УДК 539.3

О ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВАХ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ*

Харченко К.Д.

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Влияние пористости на свойства твердых тел является установленным фактором и служит предметом многочисленных исследований в силу большого теоретического и прикладного интереса. Наличие пор в образце может приводить к существенному уменьшению его прочности, из-за концентрации напряжений на границах пор, особенно если их форма далека от шарообразной. Однако расчетные модели пористых структур, не всегда должным образом учитывают эффекты существенной зависимости пористости от напряженного состояния. В данной работе представлен вариант прикладной теории пористых сред, построенный как частный случай теории сред с сохраняющимися дислокациями. Приводится математическая постановка теории пористых сред, включающая определяющие уравнения, уравнения равновесия и краевые условия. Исследуется корректная частная модель пористых сред с микроструктурой (по определению Миндлина). Для построения модели используется вариационный подход, который является эффективным инструментом моделирования сред различной сложности, позволяя получать энергетически согласованные математические модели. Физическая трактовка модели связана с уточненным описанием напряженно-деформированного состояния пористых сред, в которых объемное содержание пористости изменяется под действием приложенных внешних нагрузок. На основе приведенных результатов показано, что аналитическое решение позволяет получать достаточно точные оценки для прогноза влияния неклассических масштабных и поверхностных эффектов на эффективную жесткость и напряженное состояние пористой среды. Масштабные эффекты определяются градиентной нелокальностью, которая возникает при учете полей свободных деформаций, связанных с различными полями дефектов (или со структурными особенностями материала). В качестве примера рассматривается задача одноосного и двухосного растяжения пористой полосы.

Ключевые слова: пористые среды; масштабные эффекты; эффективные характеристики

ON THE FUNCTIONAL-GRADIENT EFFECTIVE PROPERTIES OF POROUS MEDIA

Kharchenko K.D.

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

ABSTRACT

The effect of porosity on the properties of solids is an established factor and is the subject of numerous studies because of great theoretical and applied interest. The presence of pores in the sample can lead to a significant decrease in its strength, because of the stress

* *Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ 15-01-03649а.*

concentration at the pore boundaries, especially if their shape is far from spherical. However, computational models of porous structures do not always take due account of the effects of a significant dependence of the porosity on the stress state. In this paper, variant of the applied theory of porous media is proposed, which was constructed as a special case of the theory of media with conserved dislocations. A mathematical formulation of the theory of porous media is given, which includes defining equations, equilibrium equations and boundary conditions. We study the correct particular model of porous media with a microstructure (as defined by Mindlin). Variational approach is used to build the model, which is an effective tool for modeling environments of varying complexity, allowing obtaining energy-matched mathematical models. The physical interpretation of the model is related to the refined description of the stress-strain state of porous media in which the volume content of porosity varies under the action of applied external loads. Based on the presented results, it is shown that the analytical solution allows obtaining fairly accurate estimates for predicting the effect of nonclassical scale and surface effects on the effective stiffness and stress state of a porous medium. The scale effects are determined by the gradient nonlocality, which arises when allowance is made for the fields of free deformations associated with different defect fields (or with structural features of the material). As an example, the problem of uniaxial and biaxial stretching of a porous strip is considered.

Keywords: porous media; scale effects; effective characteristics

ВВЕДЕНИЕ

Поры относятся к внутренним, объемным дефектам. Их наличие или отсутствие может существенно влиять на физические характеристики материала. Обратимое изменение объемного содержания пористости в среде описывается дилатационной линейной теорией упругости.

Теория упругих пористых материалов изучалась в работах таких авторов, как Cowin, Puri, Nunziato, Марков и др. Одной из первых работ, в которой предложена модель сред с распределенными дефектами – порами, является работа Миндлина [1]. В ней предполагается, что тензор микродисторсии имеет шаровой вид. В этом случае в среде присутствуют только свободные деформации, связанные с изменением объема (свободная дилатация). Среда имеет усложненную кинематику: неизвестными переменными являются перемещения и дилатация точек среды. Возникают неклассические напряжения, связанные с введенной дополнительной кинематической переменной модели и её градиентом. Формулировка модели дилатационной теории упругости впервые была представлена в работах [2-5].

В рассматриваемой среде под действием нагрузки будет происходить перераспределение пористости. Причем закрытие пор или образование пористости связано со знаком первых инвариантов тензоров напряжений и деформаций. С развитием дилатационной теории, можно получить уточненные прогнозы в отношении механического поведения сред, содержащих малое объемное содержание микроскопических пор-дефектов, которые даже в случае незначительного влияния на жесткость материала могут играть существенную роль в процессе накопления повреждений в задачах прочности и разрушения [6].

В рамках дилатационной теории упругости известны замкнутые аналитические решения, построенные для задачи об однородной деформации [5], задач Сен-Венана [5,7-9], задачи Кирша [10], задачи Ламе [11] и др. Выполнение принципа Сен-Венана в дилатационной теории было установлено в работе [12]. Обобщение теории на случай температурных эффектов было представлено в работе [13]. Анализ общего решения дилатационной теории и математические аналогии с моделями теплопроводности и пороупругости проводился в работах [14,15]. Формулировка балочной теории и теории оболочек с учетом свободной дилатации рассматривалась, например, в работах [16,17]. Построение аналитических решений в задачах теории трещин проводилось в работах [18,19]. Исследование контактных задач представлено в работах [20,21]. Формулировка модели дилатационной теории с учетом поверхностных эффектов, аналогичной модели поверхностной упругости Гуртина-Мурдоха была представлена впервые в работе [22]. Формулировка и анализ модели с учетом влияния поверхностной дефектности, в которой энергия деформаций поверхности среды зависит от свободной дилатации, были представлены в работах [23-25]. В этих работах модель дилатационной теории упругости была получена, как частный случай общей модели сред с сохраняющимися дислокациями.

В данной работе исследуется корректная частная модель пористых сред с микроструктурой (по определению Миндлина), устанавливается система определяющих соотношений и формулируется согласованная постановка краевой задачи. В работе [26] было установлено, что имеет место соответствие между средами с полями дефектов и градиентными средами с одной стороны и классическими средами с переменными по координатам характеристиками, т.е. функционально-градиентными классическими средами с другой. В данной статье строится модель функционально-градиентного материала, переменность свойств которой определяется пористостью, а также устанавливаются соотношения, показывающие, что дефектность, связанная с пористостью и ее эволюцией, приводит к изменению механических характеристик функционально-градиентного материала при оценки его эффективных свойств.

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СРЕД С ПОЛЯМИ ДЕФЕКТОВ КАК ИЗОТРОПНЫХ СРЕД С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Для построения моделей сред используется вариант «кинематического» вариационного принципа, в соответствии с которым по заданным кинематическим связям находится вид функционала энергии для исследуемой среды и устанавливаются силовые взаимодействия, соответствующие введенным кинематическим связям. Среды с изотропными и неизменными в отношении координат свойствами будем называть однородными, а среды с переменными свойствами – функциональными [27].

Воспользуемся вариационной постановкой теории сред Миндлина [1]. Полагаем, что имеют место расширенные соотношения Коши, определяющие тензор дисторсии d_{ij} по вектору непрерывных перемещений $d_{ij} = \partial R_i / \partial x_j = R_{i,j}$, $d_{ij} = \gamma_{ij} + (1/3)\theta\delta_{ij} - \omega_k Э_{ijk}$, γ_{ij} – компоненты тензора девиатора деформаций, θ – объемная деформация, ω_k – псевдовектор поворотов или упругих вращений, $Э_{ijk}$ – компоненты тензора Леви-Чивиты, δ_{ij} – тензор Кронекера. Полагаем, что для тензора дисторсий выполняются однородные условия Папковича $d_{in,m}Э_{nmj} = 0$.

Следовательно, по тензору дисторсии d_{ij} можно однозначно восстановить вектор перемещений, используя формулы Чезаро. Если в среде имеются поля дефектов, то наряду с тензором стесненных дисторсий деформационное состояние среды определяется также непрерывным тензором свободных дисторсий D_{ij}, который не связан с полем перемещений, т.е. отражает наличие полей дефектов. Для свободных дисторсий имеют место неоднородные условия Папковича: $D_{in,m}Э_{nmj} = \Xi_{ij} \neq 0$, где Ξ_{ij} плотность дислокаций.

Предполагается, что параметры рассматриваемой кинематической модели обобщенной дефектной среды d_{ij}, D_{ij}, являются непрерывными и дифференцируемыми и, поэтому, могут быть аргументами функционала, использующегося при вариационной формулировке модели. Запишем функционал Лагранжа для теории дефектных сред

$$L = A - \iiint U_V(d_{mn}, D_{mn}, D_{mn,l})\,dV$$
$$U_V = \frac{1}{2}(C^{11}_{ijmn} d_{ij} d_{mn} + 2C^{12}_{ijmn} d_{ij} D_{mn} + C^{22}_{ijmn} D_{ij} D_{mn} + C_{ijkmnl} D_{ij,k} D_{mn,l}). \tag{1}$$

Здесь $A = \iiint\limits_V P_i^V R_i dV + \iint\limits_F P_i^F R_i dF$ – работа внешних объемных сил P_i^V, распределенных в объеме упругого тела V, и поверхностных сил P_i^F заданных на поверхности тела F на перемещениях R_i, U_V – плотность потенциальной энергии, C^{pq}_{ijmn} – тензоры модулей упругости, среди которых C^{11}_{ijmn} – тензор модулей упругости классической, неповрежденной дефектами среды, C^{12}_{ijmn} – тензор модулей упругости, описывающий перекрестные эффекты, связанные с взаимовлиянием полей стесненных деформаций и свободных деформаций, C^{22}_{ijmn} – тензор модулей упругости условной поврежденной среды с полем свободных деформаций, $C^{pq}_{ijmn} = \lambda^{pq}\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu^{pq}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})$, $p,q = 1,2$, C_{ijkmnl} – тензор градиентных модулей, характеризующий масштабные эффекты, связанные с учетом свободных дисторсий.

Физические соотношения рассматриваемой среды с полем дефектов полностью определяются соотношениями Грина

$$\sigma_{ij} = \partial U_V / \partial d_{ij} = (C^{11}_{ijmn} d_{mn} + C^{12}_{ijmn} D_{mn}),$$
$$s_{ij} = \partial U_V / \partial D_{ij} = (C^{21}_{ijmn} d_{mn} + C^{22}_{ijmn} D_{mn}), \tag{2}$$
$$m_{ijk} = \partial U_V / \partial D_{ij,k} = C_{ijkmnl} D_{mn,l}$$

Предполагается, что выполняются условия существования потенциальности для плотности энергии U_V, т.е. тензоры модулей в соотношениях (2) удовлетворяют соотношениям симметрии (имеются ввиду переситановки соответственно по парам индексов и по тройкам индексов).

Математическая модель рассматриваемой обобщенной среды полностью определяется следующим вариационным равенством

$$\delta L = \delta A - \iiint \left[\sigma_{ij}\delta d_{ij} + s_{ij}\delta D_{ij} + m_{ijk}\delta D_{ij,k} \right] dV =$$
$$= \iiint \left[\left(\sigma_{ij,j} + P_i^V\right)\delta R_i + \left(m_{ijk,k} - s_{ij}\right)\delta D_{ij} \right] dV + \tag{3}$$
$$+ \oiint \left\{ \left[P_i^F - \sigma_{ij} n_j \right] \delta R_i - m_{ijk} n_k \delta D_{ij} \right\} dF = 0$$

Исследуем проблему эквивалентности модели среды, задаваемой вариационным равенством (3) и классической теорией упругости. Для этого, следуя работе [26], попытаемся привести вариационную постановку (3) к вариационной постановке классической упругости. Полагаем, что поля перемещений и дисторсий (стесненных и свободных) являются решениями краевой задачи, следующей из (3). Перепишем Лагранжиан (1) с учетом (2) в следующем виде

$$\begin{aligned} L &= A-\frac{1}{2}\iiint\left[\sigma_{ij}R_{i,j}+\left(s_{ij}-m_{ijk,k}\right)D_{ij}+\left(m_{ijk,k}D_{ij}+m_{ijk}D_{ij,k}\right)\right]dV= \\ &= A-\frac{1}{2}\iiint\left[\sigma_{ij}R_{i,j}+\left(s_{ij}-m_{ijk,k}\right)D_{ij}\right]dV-\frac{1}{2}\oiint\left(m_{ijk}n_k\right)D_{ij}dV \end{aligned} \qquad (4)$$

В соответствии с вариационным уравнением (3), второе слагаемое в объемном интеграле равно нулю. Соответственно, и поверхностный интеграл в (4) равен нулю в силу неклассических граничных условий в уравнении (3) $(m_{ijk}n_k)\delta D_{ij}=0$. Таким образом, потенциальная энергия в (5) приобретает классический вид

$$L = A-\frac{1}{2}\iiint\sigma_{ij}R_{i,j}dV \qquad (5)$$

Отметим, что выражение (5) является искомым условием эквивалентности. В выражении (5) поле перемещений определяется краевой задачей (3), а для тензора напряжений σ_{ij} выполняется обобщенный закон Гука (2).

Равенство (5) указывает лишь на то, что потенциальная энергия для модели (3) приобретает классический вид. Вопрос о существовании эквивалентной модели теории упругости и о виде физической модели для эквивалентной среды исследован в работе [26].

Покажем, что всегда можно определить тензорное поле податливостей так, чтобы выполнялось соотношение

$$\left(R_{i,j}+R_{j,i}\right)/2=E^{-1}_{ijpq}\sigma_{pq}, \qquad (6)$$

где $E^{-1}_{ijpq}=\left(1/3K\right)\delta_{ij}\delta_{pq}+\left(1/G\right)\left(\delta_{ip}\delta_{jq}/2+\delta_{iq}\delta_{jp}/2-\delta_{ij}\delta_{pq}/3\right)$. Учитывая (6), установлено, что плотность потенциальной энергии (5) приобретает вид плотности потенциальной энергии классической изотропной, неоднородной среды

$$L = A-\frac{1}{2}\iiint\left\{E^{-1}_{ijmn}\sigma_{ij}\sigma_{mn}\right\}dV \qquad (7)$$

Сворачивая равенство (6) с δ_{ij}, получим

$$R_{k,k}=\left(1/K\right)\sigma_{kk} \qquad (8)$$

Учитывая (8), и физические соотношения (2) предложено [26] определить переменный модуль объемного сжатия эквивалентной классической неоднородной среды через решение краевой задачи (3).

Следовательно, вводя определения $\left(C^{pq}_{kkmn}=\left(2\mu^{pq}+3\lambda^{pq}\right)\delta_{mn}/3\right)$, запишем

$$\sigma^1_{kk}=C^{11}_{kkmn}R_{m,n}+C^{12}_{kkmn}D_{mn}=\left(\left(2\mu^{11}+3\lambda^{11}\right)R_{k,k}+\left(2\mu^{12}+3\lambda^{12}\right)D_{kk}\right)/3=K^{11}R_{k,k}+K^{12}D_{kk}$$

Отсюда найдем эффективный модуль объемной деформации

$$K=\sigma_{kk}/R_{k,k}=\left(K^{11}R_{m,m}+K^{12}D_{mm}\right)/R_{k,k}=K^{11}+K^{12}\left(D_{mm}/R_{k,k}\right) \qquad (9)$$

где $K^{pq}=\left(2\mu^{pq}+3\lambda^{pq}\right)/3,\quad p,q=1,2$.

Сворачивая равенство (6) с $\left(\delta_{ia}\delta_{jb}/2+\delta_{ib}\delta_{ja}/2-\delta_{ij}\delta_{ab}/3\right)$, получим

$$\gamma_{ab} = \left(R_{a,b}/2 + R_{b,a}/2 - R_{i,i}\delta_{ab}/3 \right) = \\ = \left(1/G \right)\left(\sigma^1_{a,b}/2 + \sigma^1_{b,a}/2 - \sigma^1_{j,j}\delta_{ab}/3 \right) \tag{10}$$

Используя первые из соотношений (2), и формулы (10), получим следующее уравнение для модуля сдвига эквивалентной классической среды

$$G = \mu^{11} + \mu^{12}\sqrt{\left(\beta_{ab}\beta_{ab}\right)/\left(\gamma_{ab}\gamma_{ab}\right)} \tag{11}$$

где $\gamma_{ab} = \left(R_{a,b}/2 + R_{b,a}/2 - R_{p,p}\delta_{ab}/3 \right)$ – девиатор стесненных деформаций, $\beta_{ab} = \left(D_{ab}/2 + D_{ba}/2 - D_{rr}\delta_{ab}/3 \right)$ – девиатор свободных деформаций.

Таким образом, однозначно определены переменные по координатам модули сдвига (11) и объемного сжатия (9) эквивалентной неоднородной классической среды. Переменность их по координатам определяется полями перемещений R_i и несовместных дисторсий D^2_{ij}, которые находятся как решение краевой задачи (4). В следующих разделах рассматриваются примеры проявления эффекта функциональной градиентности в деформированных средах, связанных с наличием полей дефектов.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СРЕДЫ С ПОРИСТОСТЬЮ КАК ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМИ СВОЙСТВАМИ

В качестве частного случая общей теории сред с полями дефектов рассмотрим среду Миндлина. Лагранжиан этой теории имеет вид

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \left(C^{11}_{ijmn} D^1_{ij} D^1_{mn} + 2C^{12}_{ijmn} D^1_{ij} D^2_{mn} + \right. \\ \left. + C^{22}_{ijmn} D^2_{ij} D^2_{mn} + C^{22}_{ijkmnl} D^2_{ij,k} D^2_{mn,l} \right) dV \tag{12}$$

где $C^{pq}_{ijmn} = \lambda^{pq}\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu^{pq}\left(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}\right)$. Определения пористой среды

$$D^1_{ij} = R_{i,j};\quad D^2_{ij} = \theta\delta_{ij}/3;\quad \theta \neq R_{k,k} \tag{13}$$

Подставляем определения (13) в Лагранжиан (12)

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \left[C^{11}_{ijmn} R_{i,j} R_{n,m} + 2C^{12}_{ijmn} R_{i,j} \frac{1}{3}\theta\delta_{mn} + \right. \\ \left. + C^{22}_{ijmn} \frac{1}{3}\theta\delta_{ij} \frac{1}{3}\theta\delta_{mn} + C^{22}_{ijkmnl}\delta_{ij} \frac{1}{3}\theta_{,k}\delta_{mn} \frac{1}{3}\theta_{,l} \right] dV \tag{14}$$

Заменяем выражения для тензора модулей упругости и тензора Кронекера, $K^{12} = \frac{1}{3}\left(3\lambda^{12} + 2\mu^{12}\right)$, $K^{22} = \frac{1}{3}\left(3\lambda^{22} + 2\mu^{22}\right)$ и переписываем Лагранжиан (14)

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \left[C^{11}_{ijmn} R_{i,j} R_{n,m} + 2K^{12}\delta_{ij} R_{i,j}\theta + \right. \\ \left. + K^{22}\theta\theta + K^{22} l_\theta^{\,2}\delta_{kl}\theta_{,k}\theta_{,l} \right] dV \tag{15}$$

где l_θ – масштабный параметр. Записываем вариационное уравнение для функционала (15)

$$\delta L = \delta A - \iiint \left[\left(C^{11}_{ijmn} R_{n,m} + K^{12}\theta\delta_{ij} \right)\delta R_{i,j} + \right. \\ \left. + \left(K^{12} R_{k,k} + K^{22}\theta \right)\delta\theta + K^{22} l_\theta^{\,2}\theta_{,k}\delta\theta_{,k} \right] dV \tag{16}$$

Интегрируем по частям под знаком вариации в (16)

$$\delta L=\iiint\Big[\Big(C_{ijmn}^{11}R_{n,mj}+K^{12}\theta_{,i}+P_i^V\Big)\delta R_i+$$
$$+\Big(K^{22}l_\theta^{\,2}\theta_{,kk}-K^{22}\theta-K^{12}R_{k,k}\Big)\delta\theta\Big]dV+\tag{17}$$
$$+\iint\Big[\Big(P_i^F-\Big(C_{ijmn}^{11}R_{n,m}+K^{12}\theta\delta_{ij}\Big)n_j\Big)\delta R_i-K^{22}l_\theta^{\,2}\theta_{,k}n_k\delta\theta\Big]dF=0$$

Вариационное уравнение (17) определяет краевую задачу для сред с полями дефектов – пор. Соответственно уравнения равновесия следуют из (17) как уравнения Эйлера

$$\begin{cases}C_{ijmn}^{11}R_{n,mj}+K^{12}\theta_{,i}+P_i^V=0\\ K^{22}l_\theta^{\,2}\theta_{,kk}-K^{22}\theta-K^{12}R_{k,k}=0\end{cases}\tag{18}$$

Уравнения (18) приводятся к распадающейся системе уравнений

$$\begin{cases}\left(C_{ijmn}^{11}-\dfrac{K^{12}K^{12}}{K^{22}}\delta_{ij}\delta_{mn}\right)R_{n,mj}-C_{kjmn}^{11}l_\theta^{\,2}R_{n,mjki}+\Big(P_i^V-l_\theta^{\,2}P_{k,k}^V\Big)=0\\ \theta=-\dfrac{K^{12}}{K^{22}}R_{k,k}-\dfrac{l_\theta^{\,2}}{K^{12}}C_{kjmn}^{11}R_{n,mjk}-\dfrac{l_\theta^2}{K^{12}}P_{k.k}^V\end{cases}\tag{19}$$

Здесь

$$C_{ijmn}^{11}R_{n,mj}=(2\mu^{11}+\lambda^{11})R_{k,ki}+\mu^{11}(\Delta R_i-R_{k,ki});$$
$$C_{kjmn}^{11}R_{n,mjk}=(2\mu^{11}+\lambda^{11})\Delta R_{k,k};\tag{20}$$
$$C_{kjmn}^{11}L^2R_{n,mjki}=(2\mu^{11}+\lambda^{11})l_\theta^{\,2}\Delta R_{k,ki}$$

Учитывая (20), перепишем систему уравнений (19) в виде

$$\begin{cases}\left(2\mu^{11}+\lambda^{11}-\dfrac{K^{12}K^{12}}{K^{22}}\right)R_{k,ki}+\mu^{11}(\Delta R_i-R_{k,ki})-\\ -(2\mu^{11}+\lambda^{11})l_\theta^{\,2}\Delta R_{k,ki}+P_i^V-l_\theta^{\,2}P_{k,k}^V=0\\ \theta=-\dfrac{K^{12}}{K^{22}}R_{k,k}-\dfrac{(2\mu^{11}+\lambda^{11})}{K^{12}}l_\theta^{\,2}\Delta R_{k,k}-\dfrac{l_\theta^{\,2}}{K^{12}}P_{k,k}^V\end{cases}\tag{21}$$

Поверхностный интеграл в выражении (17) определяет «статические» и «кинематические» краевые условия.

Полагаем, что краевая задача для пористой среды решена. Получим выражения для эффективных модулей эквивалентной изотропной среды, рассматриваемой как функционально-градиентный материал, в котором свойства определяются через решение, найденное для пористой среды. Преобразуем Лагранжиан (15) к виду

$$L=A-\frac{1}{2}\iiint\Big\{\Big[C_{ijmn}^{11}R_{n,m}+K^{12}\theta\delta_{ij}\Big]R_{i,j}\Big\}dV-$$
$$-\frac{1}{2}\iiint\Big\{\Big[K^{12}R_{k,k}+K^{22}\theta-K^{22}l_\theta^{\,2}\theta_{,kk}\Big]\theta\Big\}dV-\tag{22}$$
$$-\frac{1}{2}\oiint\Big(K^{22}l_\theta^{\,2}\theta_{,k}n_k\Big)\theta dV$$

Второе слагаемое в (22) содержит левую часть четвертого уравнения Эйлера, поэтому оно равно нулю. Третье слагаемое содержит произведение левых частей альтернативных неклассических граничных условий, поэтому на всей поверхности в этом интеграле один из сомножителей обязательно равен нулю и, как следствие, равен нулю и поверхностный интеграл. Таким образом, выражение (22) сводится к виду

$$L = A - \frac{1}{2}\iiint \left(C^{11}_{ijmn} R_{n,m} + K^{12}\theta\delta_{ij} \right) R_{i,j}\, dV \tag{23}$$

Выражение в скобках имеет физический смысл классических напряжений (если переопределить смысл напряжений) и позволяет получить соотношения, определяющие тензор податливостей эффективной среды. Поэтому полагаем $\sigma_{ij} = C^{11}_{ijmn} R_{n,m} + K^{12}\theta\delta_{ij}$. Подставляя эту комбинацию в первые три уравнения Эйлера, получим уравнения классической теории упругости

$$\sigma_{ij,j} + P^V_i = 0 \tag{24}$$

Определяем тензор податливостей E^{-11}_{ijpq} с учетом соотношения (6)

$$E^{-11}_{ijpq} = \frac{1}{\tilde{K}}\delta_{ij}\delta_{pq} + \frac{1}{\tilde{G}}\left(\delta_{ip}\delta_{jq}/2 + \delta_{iq}\delta_{jp}/2 - \delta_{ij}\delta_{pq}/3 \right) \tag{25}$$

Сворачивая выражение (6) с δ_{ij} и учитывая (25), получим

$$R_{k,k} = \frac{1}{\tilde{K}}\sigma_{kk} \tag{26}$$

Выражаем из (26) $\tilde{K}$ и подставляем напряжения σ_{kk} $\left(\sigma_{ij} = C^{11}_{ijmn} R_{n,m} + K^{12}\theta\delta_{ij} \right)$. Имеем вместо (26)

$$\tilde{K} = \frac{\sigma_{kk}}{R_{k,k}} = \frac{K^{11}R_{m,m} + K^{12}\theta}{R_{k,k}} \tag{27}$$

Подставляем в (27) ранее найденное θ из (21). Получим

$$\tilde{K} = \left(K^{11} - \frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}} \right) - \left(2\mu^{11} + \lambda^{11} \right) l_\theta^{\,2} \frac{\Delta R_{k,k}}{R_{k,k}} \tag{28}$$

То есть модуль объёмного сжатия (28) является разностью постоянного по координатам поврежденного порами модуля объемного сжатия минус переменная по координатам градиентная поправка. Аналогичным образом, сворачивая с $\left(\delta_{ia}\delta_{jb}/2 + \delta_{ib}\delta_{ja}/2 - \delta_{ij}\delta_{ab}/3 \right)$, получим

$$\left(R_{a,b}/2 + R_{b,a}/2 - R_{k,k}\delta_{ab}/3 \right) = \frac{1}{\tilde{G}}\left(\sigma_{a,b}/2 + \sigma_{b,a}/2 - \sigma_{k,k}\delta_{ab}/3 \right) \tag{29}$$

Используя первые из соотношений (2) и формулу (29) можно получить выражение для переменного модуля сдвига

$$\tilde{G} = \sqrt{\frac{\left(\sigma_{p,q}/2 + \sigma_{q,p}/2 - \sigma_{i,i}\delta_{pq}/3 \right)\left(\sigma_{p,q}/2 + \sigma_{q,p}/2 - \sigma_{j,j}\delta_{pq}/3 \right)}{\left(R_{a,b}/2 + R_{b,a}/2 - R_{m,m}\delta_{ab}/3 \right)\left(R_{a,b}/2 + R_{b,a}/2 - R_{n,n}\delta_{ab}/3 \right)}} = \tag{30}$$

$$= \mu^{11}$$

Таким образом, учет соотношений закона Гука в (30) показывает, что эффективный модуль сдвига для пористой среды остается постоянным и не поврежденным.

3. ПРИМЕР 1. ОДНООСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ ПОРИСТОЙ ПОЛОСЫ

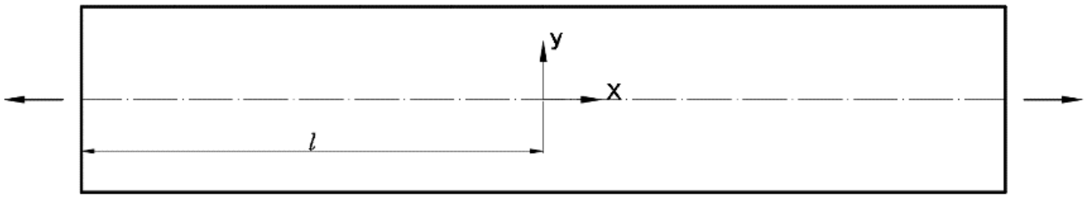

Рис.1. Полоса при одноосном растяжении.

Рассмотрим растяжение пористой полосы (рис.1), в вариационной постановке Миндлина. Уравнения (18) перепишутся в виде

$$\begin{cases} ER'' - K^{12}\theta' = 0 \\ K^{12}R' - K^{22}\theta + K^{22}l_\theta{}^2\theta'' = 0 \end{cases} \tag{31}$$

где $E = 2\mu^{11} + \lambda^{11}$. Уравнения равновесия (31) являются уравнениями Эйлера. Задача решается относительно перемещений $\Lambda_\theta^2 R'''' - R'' = 0$, где $\Lambda_\theta^2 = \dfrac{l_\theta^2 EK^{22}}{EK^{22} - K^{12}K^{12}}$. В данном случае перемещение $R(x)$ является нечетной функцией в отношении продольной координаты, поэтому в решении остается только две константы. Решение ищется в виде

$$R(x) = C_1 x + C_2 sh\left(\frac{x}{\Lambda_\theta}\right); \quad \theta = \frac{f}{1-f}C_1 + \frac{E}{K^{12}}C_2\frac{1}{\Lambda_\theta}ch\left(\frac{x}{\Lambda_\theta}\right) \tag{32}$$

Здесь принято, что $K^{12}/K^{22} = f/(1-f)$, f – объемное содержание пор (θ дислокаций [27]). Естественные граничные условия: $P^F - ER' + K^{12}\theta = 0$ и $\theta(\pm l) = 0$. Удовлетворяя им, находим константы C_1 и C_2.

Выражения (32), с учетом найденных констант примут следующий вид

$$\theta = \frac{P^F}{E(1-f)/f - K^{12}}\left(1 - \frac{ch(x/\Lambda_\theta)}{ch(l/\Lambda_\theta)}\right) \tag{33}$$

$$R = \frac{P^F}{E - K^{12}f/(1-f)}\left(x - \frac{f}{1-f}\frac{\Lambda_\theta K^{12}}{E}\frac{sh(x/\Lambda_\theta)}{ch(l/\Lambda_\theta)}\right) \tag{34}$$

Введем параметр α как меру поврежденности, причем $\alpha < 1$, тогда переменный модуль объемного сжатия с учетом $K^{12} = \alpha K^{11}$, $K^{12}/K^{22} = f/(1-f)$, (33), (34) записанный через коэффициенты Ламе

$$\tilde{K} = \left(\frac{3\lambda^{11} + 2\mu^{11}}{3}\right)\left(1 - \frac{\alpha f}{1-f}\right) - \left(\lambda^{11} + 2\mu^{11}\right)\Lambda_\theta^2\frac{\Delta R_{k,k}}{R_{k,k}} \tag{35}$$

Деградация свойств определяется «алгебраической поврежденностью» – первое слагаемое в (35) и эволюцией пор – второе слагаемое в том же выражении. В случае если $\Delta R_{k,k}/R_{k,k} \approx 0$ и $\alpha = 0$ имеем идеальную неповрежденную среду.

Для одноосного напряженного состояния $R'''/R' = B/\left(\Lambda_\theta^2(1-B)\right)$, где $B = \dfrac{f}{1-f}\dfrac{K^{12}}{E}\dfrac{ch(x/\Lambda_\theta)}{ch(l/\Lambda_\theta)}$. При таком напряженном состоянии R_k не зависит от амплитуды нагрузки, а зависит только от объемного содержания пор. Из (33) можно предположить, что $\left(f/(1-f)\right)\beta\theta$, где β – некоторый коэффициент пропорциональности, его можно отнести к K^{12}, который отражает поврежденность среды.

В качестве иллюстрации полученных результатов, покажем график распределение поврежденности по длине полосы, рис.2. Три линии соответствуют трем значениям объемного содержания пор: сплошная линия соответствует объёмному содержанию пор $f_1 = 0{,}1$; штрихпунктирная линия $f_2 = 0{,}05$, а пунктирная $f_3 = 0{,}15$.

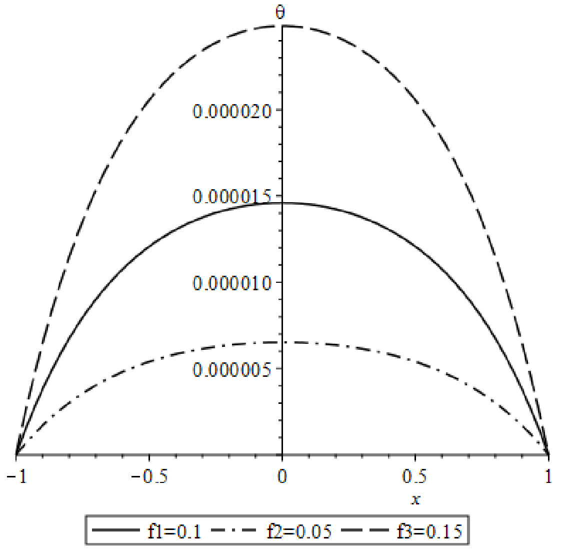

Рис.2. Распределение поврежденности в зависимости от объемного содержания пор.

На рис.3 приведен график распределения безразмерного модуля объемного сжатия $\left(\tilde{K}/K^{11}\right)$ в различных сечениях полосы в зависимости от параметра α. Первая группа линий, обозначенных серым цветом, является постоянной по координатам частью (первые две скобки выражения (35)) поврежденного порами модуля объемного сжатия, и полностью совпадает на графике друг с другом. Вторая группа линий (обозначена черным) - постоянная по координатам часть поврежденного модуля плюс переменная по координатам градиентная поправка. Коэффициенты Ламе определены для сплава АМг5, с модулем Юнга $E = 71$ ГПа и коэффициентом Пуассона $\nu = 0.32$ используя соотношения из [28]. Для примера взято: $l = 1$, $\Lambda_\theta = 0.2$, $f = 0.1$, $\mu^{11} = 26.4$ ГПа, $\lambda^{11} = 46.9$ ГПа.

На рис.4 показано распределение $\tilde{K}/K^{11}$ в зависимости от масштабного параметра Λ_θ в четырех сечениях: $x = 0.2$ – штриховая линия, $x = 0.5$ – штрихпунктирная линия, $x = 0.8$ – точечная линия, $x = 1$ – сплошная линия. Здесь: $l = 1$, $\mu^{11} = 26.4$ ГПа, $\lambda^{11} = 46.9$ ГПа, $\alpha = 0.5$, $f = 0.15$.

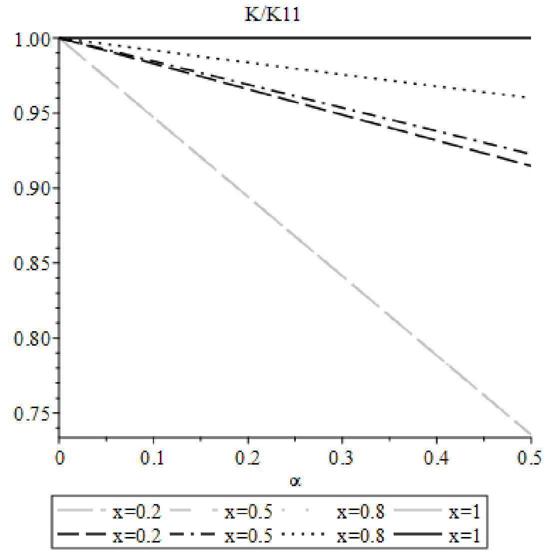

Рис.3. Распределение $\tilde{K}/K^{11}$ в зависимости от меры поврежденности.

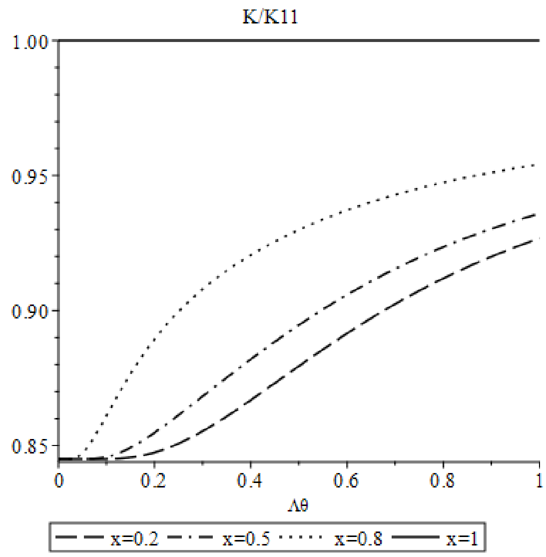

Рис.4. Распределение $\tilde{K}/K^{11}$ в зависимости от масштабного параметра.

4. ПРИМЕР 2. ДВУХОСНОЕ РАСТЯЖЕНИИ ПОРИСТОЙ ПОЛОСЫ

В данном разделе рассмотрим полосу, находящуюся под действием двухосного напряженного состояния (рис.5). Будем использовать приближенное решение как суперпозицию двух одномерных решений в направлении осей *x* и *y*. Данное предположение не совсем верное, однако, подходит для оценки параметров. В данном случае пористость и перемещения будут определяться как сумма двух слагаемых: $\theta_\Sigma = \theta_x + \theta_y$, $R_\Sigma = R_x + R_y$.

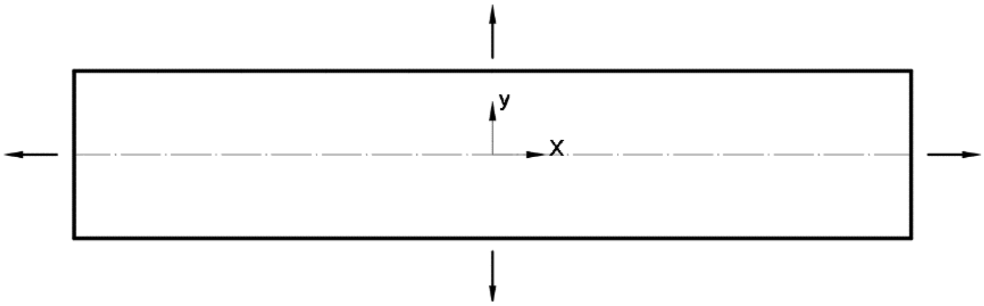

Рис.5. Полоса при двухосном растяжении.

Введем коэффициент пропорциональности нагрузок $\chi = P_x / P_y$. По аналогии с одноосным напряженным состоянием, слагаемое, определяемое в объемном модуле $\tilde{K}$ эволюцией пор

$$\frac{1}{R'_\Sigma}\left(\frac{\partial^2 R'_\Sigma}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 R'_\Sigma}{\partial y^2}\right)=\frac{\Pi}{\Lambda_\theta^2\left(EP_x\left(1+\chi\right)\left(f-1\right)+\Pi\right)},$$

где $\Pi = fK^{12}P_x\left(ch\left(\dfrac{x}{\Lambda_\theta}\right)+\chi ch\left(\dfrac{y}{\Lambda_\theta}\right)\right)$.

Параметр χ введен по аналогии с [29], где вводится параметр ξ, представляющий собой отношение среднего напряжения σ к интенсивности напряжений σ_0: $\xi = \dfrac{\sigma}{\sigma_0} = \dfrac{\sigma_x+\sigma_y}{3\sqrt{\sigma_x^2-\sigma_x\sigma_y+\sigma_y^2}}$.

Приняв $\sigma \sim P_x$, можно найти связь между параметрами χ и ξ

$$\xi = \frac{1+\chi}{3\sqrt{1-\chi+\chi^2}} \tag{36}$$

то есть это фактически одни и те же параметры.

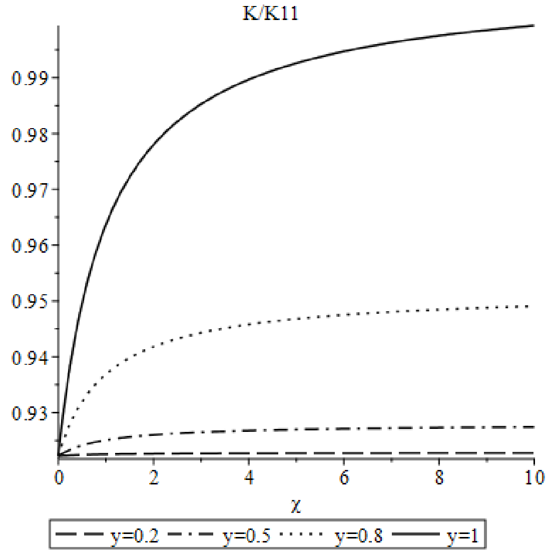

Рис.6. Распределение $\tilde{K}/K^{11}$ в сечении $x=0$, в зависимости от коэффициента пропорциональности нагрузок.

В результате рассмотрения двухпараметрического нагружения получается, что коэффициент пропорциональности нагрузок, определяется через параметр нагружения, введенный Ломакиным [29].

На рис.6 приведен график безразмерного модуля объемного сжатия $\tilde{K}\big/K^{11}$ при двухосном растяжении полосы в сечении $x=0$, в зависимости от параметра χ. График построен в четырех сечениях: $y=0.2$ – штриховая линия, $y=0.5$ – штрихпунктирная линия, $y=0.8$ – точечная линия, $y=1$ – сплошная линия. Для примера принято: $l=1$, $\Lambda_\theta=0.2$, $\alpha=0.5$, $\mu^{11}=26.4$ ГПа, $\lambda^{11}=46.9$ ГПа, $f=0.1$.

ВЫВОДЫ

В работе, на основе вариационного подхода дана корректная модель пористых сред. Используется уточненное описание НДС таких сред, в котором объемное содержание пористости изменяется под действием приложенных внешних нагрузок. Полученные аналитические соотношения позволяют по накопленной поврежденности за счет дефектов определить эффективные характеристики пористого материала.

Приведенный пример решения задачи для одноосного растяжения, позволяет сделать вывод о том, что свойства не зависят от амплитуды нагрузки при данном напряженном состоянии, а зависят только от объемного содержания пор. Пример с двухосным растяжением показывает, что свойства зависят от соотношения параметров нагружения при многопараметрическом нагружении, как это было отмечено в работе [29].

ЛИТЕРАТУРА

1. Миндлин Р.Д. *Микроструктура в линейной упругости* // Механика. – 1964. – Вып.4. – С.129-160.
2. Марков К.З. *К теории упругости сред со свободной дилатацией частиц* // Теоретическая и прикладная механика. – 1974. – Т.6. – №1. – С.93-99.
3. Nunziato J., Cowin S. *A nonlinear theory of elastic materials with voids* // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1979. – Vol.72. – No.2. – Pp.175-201.
4. Markov K.Z. *On the dilatational theory of elasticity* // ZAMM-Z.Angew. Math. Mech. – 1981. – Vol.61. – Pp.349-358.
5. Cowin S.C., Nunziato J.W. *Linear elastic materials with voids* // J. of Elasticity. – 1983. – Vol.13. – Pp.125-147.
6. Markov K.Z. *On a microstructural model of damage in solids* // Intern. J. of Engineering Science. – 1995. – Vol.33. – No.1. – Pp.139-150.
7. Dell'Isola F., Batra R.C. *Saint-Venant's problem for porous linear elastic materials* // J. of Elasticity. – 1997. – Vol.47. – No.1. – Pp.73-81.
8. Iesan D., Scalia A. *On the deformation of functionally graded porous elastic cylinder* // J. of Elasticity. – 2007. – Vol.87. – No.2. – Pp.147-159.
9. Ghiba I. *Semi-inverse solution for Saint-Venant's problem in the theory of porous elastic materials* // J. of Mechanics. – 2008. – Vol.27. – Pp.1060-1074.
10. Cowin S.C. *The stresses around a hole in a linear elastic material with voids* // Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics. – 1984. – Vol.37. – Pp.441-465.
11. Cowin S.C., Puri P. *The classical pressure vessel problems for linear elastic materials with voids* // J. of Elasticity. – 1983. – Vol.13. – No.2. – Pp.157-163.

12. Batra R.C., Yang J.S. *Saint-Venant's principle for linear elastic porous materials* // J. of Elasticity. – 1995. – Vol.39. – No.3. – Pp.265-271.
13. Iesan D. *A theory of thermoelastic materials with voids* // Acta Mechanica. – 1986. – Vol.60. – No.1-2. – Pp.67-89.
14. Chandrasekharaiah D.S., Cowin S.C. *A complete solution for a unified system of field equations of thermoelasticity and poroelasticity* // Acta Mechanica. – 1993. – Vol.99. – No.1-4. – Pp.225-233.
15. Chandrasekharaiah D.S., Cowin S.C. *Unified complete solutions for the theories of thermoelasticity and poroelasticity* // J. of Elasticity. – 1989. – Vol.21. – No.1. – Pp.121-126.
16. Birsan M. *A bending theory of porous thermoelastic plates* // J. of Thermal Stresses. – 2003. – Vol.26. – No.1. – Pp.67-90.
17. Birsan M., Altenbach H. *On the theory of porous elastic rods* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2011. – Vol.48. – No.6. – Pp.910-924.
18. Ciarletta M., Iovane G., Sumbatyan M.A. *On stress analysis for cracks in elastic materials with voids* // Intern. J. of Engineering Science. – 2003. – Vol.41. – No.20. – Pp.2447-2461.
19. Popuzin V., Pennisi M. *Fast numerical method for crack problem in the porous elastic material* // Meccanica. – 2014. – Vol.49. – No.9. – Pp.2169-2179.
20. Scalia A. *Contact problem for porous elastic strip* // Intern. J. of Engineering Science. – 2002. – Vol.40. – No.4. – Pp.401-410.
21. Pompei A., Rigano A., Sumbatyan M.A. *Contact Problem for a Rectangular Punch on the Porous Elastic Half-Space* // J. of Elasticity. – 2005. – Vol.76. – No.1. – Pp.1-19.
22. Chandrasekharaiah D.S. *Effects of surface stresses and voids on Rayleigh-waves in an elastic solid* // Intern. J. of Engineering Science. – 1987. – Vol.25. – No.2. – Pp.205-211.
23. Lurie S.A., Kalamkarov A.L. *General theory of defects in continuous media* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol.43. – No.1. – Pp.91-111.
24. Lurie S.A., Kalamkarov A.L. *General theory of continuous media with conserved dislocations* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2007. – Vol.44. – Pp.7468-7485.
25. Solyaev Y.O., Lurie S.A. *Deformation of a thin layer that is bonded to a massive substrate in the theory of thermoelastic materials with voids* // Intern. J. of Nanomechanics Science and Technology. – 2014. – Vol.5. – No.1. – Pp.33-49.
26. Ломакин Е.В., Лурье С.А., Белов П.А., Рабинский Л.Н. *Моделирование локально-функциональных свойств материала, поврежденного полями дефектов* // Доклады академии наук. – 2017. – Т.472. – №3. – С.282-285.
27. Лурье С.А., Белов П.А. *Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с двойникованием* // Современные проблемы механики гетерогенных сред. Сборник трудов. – 2005. – Т.1. – С.235-267.
28. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. *Теория упругости*. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
29. Ломакин Е.В., Мельников А.М. *Задачи плоского напряженного состояния тел с вырезами, пластические свойства которых зависят от вида напряженного состояния* // Механика твердого тела. – 2011. – №1. – С.77-89.

REFERENCES

1. Mindlin R.D. *Micro-structure in linear elasticity*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1964, Vol.16, No.1, Pp.51-78.
2. Markov K.Z. *K teorii uprugosti sred so svobodnoi dilatatsiei chastits [To the theory of elasticity of media with free particle dilatation]*. Teoreticheskaia i prikladnaia mekhanika, 1974, Vol.6, No.1, Pp.93-99.
3. Nunziato J., Cowin S. *A nonlinear theory of elastic materials with voids.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1979, Vol.72, No.2, Pp.175-201.
4. Markov K.Z. *On the dilatational theory of elasticity*. ZAMM-Z.Angew. Math. Mech., 1981, Vol.61, Pp.349-358.
5. Cowin S.C., Nunziato J.W. *Linear elastic materials with voids.* J. of Elasticity, 1983, Vol.13, Pp.125-147.
6. Markov K.Z. *On a microstructural model of damage in solids*. Intern. J. of Engineering Science, 1995, Vol.33, No.1, Pp.139-150.
7. Dell'Isola F., Batra R.C. *Saint-Venant's problem for porous linear elastic materials.* J. of Elasticity, 1997, Vol.47, No.1, Pp.73-81.
8. Iesan D., Scalia A. *On the deformation of functionally graded porous elastic cylinder.* J. of Elasticity, 2007, Vol.87, No.2, Pp.147-159.
9. Ghiba I. *Semi-inverse solution for Saint-Venant's problem in the theory of porous elastic materials.* J. of Mechanics, 2008, Vol.27, Pp.1060-1074.
10. Cowin S.C. *The stresses around a hole in a linear elastic material with voids.* Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics, 1984, Vol.37, Pp.441-465.
11. Cowin S.C., Puri P. *The classical pressure vessel problems for linear elastic materials with voids.* J. of Elasticity, 1983, Vol.13, No.2, Pp.157-163.
12. Batra R.C., Yang J.S. *Saint-Venant's principle for linear elastic porous materials.* J. of Elasticity, 1995, Vol.39, No.3, Pp.265-271.
13. Iesan D. *A theory of thermoelastic materials with voids*. Acta Mechanica, 1986, Vol.60, No.1-2, Pp.67-89.
14. Chandrasekharaiah D.S., Cowin S.C. *A complete solution for a unified system of field equations of thermoelasticity and poroelasticity*. Acta Mechanica, 1993, Vol.99, No.1-4, Pp. 225-233.
15. Chandrasekharaiah D.S., Cowin S.C. *Unified complete solutions for the theories of thermoelasticity and poroelasticity.* J. of Elasticity, 1989, Vol.21, No.1, Pp.121-126.
16. Birsan M. *A bending theory of porous thermoelastic plates.* J. of Thermal Stresses, 2003, Vol.26, No.1, Pp.67-90.
17. Birsan M., Altenbach H. *On the theory of porous elastic rods.* Intern. J. of Solids and Structures, 2011, Vol.48, No.6, Pp.910-924.
18. Ciarletta M., Iovane G., Sumbatyan M.A. *On stress analysis for cracks in elastic materials with voids.* Intern. J. of Engineering Science, 2003, Vol.41, No.20, Pp.2447-2461.
19. Popuzin V., Pennisi M. *Fast numerical method for crack problem in the porous elastic material.* Meccanica, 2014, Vol.49, No.9, Pp.2169-2179.
20. Scalia A. *Contact problem for porous elastic strip.* Intern. J. of Engineering Science, 2002, Vol.40, No.4, Pp.401-410.
21. Pompei A., Rigano A., Sumbatyan M.A. *Contact Problem for a Rectangular Punch on the Porous Elastic Half-Space.* J. of Elasticity, 2005, Vol.76, No.1, Pp.1-19.
22. Chandrasekharaiah D.S. *Effects of surface stresses and voids on Rayleigh-waves in an elastic solid.* Intern. J. of Engineering Science, 1987, Vol.25, No.2, Pp.205-211.

23. Lurie S.A., Kalamkarov A.L. *General theory of defects in continuous media.* Intern. J. of Solids and Structures, 2006, Vol.43, No.1, Pp.91-111.
24. Lurie S.A., Kalamkarov A.L. *General theory of continuous media with conserved dislocations.* Intern. J. of Solids and Structures, 2007, Vol 44, Pp.7468-7485.
25. Solyaev Y.O., Lurie S.A. *Deformation of a thin layer that is bonded to a massive substrate in the theory of thermoelastic materials with voids.* Intern. J. of Nanomechanics Science and Technology, 2014, Vol.5, No.1, Pp.33-49.
26. Lomakin E.V., Lur'e S.A., Belov P.A., Rabinskii L.N. *Modelirovanie lokal'no-funktsional'nykh svoistv materiala, povrezhdennogo poliami defektov [Modeling of local-functional properties of a material damaged by defect fields]*. Doklady akademii nauk, 2017, Vol.472, No.3, Pp.282-285.
27. Lur'e S.A., Belov P.A. *Teoriia sred s sokhraniaiushchimisia dislokatsiiami. Chastnye sluchai: sredy Kossera i Aero-Kuvshinskogo, poristye sredy, sredy s dvoinikovaniem [Theory of media with conserved dislocations. Particular cases: Cosserat and Aero-Kuvshinsky environments, porous media, twinning media]*. Sovremennye problemy mekhaniki geterogennykh sred, Sbornik trudov, 2005, Vol.1, Pp.235-267.
28. Timoshenko S.P., Gud'er Dzh. *Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]*. Moskva: Nauka, 1979, 560 p.
29. Lomakin E.V., Mel'nikov A.M. *Zadachi ploskogo napriazhennogo sostoianiia tel s vyrezami, plasticheskie svoistva kotorykh zavisiat ot vida napriazhennogo sostoianiia [The problems of a plane stressed state of bodies with cutouts whose plastic properties depend on the type of stress state]*. Mekhanika tverdogo tela, 2011, No.1, Pp.77-89.

Поступила в редакцию 05 августа 2017 года

Сведения об авторе:

Харченко Кирилл Дмитриевич – асп., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: work.air.fly@gmail.com