quad \sigma_{12}^{(k)}|_{x_1=\ell} = 0. \quad (14)$$

Условие (13) с учетом (9), (10) приводит к следующим ограничениям на компоненты векторов перемещений границ слоя и функций φ_1 и φ_2

$$u_k^\pm(x_1)|_{x_1=0} = 0, \quad \varphi_k(x_1)|_{x_1=0} = 0. \quad (15)$$

Из выражений для средних перемещений слоя (8) с учётом первого условия (15) следует ограничение на средние перемещения слоя $\bar{\mathbf{u}}|_{x_1=0} = 0$. Таким образом, слой жестко заземлен по левой границе.

Из (1) и (2) с учетом представлений полей деформаций (11), (12), приходим к системе дифференциальных уравнений, описывающей взаимодействие двух тел, связанных слоем

$$\begin{cases} \frac{dM_{11}^{(1)}}{dx_1} - Q_{12}^{(1)} = 0; & \frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{21}; & \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{21}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}; \\ \frac{dM_{11}^{(2)}}{dx_1} - Q_{12}^{(2)} = 0; & \frac{dQ_{11}^{(2)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = -\bar{\sigma}_{21}; & \frac{dQ_{12}^{(2)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{21}}{dx_1} = -\bar{\sigma}_{22}; \end{cases} \quad (16)$$

с естественными граничными условиями

$$Q_{1k}^{(1)} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{1k}|_{x_1=\ell} = 0, \quad M_{11}^{(k)}|_{x_1=\ell} = 0, \quad Q_{1k}^{(2)} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{1k}|_{x_1=\ell} = 0, \quad (17)$$

где $Q_{1k}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h_1+\delta_0/2} \sigma_{1k}^{(1)} dx_2$, $Q_{1k}^{(2)}(x_1) = \int_{-h_2-\delta_0/2}^{-\delta_0/2} \sigma_{1k}^{(2)} dx_2$ – обобщенные силы;

$M_{11}^{(1)}(x_1) = \int_{\delta_0/2}^{h_1+\delta_0/2} \sigma_{11}^{(1)}(x_2 - \delta_0/2) dx_2$, $M_{11}^{(2)}(x_1) = \int_{-h_2-\delta_0/2}^{-\delta_0/2} \sigma_{11}^{(2)}(x_2 + \delta_0/2) dx_2$ – обобщенные моменты.

Исходя из определяющих соотношений (4), (5), выражений деформаций (6), (7), (11), (12), а также представления обобщенных сил и моментов, условия равновесия (16) сводятся к замкнутой системе дифференциальных уравнений относительно шести неизвестных функций: u_k^\pm , φ_k . Для их однозначного определения необходимо двенадцать граничных условий. Шесть условий дает жесткое закрепление левой границы (15), шесть условий образуют естественные граничные условия (17).

2. ПОСТРОЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

Случай №1. Двухслойная биметаллическая пластина. В данном варианте положим в (15) $\delta_0 = 0$, что соответствует сопряжению уравнений системы

условиями: $u_k = u_k^+ = u_k^-$. Из (16) получим условия равновесия в виде системы четырех дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dM_{11}^{(k)}}{dx_1} - Q_{12}^{(k)} = 0, \\ Q_{1k}^{(1)} + Q_{1k}^{(2)} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Основными неизвестными в этом случае будут четыре функции $u_k(x_1)$, $\varphi_k(x_1)$. Решение (18) с граничными условиями (15), (17) получено в следующем виде

$$u_1 = (c-d)s_1C_2x_1 - 2C_1sh(s_3x_1)(c-\mu d) + tx_1, \quad (19)$$

$$u_2 = \frac{(a+b)s_1C_2x_1^2}{2} - \frac{2(a+\mu b)C_1}{s_3}(ch(s_3x_1)-1), \quad (20)$$

$$\varphi_1 = C_2s_1x_1 - 2C_1sh(s_3x_1), \quad \varphi_2 = C_2s_1x_1 - 2C_1\mu sh(s_3x_1). \quad (21)$$

где

$$C_1 = \frac{\frac{(c-d)\Delta T}{4}\left(\frac{U_1\alpha_1}{D_1} - \frac{U_2\alpha_2}{D_2}\right) + \frac{\Delta T}{6}\left(\frac{U_1\alpha_1h_2}{D_1} + \frac{U_2\alpha_2h_1}{D_2}\right) - \frac{t}{6}(h_1+h_2)}{s_3ch(s_3\ell)\left(\frac{(2c-d)}{6}(h_1+\mu h_2) + \frac{2h_1h_2}{9}(1-\mu) + \frac{(h_1+h_2)}{3}(\mu d-c)\right)},$$

$$C_2 = \frac{\frac{U_2\alpha_2\Delta T}{2D_2}\left(\frac{2h_1}{3}-c+\mu d\right) + \frac{U_1\alpha_1\Delta T}{2D_1}\left(\frac{2\mu h_2}{3}+c-\mu d\right) - \frac{2t}{6}(h_1+\mu h_2)}{s_1\left(\frac{(2c-d)}{6}(h_1+\mu h_2) + \frac{2h_1h_2}{9}(1-\mu) + \frac{(h_1+h_2)}{3}(\mu d-c)\right)},$$

$$D_k = \frac{E_k(1-\nu_k)}{(1+\nu_k)(1-2\nu_k)}, \quad L_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)}, \quad U_k = \frac{E_k}{1-2\nu_k}, \quad c = \frac{D_1h_1^2}{2(D_1h_1+D_2h_2)},$$

$$d = \frac{D_2h_2^2}{2(D_1h_1+D_2h_2)}, \quad t = \frac{(h_1U_1\alpha_1+h_2U_2\alpha_2)\Delta T}{(D_1h_1+D_2h_2)}, \quad a = \frac{L_1h_1}{(L_1h_1+L_2h_2)}, \quad b = \frac{L_2h_2}{(L_1h_1+L_2h_2)},$$

$$z = D_1\left(\frac{h_1^2c}{2} - \frac{h_1^3}{3}\right), \quad q = D_1\frac{h_1^2d}{2}, \quad y = L_1h_1(a-1), \quad p = L_1h_1b, \quad z_1 = -D_2\frac{h_2^2c}{2},$$

$$q_1 = D_2\left(\frac{h_2^3}{3} - \frac{h_2^2d}{2}\right), \quad y_1 = L_2h_2a, \quad p_1 = L_2h_2(b-1), \quad s = \frac{q_1}{z_1}r + \frac{y_1}{z_1}, \quad s_1 = \frac{q_1}{z_1}r_1 + \frac{p_1}{z_1},$$

$$r = \frac{\frac{y}{z_1} - \frac{y_1}{z}}{\frac{q_1}{z_1} - \frac{q}{z}}, \quad r_1 = \frac{\frac{p}{z_1} - \frac{p_1}{z}}{\frac{q_1}{z_1} - \frac{q}{z}}, \quad \mu = \frac{r}{s}, \quad s_3 = \sqrt{s + \mu s_1}.$$

Рассмотрим вариант решения для случая однородного распределения по длине пластины характеристик НДС. В этом случае $\frac{dM_{11}^{(k)}}{dx_1} = 0$. Тогда из (18) следует, что $Q_{12}^{(k)} = 0$. Поэтому сдвиговые деформации отсутствуют и,

на основании выражений (11), (12), углы поворотов совпадают: $\varepsilon_{12}^{(k)}(x_1) = 0$;

$\varphi_k(x_1) = \frac{du_2(x_1)}{dx_1} = \varphi_0(x_1)$. С учётом граничных условий (17) при $\delta_0 = 0$

из системы (17) получаем первые интегралы

$$\begin{cases} M_{11}^{(1)} + M_{11}^{(2)} = 0, \\ Q_{11}^{(1)} + Q_{11}^{(2)} = 0, \end{cases} \quad (22)$$

где основными неизвестными являются компонента перемещения поверхности сопряжения материалов u_1 и функция φ_0 .

Из системы (21) получим распределение искомым функций при отсутствии в телах 1 и 2 сдвиговых деформаций ввиду однородности решения

$$\varphi_0 = \frac{6h_1h_2(h_1+h_2)(D_1U_2\alpha_2 - D_2U_1\alpha_1)\Delta Tx_1}{4(D_1h_1 + D_2h_2)(D_1h_1^3 + D_2h_2^3) - 3(D_1h_1^2 - D_2h_2^2)^2}, \quad (23)$$

$$u_2 = \frac{3h_1h_2(h_1+h_2)(D_1U_2\alpha_2 - D_2U_1\alpha_1)\Delta Tx_1^2}{4(D_1h_1 + D_2h_2)(D_1h_1^3 + D_2h_2^3) - 3(D_1h_1^2 - D_2h_2^2)^2}, \quad (24)$$

$$u_1 = \frac{\left(D_1U_1h_1^4\alpha_1 + D_2U_2h_2^4\alpha_2 + \right. \\ \left. + h_1h_2(D_1U_2\alpha_2(4h_1^2 + 3h_1h_2) + D_2U_1\alpha_1(4h_2^2 + 3h_1h_2)) \right) \Delta Tx_1}{4(D_1h_1 + D_2h_2)(D_1h_1^3 + D_2h_2^3) - 3(D_1h_1^2 - D_2h_2^2)^2}. \quad (25)$$

Из (23) найдем кривизну поверхности сопряжения материалов:

$$\varphi_0' = \frac{6h_1h_2(h_1+h_2)(D_1U_2\alpha_2 - D_2U_1\alpha_1)\Delta T}{4(D_1h_1 + D_2h_2)(D_1h_1^3 + D_2h_2^3) - 3(D_1h_1^2 - D_2h_2^2)^2}. \quad (26)$$

В отличие от формулы статьи [4] выражение (26) определяет кривизну не нейтральной, а граничной линии. Эта формула учитывает возможность искривления при $\alpha_1 = \alpha_2$, но $D_1U_2 \neq D_2U_1$. Если положить в (26) $\nu_1 = \nu_2 = 0$, то получим формулу статьи [4]

$$\varphi_0' = \frac{6h_1h_2(h_1+h_2)E_1E_2(\alpha_2 - \alpha_1)\Delta T}{4(E_1h_1 + E_2h_2)(E_1h_1^3 + E_2h_2^3) - 3(E_1h_1^2 - E_2h_2^2)^2}.$$

Приведем пример расчета перемещений и кривизны биметаллической пластины по формулам (19), (21) с учетом граничных условий (15), (17) и по формулам «чистого» изгиба (23)-(26). В качестве материала тела 1 используется алюминий со следующими характеристиками: $E_1 = 7 \cdot 10^{10}$ Па, $\nu_1 = 0.35$, $\alpha_1 = 22.8 \cdot 10^{-6}$, а материала тела 2 – сталь: $E_2 = 2 \cdot 10^{11}$ Па, $\nu_2 = 0.3$, $\alpha_2 = 11.3 \cdot 10^{-6}$. Толщину тела 1 берем равной $h_1 = 0.01$ м, а тела 2 – $h_2 = 0.007$ м. Длина биметаллической пластины – $\ell = 0.3$ м, а изменение ее температуры – $\Delta T = 50^\circ$. На рис.2 показаны графики вертикальных перемещений, рассчитанных по формулам (20) и (24). График 1 соответствует формуле (20), а кривая 2 формуле – (24). Незначительные различия в перемещениях имеют место в окрестности свободного края.

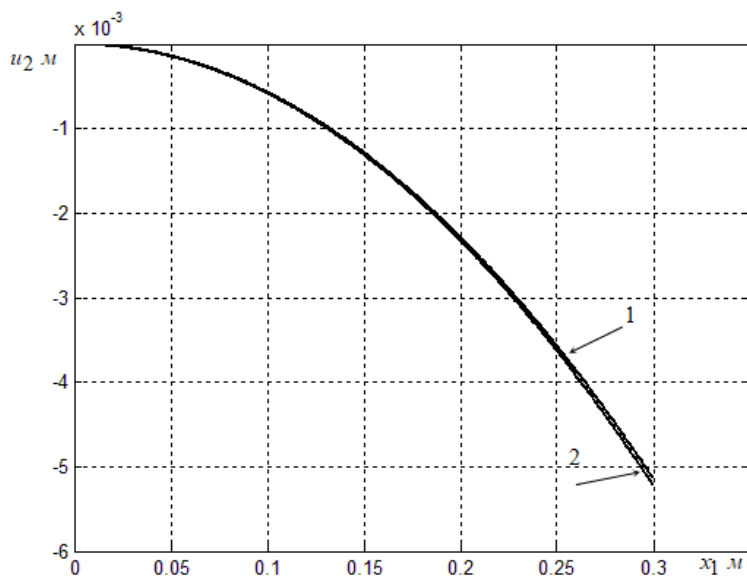


Рис.2. Распределение вертикальных перемещений поверхности сопряжения пластин.

Из формулы (20) найдем закон изменения кривизны линии сопряжения пластин

$$\frac{d^2 u_2}{dx_1^2} = (a + b)s_1 C_2 - 2(a + \mu b)C_1 s_3 \operatorname{ch}(s_3 x_1). \quad (27)$$

На рис.3 показан закон изменения кривизны (27) с учетом граничных условий.

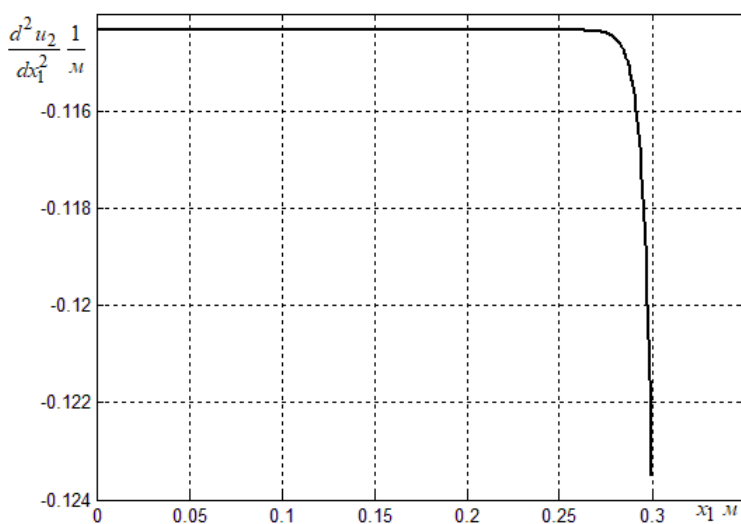


Рис.3 Распределение кривизны линии сопряжения биметаллической пластины.

Из рис.3 видно, что в отличие от «чистого» изгиба (26) кривизна не является постоянной и меняет свое значение в концевой области свободного торца пластины. Данный результат показывает, что влияние сдвиговых деформаций в сопрягаемых пластинах имеет характер краевого эффекта.

Отметим, что если положить $\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1) = 0$, что соответствует «мембранной» теории, получаем: $u_2 = 0$. Таким образом, при жестком сцеплении двух пластин с различными коэффициентами температурного расширения

при описании в рамках «мембранной» теории искривление граничной линии не отражается.

Случай №2. В данном варианте расчета полагаем в выражениях компонент векторов перемещений (9), (10) $\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_1) = 0$, а толщину адгезионного слоя считаем конечной. Из системы (16) исключим левый столбец, соответствующий отличным от нуля вариациям $\delta\varphi_k$. Такая постановка означает, что НДС принимается однородным по толщине каждого из трех слоев.

В этом случае приходим к следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dQ_{11}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{21}; & \frac{dQ_{12}^{(1)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{21}}{dx_1} = \bar{\sigma}_{22}; \\ \frac{dQ_{11}^{(2)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{11}}{dx_1} = -\bar{\sigma}_{21}; & \frac{dQ_{12}^{(2)}}{dx_1} + 0.5\delta_0 \frac{d\bar{\sigma}_{21}}{dx_1} = -\bar{\sigma}_{22}; \end{cases} \quad (28)$$

с естественными граничными условиями

$$Q_{1k}^{(1)} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{1k} \Big|_{x_1=\ell} = 0, \quad Q_{1k}^{(2)} + 0.5\delta_0 \bar{\sigma}_{1k} \Big|_{x_1=\ell} = 0. \quad (29)$$

Система дифференциальных уравнений (28) с учетом определяющих соотношений (4), (5), выражений (6), (7), (11), (12), а также представлений обобщенных сил является замкнутой системой дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $u_1^+(x_1)$, $u_2^+(x_1)$, $u_1^-(x_1)$, $u_2^-(x_1)$, каждая из которых имеет второй порядок производной включительно. Решение системы (28) в случае $L_1h_1 = L_2h_2$, $\nu_3 = 0$, при удовлетворении первых четырех граничных условий (15) и четырех условий (29) получено в следующем виде

$$\begin{aligned} u_1^+ &= \frac{b\Delta T}{(1+a)} x_1 - 2C_2 a d p_1 \text{sh}(p_1 x_1), \quad u_1^- = \frac{b\Delta T}{(1+a)} x_1 + 2C_2 d p_1 \text{sh}(p_1 x_1), \\ u_2^+ &= 0.5 \left(\alpha_3 \delta_0 \Delta T (1 - e^{px_1}) - 2C_1 \text{sh}(px_1) + 2C_2 (\text{ch}(p_1 x_1) - 1) \right), \\ u_2^- &= 0.5 \left(-\alpha_3 \delta_0 \Delta T (1 - e^{px_1}) + 2C_1 \text{sh}(px_1) + 2C_2 (\text{ch}(p_1 x_1) - 1) \right), \end{aligned} \quad (30)$$

$$u_2^- = 0.5 \left(-\alpha_3 \delta_0 \Delta T (1 - e^{px_1}) + 2C_1 \text{sh}(px_1) + 2C_2 (\text{ch}(p_1 x_1) - 1) \right), \quad (31)$$

где

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\left(\frac{b}{(1+a)} \left(D_1 h_1 + \frac{E_3 \delta_0}{2} \right) - h_1 U_1 \alpha_1 - \frac{E_3 \alpha_3 \delta_0}{2} \right) \Delta T}{\text{ch}(p_1 \ell) \left(2a \left(D_1 h_1 + \frac{E_3 \delta_0}{4} \right) - \frac{E_3 \delta_0}{2} \right) d p_1^2}, \quad a = \frac{(D_2 h_2 + \delta_0 E_3 / 2)}{(D_1 h_1 + \delta_0 E_3 / 2)}, \\ C_1 &= \frac{C_3 p_1 \text{sh}(p_1 \ell) (L_1 h_1 - L_3 (a+1) d + 0.5 L_3 \delta_0)}{p L_1 h_1 \text{ch}(p \ell)} - \frac{\alpha_3 \delta_0 \Delta T}{2 \text{ch}(p \ell)} e^{p \ell}, \quad p = 2 \sqrt{\frac{1}{\delta_0 h_1}}, \\ b &= \alpha_1 \frac{h_1 U_1}{(D_1 h_1 + \delta_0 E_3 / 2)} + \alpha_2 \frac{h_2 U_2}{(D_1 h_1 + \delta_0 E_3 / 2)} + \alpha_3 \frac{\delta_0 E_3}{(D_1 h_1 + \delta_0 E_3 / 2)}, \quad p_1 = \sqrt{\frac{L_1 h_1}{\delta_0 d_4}}, \\ d &= \left(\frac{2 L_1 h_1 + \delta_0 E_3 / 2}{E_3 (1+a)} \right), \quad d_1 = \left(\frac{2 L_2 h_2 + \delta_0 E_3 / 2}{E_3 (1+a)} \right), \quad d_2 = \left(\frac{2 L_1 h_1 + \delta_0 E_3 / 2}{E_3} \right), \quad c_1 = \frac{L_1 h_1}{2}, \end{aligned}$$

$$d_3 = \left(\frac{2L_2 h_2 + \delta_0 E_3 / 2}{E_3} \right), \quad c_2 = \frac{L_2 h_2}{2}, \quad c_3 = \frac{E_3}{\delta_0}, \quad d_4 = d \left(D_1 h_1 a - 0.5 \delta_0 \frac{E_3}{2} (1-a) \right),$$

$$d_5 = d_1 \left(D_1 h_1 a - 0.5 \delta_0 \frac{E_3}{2} (1-a) \right), \quad d_6 = \frac{L_1 h_1}{\delta_0}, \quad d_7 = \frac{L_2 h_2}{\delta_0}, \quad r = \frac{\left(\frac{d_6 - c_3}{d_4 - c_1} \right)}{\left(\frac{d_5 + c_2}{d_4 - c_1} \right)},$$

$$r_1 = \frac{\left(\frac{d_7 + c_3}{d_4 - c_1} \right)}{\left(\frac{d_5 + c_2}{d_4 - c_1} \right)}, \quad H_3 = \frac{U_3 \alpha_3 \Delta T}{c_1 \left(\frac{d_5 + c_2}{d_4 - c_1} \right)}, \quad H_4 = -\frac{d_5 E_3 \alpha_3 \Delta T}{d_4 c_1 \left(\frac{d_5 + c_2}{d_4 - c_1} \right)}, \quad s = r + \frac{c_3}{c_1}, \quad s_1 = r_1 - \frac{c_3}{c_1}.$$

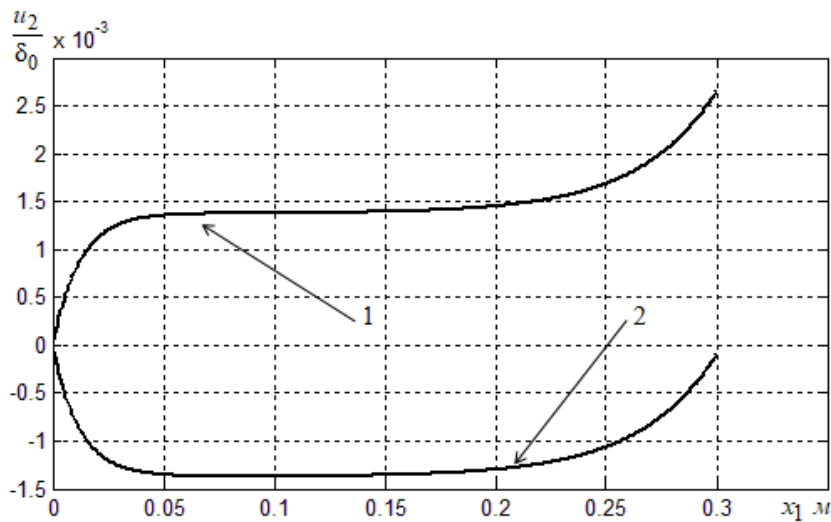


Рис.4. Распределение вертикальных перемещений границ слоя.

Рассмотрим распределение перемещений границ связующего слоя конечной толщины биметаллической пластины, состоящей из пластин длиной $\ell = 0.3$ м одной толщины $h_1 = h_2 = 0.01$ м с характеристиками алюминия. В качестве примера для пластин используем разные коэффициенты температурного расширения: $\alpha_2 = 22.8 \cdot 10^{-6}$, $\alpha_1 = \alpha_2 / 2$, $\Delta T = 50^\circ$. Для связующего слоя выбираем эпоксидную смолу со следующими характеристиками: $E_3 = 1.8 \cdot 10^9$ Па, $\alpha_3 = 55 \cdot 10^{-6}$, $h_3 = 0.002$ м. На рис.4 показаны графики вертикальных перемещений, отнесенных к толщине слоя, рассчитанных по формулам (30) и (31). График 1 соответствует формуле (30), а кривая 2 – (31). Таким образом, промежуточный мягкий слой конечной толщины приводит к вертикальным отклонениям при нагреве биметаллической пластины в случае «мембранного» описания поведения пластин в отличие от модели с их жестким сцеплением. И рисунка видно, что отклонения имеют место в концевой зоне свободного края пластины. Данное обстоятельство связано с краевым эффектом учета сдвиговых напряжений. Отметим, что для одинаковых коэффициентов температурного расширения графики на рис.4 будут симметричны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Общая вариационная постановка задачи о двух телах, связанных тонким слоем, позволяет адекватно описать НДС биметаллических пластин при однородном тепловом воздействии с учетом граничных условий.

Получено аналитическое решение задачи при нулевой толщине слоя и гипотезах типа Тимошенко для биметаллической пластины, защемленной по одному краю и свободной на другом. Показано, что данное решение в окрестности свободного края отличается от однородного решения (чистого изгиба). Установлено, что при чистом изгибе в рамках данной модели сдвиговые напряжения становятся нулевыми, а при равном нулю коэффициенте Пуассона приходим к известной формуле зависимости кривизны от температуры.

Получено аналитическое решение при конечной малой толщине слоя взаимодействия и однородном по толщине пластин распределении деформаций (мембранная теория). При несимметричной структуре тепловое воздействие приводит к односторонним неравномерным перемещениям пластин. В случае симметричной структуры учет граничных условий приводит к неравномерным симметричным перемещениям. В том и другом случаях неравномерности носят характер краевых эффектов, связанных с учетом сдвиговых деформаций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shushan Cui, Jianfeng Wan, Xunwei Zuo, Nailu Chen, Jihua Zhang, Yonghua Rong. *Three-dimensional, non-isothermal phase-field modeling of thermally and stress-induced martensitic transformations in shape memory alloys* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2017. – Vol.109. – Pp.1-11.
2. Carrera E., Brischetto S. *Coupled thermo-mechanical analysis of one-layered and multilayered plates* // Composite Structures. – 2010. – Vol.92. – No.8. – Pp.1793-1812.
3. Иржак А.В. et al. *Актюаторы на основе композитного материала с эффектом памяти формы* // Радиотехника и электроника. – 2010. – Т.55. – №7. – Pp.874-886.
4. Clyne T.W. *Residual stresses in surface coatings and their effects on interfacial debonding* // Key Engineering Materials. – 1996. – Vol.116-117. – Pp.307-330.
5. Лурье С.А., Соляев Ю.О., Нгуен Н.Х., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н. *Исследование локальных эффектов в распределении температурных напряжений на контактных границах слоистых сред* // Труды МАИ. – 2013. – №71. – 37 с.
6. Sousa R.J.A., Cardoso R.P.R., Valente R.A.F., Yoon J.-W., Gracio J.J., Jorge R.M.N. *A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness: Part I – geometrically linear applications* // Intern. J. for Numerical Methods in Engineering. – 2005. – Vol.62. – No.7. – Pp.952-977.
7. Баженов В.А., Сахаров А.С., Цыхановский В.К. *Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды* // Прикладная механика. – 2002. – Т.38. – №6. – С.24-63.
8. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластины и оболочки* – М.: Наука, 1966. – 636 с.
9. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций* – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

10. Немировский Ю.В. *Ползучесть защемленных пластин при различных структурах армирования* // Прикладная механика и техническая физика. – 2014. – №1. – С.179-186.
11. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. *Изгиб двуслойной балки с нежестким контактом между слоями* // Прикладная математика и механика. – 2011. – Т.75. – №1. – С.112-121.
12. Кургузов В.Д., Демешкин А.Г. *Экспериментальное и теоретическое исследование потери устойчивости узких тонких пластин на упругом основании при сжатии* // Прикладная механика и техническая физика. – 2016. – №3. – С.121-128.
13. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. *Обобщенная модель Тимошенко-Рейсснера для многослойной пластины* // Изв. РАН. МТТ. – 2016. – №5. – С.22-35.
14. Budhe S., Banea M.D., Barros S., Silva L.F.M. *An updated review of adhesively bonded joints in composite materials* // Intern. J. of Adhesion and Adhesives. – 2017. – Vol.72. – No.8. – Pp.30-42.
15. Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. *Stress-Strain State of Elastoplastic Bodies with Crack* // Acta Mechanica Solida Sinica. – 2015. – Vol.28. – No.4. – Pp.375-383.
16. Глаголев В.В., Маркин А.А., Фурсаев А.А. *Моделирование процесса разделения композита с адгезионным слоем* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – №2. – С.34-44.

REFERNCES

1. Shushan Cui, Jianfeng Wan, Xunwei Zuo, Nailu Chen, Jihua Zhang, Yonghua Rong. *Three-dimensional, non-isothermal phase-field modeling of thermally and stress-induced martensitic transformations in shape memory alloys*. Intern. J. of Solids and Structures, 2017, Vol.109, Pp.1-11.
2. Carrera E., Brischetto S. *Coupled thermo-mechanical analysis of one-layered and multilayered plates*. Composite Structures, 2010, Vol.92, No.8, Pp.1793-1812.
3. Irzhak A.V. et al. *Aktiuatory na osnove kompozitnogo materiala s efektom pamiaty formy [Actuators based on composite material with shape-memory effect]*. Radiotekhnika i elektronika, 2010, Vol.55, No.7, Pp.874-886.
4. Clyne T.W. *Residual stresses in surface coatings and their effects on interfacial debonding*. Key Engineering Materials, 1996, Vol.116-117, Pp.307-330.
5. Lur'e S.A., Soliaev Iu.O., Nguen N.Kh., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N. *Issledovanie lokal'nykh effektov v raspredelenii temperaturnykh napriazhenii na kontaknykh granitsakh sloistykh sred [Investigation of thermal stress local effects on the boundaries of layered structures]*. Trudy MAI, 2013, No.71, 37 p.
6. Sousa R.J.A., Cardoso R.P.R., Valente R.A.F., Yoon J.-W., Gracio J.J., Jorge R.M.N. *A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid-shell element with multiple integration points along thickness: Part I – geometrically linear applications*. Intern. J. for Numerical Methods in Engineering, 2005, Vol.62, No.7, Pp.952-977.
7. Bazhenov V.A., Sakharov A.S., Tsykhanovskii V.K. *Momentnaia skhema metoda konechnykh elementov v zadachakh nelineinoy mekhaniki sploshnoi sredy [Moment*

- scheme of the finite element method in problems of nonlinear continuum mechanics*. Prikladnaia mekhanika, 2002, Vol.38, No.6, Pp.24-63.
8. Timoshenko S.P., Voinovskii-Kriger S. *Plastiny i obolochki [Plates and shells]*. Moskva, Nauka, 1966, 636 p.
 9. Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. *Mekhanika mnogosloinykh konstruksii [Mechanics of multilayer structures]*. Moskva, Mashinostroenie, 1980, 375 p.
 10. Nemirovskii Iu.V. *Polzuchest' zashchemlennykh plastin pri razlichnykh strukturakh armirovaniia [Creep of clamped plates with different reinforcement structures]*. Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaia fizika, 2014, No.1, Pp.179-186.
 11. Morozov N.F., Tovstik P.E. *Izgib dvusloinoi balki s nezhestkim kontaktom mezhd sloiami [Bending of a two-layer beam with non-rigid contact between the layers]*. Prikladnaia matematika i mekhanika, 2011, Vol.75, No.1, Pp.112-121.
 12. Kurguzov V.D., Demeshkin A.G. *Eksperimental'noe i teoreticheskoe issledovanie poteri ustoychivosti uzkiikh tonkikh plastin na uprugom osnovanii pri szhatii [Experimental and theoretic study of the buckling of narrow thin plates on an elastic foundation under compression]*. Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaia fizika, 2016, No.3, Pp.121-128.
 13. Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. *Obobshchennaia model' Timoshenko-Reissnera dlia mnogosloinoi plastiny [Generalized Timoshenko-Reissner model for a multilayer plate]*. Izv. RAN. MTT, 2016, No.5, Pp.22-35.
 14. Budhe S., Banea M.D., Barros S., Silva L.F.M. *An updated review of adhesively bonded joints in composite materials*. Intern. J. of Adhesion and Adhesives, 2017, Vol.72, No.8, Pp.30-42.
 15. Glagolev V.V., Glagolev L.V., Markin A.A. *Stress-Strain State of Elastoplastic Bodies with Crack*. Acta Mechanica Solida Sinica, 2015, Vol.28, No.4, Pp.375-383.
 16. Glagolev V.V., Markin A.A., Fursaev A.A. *Modelirovanie protsessa razdeleniia kompozita s adgezionnym sloem [Separation process modeling of composite with adhesive layer]*. Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika, 2016, No.2, Pp.34-44.

Поступила в редакцию 28 июня 2017 года

Сведения об авторах:

Глаголев Вадим Вадимович – д.ф.-м.н., проф., зав.каф. «Вычислительная механика и математика», Тульский государственный университет, г. Тула, Россия; e-mail: Vadim@tsu.tula.ru

Маркин Алексей Александрович – д.ф.-м.н., проф., проф. каф. «Вычислительная механика и математика», Тульский государственный университет, г. Тула, Россия; e-mail: markin-nikram@yandex.ru

Пашинов Станислав Вячеславович – асп. каф. «Вычислительная механика и математика», Тульский государственный университет, г. Тула, Россия; e-mail: stanislav-pashinov@yandex.ru