

УДК 539.374

## ТЕРМОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ СО СЖИМАЕМЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ\*

Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В.

*Белорусский государственный университет транспорта,  
г. Гомель, Республика Беларусь*

### АННОТАЦИЯ

Современные тенденции в строительстве и машиностроении диктуют всё более жесткие требования к прочностным характеристикам конструкций и изделий. В связи с этим широкое применение получили композиционные, в том числе трехслойные, элементы конструкций. Это вызывает необходимость создания адекватных математических моделей расчета их напряженно-деформированного состояния. Здесь рассмотрено деформирование в температурном поле трехслойного упругопластического стержня со сжимаемым наполнителем. Для описания кинематики несимметричного по толщине пакета приняты гипотезы ломаной линии: в тонких несущих слоях справедливы гипотезы Бернулли; в сжимаемом по толщине наполнителе выполняется гипотеза Тимошенко с линейной аппроксимацией перемещений по толщине слоя. Учитывается работа наполнителя в тангенциальном направлении. Физические соотношения связи напряжений и деформаций соответствуют теории малых упругопластических деформаций. Изменение температуры рассчитывалось с помощью формулы, полученной при осреднении теплофизических свойств материалов слоев по толщине стержня. Система дифференциальных уравнений равновесия получена вариационным методом. На границе предполагаются кинематические условия свободного опирания торцов стержня на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Решение краевой задачи сведено к нахождению четырех искоемых функций – прогибов и продольных перемещений срединных поверхностей несущих слоев. Аналитическое решение получено методом упругих решений в случае равномерно распределенной непрерывной и локальной нагрузок. Проведен его численный анализ. Исследовано изменение перемещений во внешнем несущем слое при изотермическом и термосиловом нагружениях, прогибы в несущих слоях в зависимости от величины пятна и места расположения локальной нагрузки. Приведены графики изменения напряжений по поперечному сечению в середине стержня. Обоснована точность полученных числовых результатов.

**Ключевые слова:** трехслойный стержень; сжимаемый наполнитель; пластичность; температурное поле; локальная нагрузка

## THERMOELASTOPLASTIC DEFORMATION OF A THREE-LAYER BAR WITH A COMPRESSIBLE FILLER

Starovoitov E.I., Leonenko D.V.

*Belarusian State University of Transport, Gomel, Belarus*

---

\* Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-49-00091-П).

## ABSTRACT

Due to the intensive use of composite structures, including three-layer elements, in building and mechanical engineering there appeared a necessity to create adequate mathematical models in order to compute their stress-strain states. The present paper considers deformation of a three-layer elastoplastic bar with a compressible filler in the temperature field. To describe kinematic properties of an asymmetric through thickness pack we have accepted the hypotheses of a broken line as follows: Bernoulli's hypothesis is true in the thin bearing layers; Timoshenko's hypothesis is true in the compressible through thickness filler with a linear approximation of displacements through the layer thickness. The filler's work is taken into account in the tangential direction. The physical stress-strain relations correspond to the theory of small elastoplastic deformations. Temperature variations were calculated by the formula obtained from averaging thermophysical properties of the materials of the layers through the bar thickness. By the variational method a system of differential equilibrium equations has been derived. The kinematic conditions of simply supported faces of the bar on the immovable in space rigid bases are presumed on the boundary. The solution of the boundary problem is reduced to the search for four functions, namely: deflections and lengthwise displacements of the medial surfaces of the bearing layers. An analytical solution has been derived by the method of elastic solutions for the case of the uniform distribution of the continuous and local loads. Its numerical analysis has been performed. Variations of displacements in the external bearing layer have been studied under the isothermal and thermal force loads and deflections in the bearing layers depending on the spot value and the local load location. Accuracy of obtained numerical results is substantiated. The diagrams are shown for stress variations crosswise in the bar middle.

**Keywords:** three-layer bar; compressible filler; plasticity; temperature field; local load

## ВВЕДЕНИЕ

Современные тенденции в строительстве и машиностроении диктуют всё новые и новые требования к конструкциям и изделиям. Необходимость повышения прочностных характеристик непрерывно возрастает, а условия эксплуатации становятся всё более жесткими. В связи с этим широкое применение в технике и строительстве получили композиционные, в том числе трехслойные, конструкции. Стержни, пластины и оболочки, имеющие слоистую структуру, при относительно малом весе способны обеспечить заданную прочность, жёсткость и противостоять ряду других физических воздействий.

На сегодняшний день создание общей теории квазистатического деформирования трехслойных элементов конструкций еще не завершено и интенсивно продолжается. В первую очередь это связано с необходимостью учета физически нелинейного деформирования материалов слоев и комплексного термосилового воздействия.

В монографиях [1-5] рассматриваются различные математические модели статического и динамического деформирования многослойных и трехслойных элементов конструкций, приведены постановки краевых задач, изложены методы их расчета. В статьях [6-8] исследовано деформирование композитных сэндвич-балок и пластин, в том числе с помощью метода усреднения упругих свойств материалов слоев. Работа [9] посвящена изучению квазистатического деформирования многослойных балок с жестким соединением между слоями. Изотермическое динамическое поведение трехслойных слоистых элементов конструкций при непрерывных и локальных нагрузках рассмотрено в работах [10-15]. Постановка и методика решения краевой задачи о циклическом

нагрузении упругопластических композитных тел в нейтронном потоке приведены в [16]. Статьи [17-20] посвящены исследованию влияния температурного поля на напряженно-деформированное состояние трехслойных упругопластических стержней и круговых пластин с несжимаемым наполнителем.

Изотермическое деформирование упругого трехслойного стержня с несжимаемым наполнителем рассмотрено в монографии [4]. Здесь приведена постановка и построено аналитическое решение краевой задачи о термосиловом деформировании *трехслойного стержня прямоугольного поперечного сечения со сжимаемым наполнителем, деформирование упругопластических материалов которого подчиняется законам деформационной теории пластичности*. Численная апробация решения проведена в случае металлополимерного стержня.

## 1. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Рассматривается несимметричный по толщине трехслойный стержень (рис.1). Для изотропных несущих слоёв приняты гипотезы Бернулли. На границах контакта используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в наполнителе учитывается его обжатие, деформации малые. Система координат  $x, y, z$  связывается со срединной плоскостью наполнителя.

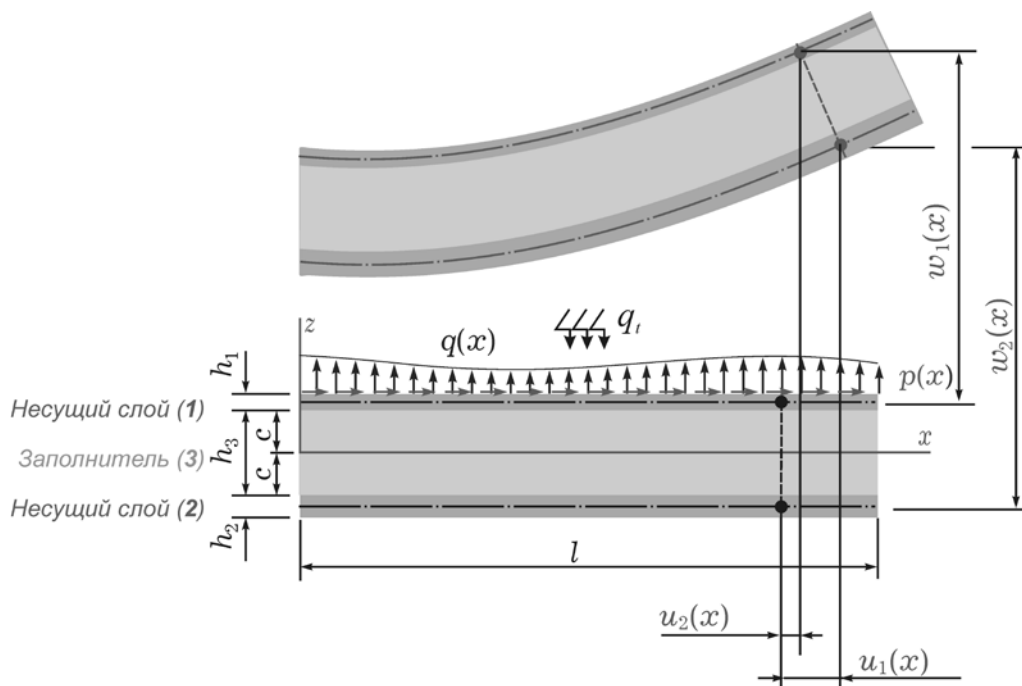


Рис.1.

На стержень действуют силовые поверхностные нагрузки  $p(x)$ ,  $q(x)$  и тепловой поток интенсивности  $q_t$ , направленный перпендикулярно несущему слою 1. На торцах стержня в первом и втором несущих слоях заданы усилия  $N_p^{(1)}$ ,  $Q_p^{(1)}$ ,  $M_p^{(1)}$ ,  $N_p^{(2)}$ ,  $Q_p^{(2)}$ ,  $M_p^{(2)}$ ; индекс  $p$  принимает значения 0 и  $l$ , указывая торец, на котором задано усилие. Через  $w_k(x)$  и  $u_k(x)$  обозначены прогибы и продольные

перемещения срединных поверхностей *несущих* слоёв,  $h_k$  – толщина  $k$ -го слоя,  $h_3 = 2c$  ( $k = 1, 2, 3$  – номер слоя),  $b_0$  – ширина стержня.

Считаем поверхность  $z = -c - h_2$  и контур стержня теплоизолированными. Это позволяет неоднородное температурное поле  $T(z)$ , отсчитываемое от некоторой начальной температуры  $T_0$ , вычислять по формуле [4]

$$T = \frac{qH}{\lambda} \left\{ \tau + \frac{1}{2} \left( s + \frac{c+h_2}{H} \right)^2 - \frac{1}{6} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \left[ \pi n \left( s + \frac{c+h_2}{H} \right) \right] e^{-n^2 \pi^2 \tau} \right\}, \quad (1)$$

$$\tau = \frac{at}{H^2}, \quad a = \frac{\sum_{k=1}^3 \lambda_{tk} h_k}{\sum_{k=1}^3 \rho_k C_k h_k}, \quad H = \sum_{k=1}^3 h_k,$$

где  $\lambda_{tk}, C_k, \rho_k$  – теплопроводность, теплоемкость и плотность материала  $k$ -го слоя.

Перемещения в слоях  $u^{(k)}(x, z)$  и  $w^{(k)}(x, z)$  можно выразить через четыре искомые функции  $w_1(x), u_1(x), w_2(x)$  и  $u_2(x)$

▪ в несущих слоях

$$u^{(1)} = u_1 - \left( z - c - \frac{h_1}{2} \right) w_{1,x},$$

$$w^{(1)} = w_1 \quad (c \leq z \leq c + h_1),$$

$$u^{(2)} = u_2 - \left( z + c + \frac{h_2}{2} \right) w_{2,x},$$

$$w^{(2)} = w_2 \quad (-c - h_2 \leq z \leq -c);$$

▪ в заполнителе

$$u^{(3)} = \left( 1 + \frac{z}{c} \right) \left( \frac{1}{2} u_1 + \frac{h_1}{4} w_{1,x} \right) + \left( 1 - \frac{z}{c} \right) \left( \frac{1}{2} u_2 - \frac{h_2}{4} w_{2,x} \right),$$

$$w^{(3)} = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{z}{c} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{z}{c} \right) w_2 \quad (-c \leq z \leq c), \quad (2)$$

где  $z$  – координата рассматриваемого волокна.

Компоненты тензора деформаций следуют из (2) и соотношений Коши [4]. Внутренние усилия в слоях вводятся соотношениями

$$N_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} dz, \quad M_x^{(k)} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)} z dz, \quad Q^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} dz,$$

$$N_z^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_z^{(3)} dz, \quad M_{xz}^{(3)} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} z dz, \quad (3)$$

где  $\sigma_x^{(k)}, \sigma_{xz}^{(3)}, \sigma_z^{(3)}$  – компоненты тензора напряжений.

Уравнения равновесия и граничные условия в усилиях для рассматриваемого стержня получены с помощью аналога функционала Лагранжа, справедливого в случае деформационной теории пластичности

$$\begin{cases} H_1 - P_{1,x} = b_0 p, \\ H_1 + P_{2,x} = 0, \\ S_{1,xx} + H_2 - T_{1,x} = b_0 \left( q + \frac{p_{,x} h_1}{2} \right), \\ S_{2,xx} - H_2 - T_{2,x} = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате, обобщенные внутренние усилия

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \frac{Q^{(3)}}{2c}, \quad H_2 = \frac{N_z^{(3)}}{2c}, \quad P_1 = \frac{N_x^{(3)}}{2} + \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(1)}, \\
 P_2 &= \frac{N_x^{(3)}}{2} - \frac{M_x^{(3)}}{2c} + N_x^{(2)}, \quad T_1 = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q^{(3)}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}, \\
 S_1 &= \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_x^{(1)} - M_x^{(1)} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)}, \\
 T_2 &= \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q^{(3)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)}}{2c}, \\
 S_2 &= -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_x^{(2)} - M_x^{(2)} + \frac{h_2}{4} N_x^{(3)} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)}.
 \end{aligned} \tag{5}$$

В дальнейшем принимаются кинематические граничные условия свободного опирания стержня по торцам на неподвижные в пространстве жесткие опоры. Тогда в концевых поперечных сечениях  $x=0, l$  ( $l$  – длина стержня) должны выполняться следующие требования

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \quad (k=1, 2). \tag{6}$$

В слоях стержня используются физические уравнения состояния, соответствующие теории малых упругопластических деформаций Ильюшина [21], с учетом температуры

$$\begin{aligned}
 s_i^{(k)} &= 2G_k (1 - \omega_k(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)) \vartheta_i^{(k)}, \quad s_{xz}^{(3)} = 2G_3 (1 - \omega_3(\varepsilon_u^{(3)}, T_k)) \vartheta_{xz}^{(3)}, \\
 \sigma^{(k)} &= 3K_k (\varepsilon^{(k)} - \alpha_{0k} T_k) \quad (i=x, z; k=1, 2, 3),
 \end{aligned} \tag{7}$$

где  $s_i^{(k)}, \vartheta_i^{(k)}, \sigma^{(k)}, \varepsilon^{(k)}$  – девиаторные и шаровые части тензоров напряжений и деформаций;  $s_{xz}^{(3)}, \vartheta_{xz}^{(3)}$  – тангенциальное напряжение и сдвиговая деформация в заполнителе;  $G_k(T_k), K_k(T_k)$  – температурно-зависимые модули упругости материала  $k$ -го слоя, вычисляемые по линейной формуле Белла [4];  $\omega^{(k)}(\varepsilon_u^{(k)}, T_k)$  – термозависимая функция пластичности Ильюшина;  $\varepsilon_u^{(k)}$  – интенсивность деформаций;  $\alpha_{0k}$  – коэффициент линейного температурного расширения;  $T_k$  – температура в  $k$ -м слое.

Используя соотношения (7), выделим в тензоре напряжений упругие (индекс « $e$ ») и нелинейные (индекс « $\omega$ ») слагаемые, которые будут включать и температурные добавки. Для рассматриваемого стержня получим

▪ в несущих слоях ( $k=1, 2$ )

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^{(k)} &= \sigma_x^{(k)e} - \sigma_x^{(k)\omega}, \quad \sigma_x^{(k)e} = 2G_k \vartheta_x^{(k)} + 3K_k \varepsilon^{(k)} = K_k^+ \varepsilon_x^{(k)}, \\
 \sigma_x^{(k)\omega} &= 2G_k \vartheta_x^{(k)} \omega_k + 3K_k \alpha_{0k} T_k = \frac{4}{3} G_k \varepsilon_x^{(k)} \omega_k + 3K_k \alpha_{0k} T_k;
 \end{aligned}$$

▪ в заполнителе

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^{(3)} &= \sigma_x^{(3)e} - \sigma_x^{(3)\omega}, \quad \sigma_x^{(3)e} = 2G_3 \vartheta_x^{(3)} + 3K_3 \varepsilon^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_x^{(3)} + K_3^- \varepsilon_z^{(3)}, \\
 \sigma_x^{(3)\omega} &= 2G_3 \vartheta_x^{(3)} \omega_3 + 3K_3 \alpha_{03} T_3 = \frac{2}{3} G_3 (2\varepsilon_x^{(3)} - \varepsilon_z^{(3)}) \omega_3 + 3K_3 \alpha_{03} T_3, \\
 \sigma_z^{(3)} &= \sigma_z^{(3)e} - \sigma_z^{(3)\omega}, \quad \sigma_z^{(3)e} = 2G_3 \vartheta_z^{(3)} + 3K_3 \varepsilon^{(3)} = K_3^+ \varepsilon_z^{(3)} + K_3^- \varepsilon_x^{(3)},
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}\sigma_z^{(3)\omega} &= 2G_3 \varepsilon_z^{(3)} \omega_3 + 3K_3 \alpha_{03} T_3 = \frac{2}{3} G_3 (2\varepsilon_z^{(3)} - \varepsilon_x^{(3)}) \omega_3 + 3K_3 \alpha_{03} T_3, \\ \sigma_{xz}^{(3)} &= \sigma_{xz}^{(3)e} - \sigma_{xz}^{(3)\omega}, \quad \sigma_{xz}^{(3)e} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)}, \\ \sigma_{xz}^{(3)\omega} &= 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega_3 = 2G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega_3, \quad K_k^+ = K_k + \frac{4}{3} G_k, \quad K_k^- = K_k - \frac{2}{3} G_k.\end{aligned}$$

Проведя подобную (8) операцию с внутренними усилиями (3), получим

$$\begin{aligned}N_x^{(k)} &= N_x^{(k)e} - N_x^{(k)\omega}, \quad N_z^{(3)} = N_z^{(3)e} - N_z^{(3)\omega}, \quad M_x^{(k)} = M_x^{(k)e} - M_x^{(k)\omega}, \quad (k=1, 2, 3) \\ M_{xz}^{(3)} &= M_{xz}^{(3)e} - M_{xz}^{(3)\omega}, \quad Q^{(3)} = Q^{(3)e} - Q^{(3)\omega}.\end{aligned}\quad (9)$$

Линейные (индекс «e») и дополнительные (индекс «ω») составляющие во внутренних усилиях (9) вычисляются по следующим формулам

▪ в несущих слоях

$$\begin{aligned}N_x^{(k)e} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)e} dz = b_0 \int_{h_k} K_k^+ \varepsilon_x^{(k)} dz, \quad M_x^{(k)e} = b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)e} z dz = b_0 \int_{h_k} K_k^+ \varepsilon_x^{(k)} z dz, \\ N_x^{(k)\omega} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)\omega} dz = \frac{4}{3} b_0 \int_{h_k} G_k \varepsilon_x^{(k)} \omega_k dz + 3b_0 \int_{h_k} K_k \alpha_{0k} T_k dz, \\ M_x^{(k)\omega} &= b_0 \int_{h_k} \sigma_x^{(k)\omega} z dz = \frac{4}{3} b_0 \int_{h_k} G_k \varepsilon_x^{(k)} \omega_k z dz + 3b_0 \int_{h_k} K_k \alpha_{0k} T_k z dz;\end{aligned}$$

▪ в заполнителе

$$\begin{aligned}N_x^{(3)e} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_x^{(3)e} dz = b_0 \int_{h_3} (K_3^+ \varepsilon_x^{(3)} + K_3^- \varepsilon_z^{(3)}) dz, \\ N_z^{(3)e} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_z^{(3)e} dz = b_0 \int_{h_3} (K_3^+ \varepsilon_z^{(3)} + K_3^- \varepsilon_x^{(3)}) dz, \\ N_x^{(3)\omega} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_x^{(3)\omega} dz = \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_x^{(3)} - \varepsilon_z^{(3)}) \omega_3 dz + 3b_0 \int_{h_3} K_3 \alpha_{03} T_3 dz, \\ N_z^{(3)\omega} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_z^{(3)\omega} dz = \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_z^{(3)} - \varepsilon_x^{(3)}) \omega_3 dz + 3b_0 \int_{h_3} K_3 \alpha_{03} T_3 dz, \\ M_x^{(3)e} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_x^{(3)e} z dz = b_0 \int_{h_3} (K_3^+ \varepsilon_x^{(3)} + K_3^- \varepsilon_z^{(3)}) z dz, \\ M_x^{(3)\omega} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_x^{(3)\omega} z dz = \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_x^{(3)} - \varepsilon_z^{(3)}) \omega_3 z dz + 3b_0 \int_{h_3} K_3 \alpha_{03} T_3 z dz, \\ Q^{(3)e} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)e} dz = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} dz, \quad Q^{(3)\omega} = b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega} dz = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega_3 dz, \\ M_{xz}^{(3)e} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)e} z dz = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} z dz, \\ M_{xz}^{(3)\omega} &= b_0 \int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)\omega} z dz = 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)} \omega_3 z dz.\end{aligned}\quad (10)$$

В усилиях  $Q^{(3)\omega}$ ,  $M_{xz}^{(3)\omega}$  температурные слагаемые отсутствуют.

Обобщенные усилия, введенные в (5), также разбиваются на линейные и нелинейные составляющие

$$H_1 = H_1^e - H_1^\omega, \quad H_1^e = \frac{2Q^{(3)e}}{c}, \quad H_1^\omega = \frac{2Q^{(3)\omega}}{c},$$

$$\begin{aligned}
 H_2 &= H_2^e - H_2^\omega, \quad H_2^e = \frac{N_z^{(3)e}}{2c}, \quad H_2^\omega = \frac{N_z^{(3)\omega}}{2c}, \\
 T_1 &= T_1^e - T_1^\omega, \quad T_1^e = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q^{(3)e}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)e}}{2c}, \quad T_1^\omega = \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{Q^{(3)\omega}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)\omega}}{2c}, \\
 T_2 &= T_2^e - T_2^\omega, \quad T_2^e = \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q^{(3)e}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)e}}{2c}, \quad T_2^\omega = \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{Q^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)\omega}}{2c}, \\
 S_1 &= S_1^e - S_1^\omega, \quad S_1^e = \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_x^{(1)0} - M_x^{(1)0} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)0} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)0}, \\
 S_1^\omega &= \left(c + \frac{h_1}{2}\right) N_x^{(1)\omega} - M_x^{(1)\omega} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)\omega} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)\omega}, \\
 S_2 &= S_2^e - S_2^\omega, \quad S_2^e = -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_x^{(2)e} - M_x^{(2)e} - \frac{h_2}{4} N_x^{(3)e} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)e}, \\
 S_2^\omega &= -\left(c + \frac{h_2}{2}\right) N_x^{(2)\omega} - M_x^{(2)\omega} - \frac{h_2}{4} N_x^{(3)\omega} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)\omega}, \\
 P_1 &= P_1^e - P_1^\omega, \quad P_1^e = \frac{N_x^{(3)e}}{2} + \frac{M_x^{(3)e}}{2c} + N_x^{(1)e}, \\
 P_1^\omega &= \frac{N_x^{(3)\omega}}{2} + \frac{M_x^{(3)\omega}}{2c} + N_x^{(1)\omega}, \quad P_2 = P_2^e - P_2^\omega, \\
 P_2^e &= \frac{N_x^{(3)e}}{2} - \frac{M_x^{(3)e}}{2c} + N_x^{(2)e}, \quad P_2^\omega = \frac{N_x^{(3)\omega}}{2} - \frac{M_x^{(3)\omega}}{2c} + N_x^{(2)\omega}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Входящие в (11) линейные (индекс «e») и дополнительные (индекс «ω») слагаемые вычисляются через деформации с помощью формул (8). Подставим в полученные соотношения выражения деформаций через искомые перемещения, и отправим их в (4). В результате получим систему нелинейных дифференциальных уравнений в перемещениях, описывающую деформирование упругопластического трехслойного стержня в температурном поле. Для ее решения применяется метод упругих решений, что позволяет записать ее в следующем итерационном виде

$$\begin{aligned}
 a_1 u_1^n - a_1 u_2^n - a_4 u_{1,xx}^n - a_5 u_{2,xx}^n + a_2 w_{1,x}^n + a_3 w_{2,x}^n - 2a_6 w_{1,xxx}^n + a_7 w_{2,xxx}^n &= p + p_\omega^{(n-1)}, \\
 -a_1 u_1^n + a_1 u_2^n - a_5 u_{1,xx}^n - a_9 u_{2,xx}^n - a_{10} w_{1,x}^n - a_{17} w_{2,x}^n - a_6 w_{1,xxx}^n + 2a_7 w_{2,xxx}^n &= h_\omega^{(n-1)}, \\
 -a_2 u_{1,x}^n + a_{10} u_{2,x}^n + 2a_6 u_{1,xxx}^n + a_6 u_{2,xxx}^n + a_{11} w_{1,xx}^n - a_{12} w_{2,xx}^n + \\
 + a_{15} w_{1,xxx}^n - a_{16} w_{2,xxx}^n + a_8 w_1^n - a_8 w_2^n &= q + q_\omega^{(n-1)}, \\
 -a_3 u_{1,x}^n + a_{17} u_{2,x}^n - a_7 u_{1,xxx}^n - 2a_7 u_{2,xxx}^n - a_{12} w_{1,xx}^n + a_{14} w_{2,xx}^n - \\
 -a_{16} w_{1,xxx}^n + a_{13} w_{2,xxx}^n - a_8 w_1^n + a_8 w_2^n &= g_\omega^{(n-1)},
 \end{aligned} \tag{12}$$

где температурные добавки  $q_t$  и коэффициенты  $a_1, \dots, a_{17}$  определяются с учетом температурной зависимости параметров упругости материалов по толщине пакета

$$\begin{aligned}
 q_t &= -\frac{H_2^t}{b_0} = -\frac{N_z^{(3)t}}{2cb_0}, \quad a_1 = \frac{L_0(G_3)}{4c^2}, \\
 a_2 &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} + \frac{L_1(G_3)}{4c^2} - \frac{L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_3 &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} - \frac{L_1(G_3)}{4c^2} + \frac{L_0(K_3^-)}{4c} + \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2}, \\
a_4 &= L_0(K_1^+) + \frac{L_1(K_3^+)}{2c} + \frac{L_0(K_3^+)}{4} + \frac{L_2(K_3^+)}{4c^2}, \quad a_5 = \frac{L_0(K_3^+)}{4} - \frac{L_2(K_3^+)}{4c^2}, \\
a_6 &= \frac{L_1(K_1^+)}{2} - \frac{L_0(K_1^+)}{2} \left(c + \frac{h_1}{2}\right) + \frac{h_1 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_1 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_1 L_2(K_3^+)}{16c^2}, \\
a_7 &= \frac{h_2}{8c^2} (c^2 L_0(K_3^+) - L_2(K_3^+)), \quad a_8 = \frac{L_0(K_3^+)}{4c^2}, \\
a_9 &= L_0(K_2^+) - \frac{L_1(K_3^+)}{2c} + \frac{L_0(K_3^+)}{4} + \frac{L_2(K_3^+)}{4c^2}, \\
a_{10} &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} + \frac{L_1(G_3)}{4c^2} + \frac{L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2}, \\
a_{11} &= \frac{h_1 L_0(K_3^-)}{4c} + \frac{h_1 L_1(K_3^-)}{4c^2} - \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4} - \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \frac{L_1(G_3)}{2c} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2}, \\
a_{12} &= \left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2} + \\
&\quad + \frac{L_1(K_3^-)}{8c^2} (h_1 - h_2) + \frac{L_0(K_3^-)}{8c} (h_1 + h_2) - \frac{L_1(G_3)}{8c^2} (h_1 - h_2), \\
a_{13} &= L_2(K_2^+) + L_1(K_2^+) \left(c + \frac{h_2}{2}\right) - \frac{h_2^2 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_2^2 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_2^2 L_2(K_3^+)}{16c^2}, \\
a_{14} &= \frac{h_2 L_0(K_3^-)}{4c} - \frac{h_2 L_1(K_3^-)}{4c^2} - \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4} + \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{L_1(G_3)}{2c} - \frac{L_2(G_3)}{4c^2}, \\
a_{15} &= L_2(K_1^+) - L_1(K_1^+) \left(c + \frac{h_1}{2}\right) + \frac{h_1^2 L_1(K_3^+)}{8c} + \frac{h_1^2 L_0(K_3^+)}{16} + \frac{h_1^2 L_2(K_3^+)}{16c^2}, \\
a_{16} &= \frac{h_1 h_2}{16c^2} (c^2 L_0(K_3^+) - L_2(K_3^+)), \\
a_{17} &= \left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) \frac{L_0(G_3)}{4c} - \frac{L_1(G_3)}{4c^2} - \frac{L_0(K_3^-)}{4c} + \frac{L_1(K_3^-)}{4c^2}, \\
L_n(f_k(z)) &\equiv \int_{h_k} f_k(z) z^n dz \quad (n = 0, 1, 2).
\end{aligned}$$

Здесь  $n$  – номер линейного приближения; в дополнительных нагрузках  $p_\omega^{(n-1)}$ ,  $h_\omega^{(n-1)}$ ,  $q_\omega^{(n-1)}$ ,  $g_\omega^{(n-1)}$  на первом шаге приближения нелинейные слагаемые принимаются равными нулю ( $\omega_k^{(1)} = 0$ ), а в дальнейшем вычисляются по результатам предыдущей итерации

$$\begin{aligned}
p_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} (H_1^{\omega(n-1)} - P_1^{\omega(n-1)},_x), \quad h_\omega^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} (H_1^{\omega(n-1)} + P_2^{\omega(n-1)},_x), \\
q_\omega^{(n-1)} &= \frac{1}{b_0} (S_1^{\omega(n-1)},_{xx} + H_2^{\omega(n-1)} - T_1^{\omega(n-1)},_x), \tag{13}
\end{aligned}$$



$$g_{\omega}^{(n-1)} = \frac{1}{b_0} \left( S_2^{\omega(n-1)} \varepsilon_{xx} - H_2^{\omega(n-1)} - T_2^{\omega(n-1)} \varepsilon_x \right),$$

где

$$\begin{aligned} H_1^{\omega(n-1)} &= \frac{2Q^{(3)\omega(n-1)}}{c}, \quad H_2^{\omega(n-1)} = \frac{N_z^{(3)\omega(n-1)}}{2c}, \\ T_1^{\omega(n-1)} &= \left( 1 + \frac{h_1}{2c} \right) \frac{Q^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}, \\ T_2^{\omega(n-1)} &= \left( 1 + \frac{h_2}{2c} \right) \frac{Q^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_{xz}^{(3)\omega(n-1)}}{2c}, \\ S_1^{\omega(n-1)} &= \left( c + \frac{h_1}{2} \right) N_x^{(1)\omega(n-1)} - M_x^{(1)\omega(n-1)} + \frac{h_1}{4} N_x^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_1}{4c} M_x^{(3)\omega(n-1)}, \\ S_2^{\omega(n-1)} &= - \left( c + \frac{h_2}{2} \right) N_x^{(2)\omega(n-1)} - M_x^{(2)\omega(n-1)} - \frac{h_2}{4} N_x^{(3)\omega(n-1)} + \frac{h_2}{4c} M_x^{(3)\omega(n-1)}, \\ P_1^{\omega(n-1)} &= \frac{N_x^{(3)\omega(n-1)}}{2} + \frac{M_x^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_x^{(1)\omega(n-1)}, \\ P_2^{\omega(n-1)} &= \frac{N_x^{(3)\omega(n-1)}}{2} - \frac{M_x^{(3)\omega(n-1)}}{2c} + N_x^{(2)\omega(n-1)}, \\ N_x^{(k)\omega(n-1)} &= \frac{4}{3} b_0 \int_{h_k} G_k \varepsilon_x^{(k)(n-1)} \omega_k^{(n-1)} dz + 3b_0 \int_{h_k} K_k \alpha_{0k} T_k dz, \\ M_x^{(k)\omega(n-1)} &= \frac{4}{3} b_0 \int_{h_k} G_k \varepsilon_x^{(k)(n-1)} \omega_k^{(n-1)} z dz + 3b_0 \int_{h_k} K_k \alpha_{0k} T_k z dz, \\ N_x^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_x^{(3)(n-1)} - \varepsilon_z^{(3)(n-1)}) \omega_3^{(n-1)} dz + 3b_0 \int_{h_3} K_3 \alpha_{03} T_3 dz, \\ N_z^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_z^{(3)(n-1)} - \varepsilon_x^{(3)(n-1)}) \omega_3^{(n-1)} dz + 3b_0 \int_{h_3} K_3 \alpha_{03} T_3 dz, \\ M_x^{(3)\omega(n-1)} &= \frac{2}{3} b_0 \int_{h_3} G_3 (2\varepsilon_x^{(3)(n-1)} - \varepsilon_z^{(3)(n-1)}) \omega_3^{(n-1)} z dz + 3b_0 \int_{h_3} K_3 \alpha_{03} T_3 z dz, \\ Q^{(3)\omega(n-1)} &= 2b_0 \int_{h_3} G_3 \varepsilon_{xz}^{(3)(n-1)} \omega_3^{(n-1)} dz \quad (k = 1, 2), \quad \omega_k^{(n)} \equiv \omega_k(\varepsilon_u^{(k)(n-1)}, T_k). \end{aligned}$$

Применение сформулированного метода термоупругих решений позволяет на каждом шаге приближения нелинейную краевую задачу об термоупругопластическом изгибе рассматриваемого стержня сводить к соответствующей линейной задаче термоупругости (12) с дополнительными нагрузками (13). Первым приближением будет служить аналитическое либо численное решения задачи термоупругости для рассматриваемого стержня.

Граничные кинематические условия (6) должны выполняться на каждом шаге итерации

$$w_k^n = u_k^n, \varepsilon_x = w_k^n, \varepsilon_{xx} = 0. \tag{14}$$

## 2. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Решение системы дифференциальных уравнений (12) принимается в виде разложения в тригонометрические ряды, которые автоматически удовлетворяют граничным условиям (14)

$$\begin{aligned} u_1^n &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}^n \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & u_2^n &= \sum_{m=1}^{\infty} U_{2m}^n \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \\ w_1^n &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{1m}^n \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & w_2^n &= \sum_{m=1}^{\infty} W_{2m}^n \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), \end{aligned} \quad (15)$$

где  $U_{1m}^n, U_{2m}^n, W_{1m}^n, W_{2m}^n$  – неизвестные амплитуды перемещений.

Поперечная нагрузка и дополнительные усилия в слоях стержня также представляются в виде разложений в тригонометрические ряды

$$\begin{aligned} q &= \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & q_m &= \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx, \\ p &= \sum_{m=1}^{\infty} p_m \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & p_m &= \frac{2}{l} \int_0^l p(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx, \\ q_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} q_{\omega m}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & q_{\omega m}^{n-1} &= \frac{2}{l} \int_0^l q_{\omega}^{n-1}(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx, \\ g_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} g_{\omega m}^{n-1} \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & g_{\omega m}^{n-1} &= \frac{2}{l} \int_0^l g_{\omega}^{n-1}(x) \sin\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx, \\ h_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} h_{\omega m}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & h_{\omega m}^{n-1} &= \frac{2}{l} \int_0^l h_{\omega}^{n-1}(x) \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx, \\ p_{\omega}^{n-1} &= \sum_{m=1}^{\infty} p_{\omega m}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right), & p_{\omega m}^{n-1} &= \frac{2}{l} \int_0^l p_{\omega}^{n-1}(x) \cos\left(\frac{\pi mx}{l}\right) dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Пусть на рассматриваемый стержень действует поперечная поверхностная нагрузка  $q(x)$ , равномерно распределенная в интервале  $a \leq x \leq b$ . Ее аналитический вид и коэффициенты разложения в ряд (16) будут

$$q(x) = q_0 (H_0(b-x) - H_0(a-x)), \quad q_m = -\frac{2q_0}{\pi m} \left( \cos \frac{\pi mb}{l} - \cos \frac{\pi ma}{l} \right), \quad (17)$$

где  $H_0(x)$  – функция Хевисайда,  $q_0$  – интенсивность нагрузки.

После подстановки перемещений (15), дополнительных усилий (16) и коэффициентов (17) в уравнения равновесия (12) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения искомых амплитуд перемещений  $U_{1m}^n$ ,

$$\begin{aligned} &U_{2m}^n, W_{1m}^n, W_{2m}^n \\ &\begin{cases} b_1 U_{1m}^n + b_2 U_{2m}^n + b_3 W_{1m}^n + b_4 W_{2m}^n = p_m + p_{\omega m}^{n-1}, \\ b_2 U_{1m}^n + b_5 U_{2m}^n + b_6 W_{1m}^n - b_7 W_{2m}^n = h_{\omega m}^{n-1}, \\ b_3 U_{1m}^n + b_6 U_{2m}^n + b_8 W_{1m}^n + b_9 W_{2m}^n = q_m + q_{\omega m}^{n-1}, \\ b_4 U_{1m}^n - b_7 U_{2m}^n + b_9 W_{1m}^n + b_{10} W_{2m}^n = g_{\omega m}^{n-1}, \end{cases} \end{aligned} \quad (18)$$

где коэффициенты  $b_i$  зависят от параметра  $m$  и от температуры через коэффициенты  $a_n$ , определенные в (12)

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_1 + a_4 \left( \frac{\pi m}{l} \right)^2; & b_2 &= -a_1 + a_5 \left( \frac{\pi m}{l} \right)^2; & b_3 &= a_2 \frac{\pi m}{l} + 2a_6 \left( \frac{\pi m}{l} \right)^3; \\
b_4 &= a_3 \frac{\pi m}{l} - a_7 \left( \frac{\pi m}{l} \right)^3; & b_5 &= a_1 + a_9 \left( \frac{\pi m}{l} \right)^2; & b_6 &= -a_{10} \frac{\pi m}{l} + a_6 \left( \frac{\pi m}{l} \right)^3; \\
b_7 &= a_{17} \frac{\pi m}{l} + 2a_7 \left( \frac{\pi m}{l} \right)^3; & b_8 &= -a_{11} \left( \frac{\pi m}{l} \right)^2 + a_{15} \left( \frac{\pi m}{l} \right)^4 + a_8; \\
b_9 &= a_{12} \left( \frac{\pi m}{l} \right)^2 - a_{16} \left( \frac{\pi m}{l} \right)^4 - a_8; & b_{10} &= -a_{14} \left( \frac{\pi m}{l} \right)^2 + a_{13} \left( \frac{\pi m}{l} \right)^4 + a_8.
\end{aligned}$$

Решение системы (18) можно выписать в определителях, либо решать численно. Далее по формулам (15) вычисляются искомые функции. Перемещения в несущих слоях и заполнителе следуют из соотношений (2), деформации – из соотношений Коши, напряжения – из (7).

Таким образом, формулы (15) с учетом (16), (18) дают в итерациях аналитическое решение задачи о деформировании трехслойного упругопластического стержня со сжимаемым заполнителем в температурном поле.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численные исследования проведены для трехслойного стержня, слои которого набраны из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, механические и теплофизические параметры которых приведены в [4]. Относительные толщины слоев  $h_1 = 0,04$ ,  $h_2 = 0,02$ ,  $h_3 = 0,18$ . Теплота, ушедшая на нагревание внешнего металлического слоя, не учитывалась в силу его тонкости и малой теплоемкости. Температуры несущих слоев принимались равными температуре заполнителя в местах их склейки:  $T^{(1)} = T^{(3)}(c, t)$ ,  $T^{(2)} = T^{(3)}(-c, t)$ . Температурное поле в заполнителе рассчитывалось по формуле (1), при  $h_1 = 0$ ,  $q_t = 5000 \text{ Дж} / (\text{м}^2 \cdot \text{с})$  в момент времени  $t = 60$  мин. Расчетная на поверхности стержня температура достигала 540 К. Интенсивность равномерно распределенной нагрузки  $q_0 = -5 \text{ МПа}$  ( $p = 0$ ).

При суммировании рядов (15) удерживались 100 членов, хотя отличие результата от суммы первых восьми слагаемых не превышало 0,1%. В методе упругих решений достаточно было 5 итераций, т.к. отличие от значений перемещений на последующем шаге было менее 0,2%.

На рис.2 показано изменение вдоль оси стержня:  $a$  – прогиба в первом слое,  $b$  – сдвига в заполнителе при нагрузке, равномерно распределенной по всей внешней поверхности слоя 1: 1 – упругий стержень, 2 – упругопластический, 3 – термоупругий, 4 – термоупругопластический. Температурное воздействие увеличивает упругие перемещения на 12-15%. С учетом нелинейности эта разница достигает 26-30%, что обусловлено влиянием температуры на механические свойства материалов.

Пусть на упругопластический стержень в температурном поле действует локальная поперечная поверхностная нагрузка (17), равномерно распределенная в интервале  $a \leq x \leq b$ . На рис.3,4 показано изменение прогибов первого слоя

в поперечном сечении стержня ( $x=0,5$ ) в зависимости от координат краев интервала нагрузки: 1 – упругий, 2 – термоупругий, 3 – термоупругопластический.

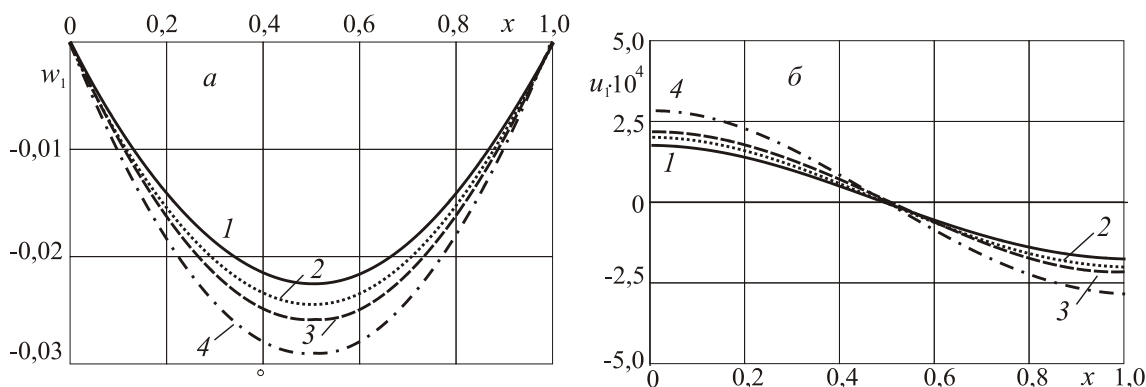


Рис.2.

Рис.3 иллюстрирует изменение прогибов вдоль оси стержня в зависимости от длины интервала нагрузки  $b$ . Максимум, как и ранее, наблюдается при нагрузке, распределенной по всему стержню ( $b=1$ ). Температурная составляющая прогиба – 16%, нелинейность добавляет к максимальному термоупругому прогибу 12%.

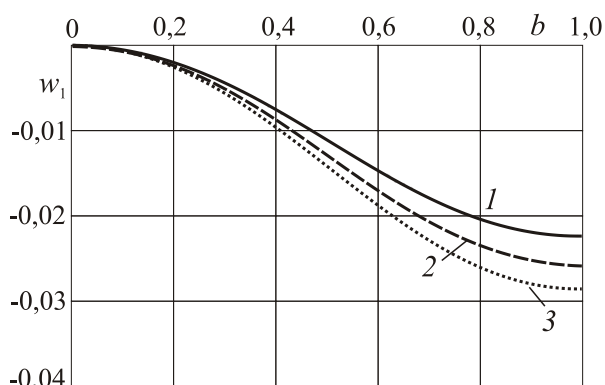


Рис.3.

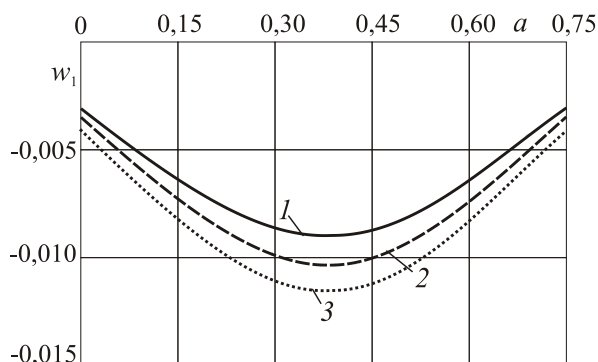


Рис.4.

На рис.4 приведены прогибы несущих слоев стержня в поперечном сечении ( $x=0,5$ ) в зависимости от координаты  $a$  левого края интервала нагрузки при ее постоянной длине ( $b-a=0,25$ ). По мере продвижения нагрузки с лева на право

прогибы растут, достигают максимума при  $a = 0,37$ , т.е. когда нагрузка распределена симметрично относительно концов стержня в интервале  $\{0,37; 0,62\}$ , и затем убывают. Температурная составляющая прогибов – 23%, нелинейность добавляет здесь к термоупругому прогибу 8%.

Графики продольных напряжений  $\sigma_{xx}$  в поперечном сечении ( $x = 0,5$ ) рассматриваемого стержня показаны на рис.5: 1 – изотермические, 2 – термоупругие, 3 – термоупругопластические. Нагрузка распределена на участке стержня  $0,5 \leq x \leq 0,75$ .

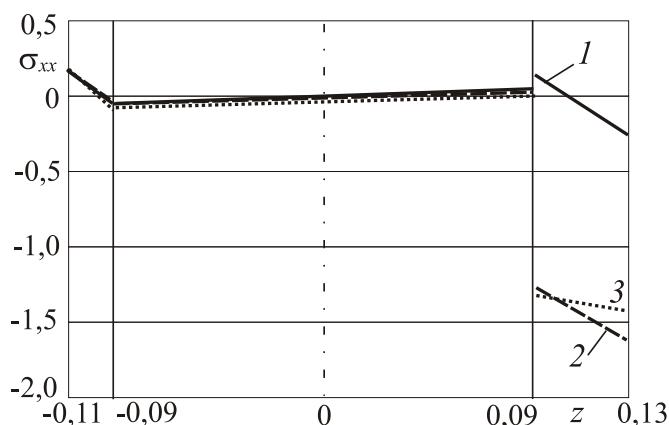


Рис.5.

Напряжения в первом слое сдвигаются в отрицательную область в связи с тепловым расширением материала. Во втором слое и заполнителе температура слабо влияет на величину и знак напряжений. Максимумы наблюдаются на внешних плоскостях. Значения напряжений в несущих слоях отнесены к интенсивности поверхностной нагрузки  $q_1 = 10^9$  Па, в заполнителе – к  $q_3 = 10^8$  Па.

В случае других локальных нагрузок (синусоидальные, параболические, сосредоточенные силы и моменты) решение будет их учитывать внесением в систему уравнений для искомых амплитуд перемещений (18) соответствующих коэффициентов разложения этих нагрузок в ряд.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенная постановка краевой задачи и методика общего построения решения уравнений равновесия физически нелинейных трехслойных стержней со сжимаемым заполнителем позволяют исследовать их напряженно-деформированное состояние при деформировании в температурном поле в случае непрерывных и локальных нагрузок. Численные расчеты показали существенное влияние температуры и физической нелинейности на перемещения и напряжения в стержне.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.

2. Головкин К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. *Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках*. – Киев: Киевский ун-т, 2012. – 541 с.
3. Соломонов Ю.С., Георгиевский В.П., Недбай А.Я., Андришин В.А. *Прикладные задачи механики композитных цилиндрических оболочек*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 408 с.
4. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Механика трехслойных стержней и пластин, связанных с упругим основанием*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – 560 с.
5. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Рабинский Л.Н. *Деформирование трехслойных физически нелинейных стержней*. – М.: Изд-во МАИ, 2016. – 184 с.
6. Hohe J., Becker W. *An energetic homogenization procedure for the elastic properties of general cellular sandwich cores // Composites. Part B, Engineering*. – 2001. – Vol.32. – No.3. – Pp.185-197.
7. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates // Composite Structures*. – 2015. – No.133. – Pp.1127-1136.
8. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates // Aerospace Science and Technology*. – 2016. – No.52. – Pp.41-51.
9. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection // Acta Mechanica*. – 2014. – Vol.225. – No.2. – Pp.523-541.
10. Kuznetsova E.L., Leonenko D.V., Starovoitov E.I. *Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium // Mechanics of Solids*. – 2015. – Vol.50. – No.3. – Pp.359-366.
11. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Исследование спектра частот трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2015. – Т.21. – №2. – С.162-169.
12. Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В. *Резонансные колебания трехслойной цилиндрической оболочки с упругим наполнителем // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2016. – Т.22. – №1. – С.60-68.
13. Starovoitov E. I., Leonenko D.V., Rabinskiy L.N. *Natural vibrations of a composite cylindrical shells with an elastic filler // Composites: Mechanics, Computations, Applications*. – 2016. – Vol.7. – No.2. – Pp.118-132.
14. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. *Гармоническое нагружение слоистых вязкоупругопластических систем // Изв. РАН. МТТ*. – 2000. – №6. – С.91-98.
15. Leonenko D. V., Starovoitov E.I. *Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation // Mechanics of Solids*. – 2012. – Vol.47. – No.1. – Pp.111-118.
16. Горшков А.Г., Старовойтов Э.И., Яровая А.В. *Циклические нагружения упругопластических тел в нейтронном потоке // Изв. РАН. МТТ*. – 2001. – №1. – С.79-85.
17. Leonenko D.V., Starovoitov E.I. *Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base // Mechanics of Solids*. – 2009. – Vol.44. – No.5. – Pp.744-755.
18. Плескачевский Ю.М., Старовойтов Э.И., Леоненко Д.В., Панин С.В. *Термопластический изгиб круговых композитных пластин на основании Винклера // Механика композиционных материалов и конструкций*. – 2011. – Т.17. – №2. – С.209-219.

19. Leonenko D.V., Starovoitov E.I. *Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation* // Mechanics of Solids. – 2011. – Vol.46. – No.2. – Pp.291-298.
20. Starovoitov E.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. *Deformation of a step composite beam in a temperature field* // J. of Engineering Physics and Thermophysics. – 2015. – Vol.88. – No.4. – Pp.1023-1029.
21. Ильюшин А.А. *Пластичность. Ч.1. Упругопластические деформации*. – М.-Л.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.

## REFERENCES

1. Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. *Mekhanika mnogosloinykh konstruksii [Mechanics of laminated constructions]*. Moskva: Mashinostroenie, 1980, 375 p.
2. Golovko K.G., Lugovoi P.Z., Meish V.F. *Dinamika neodnorodnykh obolochek pri nestatsionarnykh nagruzkakh [The dynamics of inhomogeneous shells under nonstationary loads]*. Kiev: Kievskii un-t, 2012, 541 p.
3. Solomonov Iu.S., Georgievskii V.P., Nedbai A.Ia., Andriushin V.A. *Prikladnye zadachi mekhaniki kompozitnykh tsilindricheskikh obolochek [Applied problems of mechanics of composite cylindrical shells]*. Moskva: FIZMATLIT, 2014, 408 p.
4. Pleskachevsky Y.M., Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Mekhanika trekhsloinykh sterzhnei i plastin, svyazannykh s uprugim osnovaniem [Mechanics of three-layered bars and plates connected to an elastic foundation]*. Moskva: FIZMATLIT, 2011, 560 p.
5. Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Rabinsky L.N. *Deformirovanie trekhsloinykh fizicheski nelineinykh sterzhnei [Deformation of three-layer physically nonlinear bars]*. Moskva: Izd-vo MAI, 2016, 184 p.
6. Hohe J., Becker W. *An energetic homogenization procedure for the elastic properties of general cellular sandwich cores*. Composites. Part B, Engineering, 2001, Vol.32, No.3, Pp.185-197.
7. Ivañez I., Moure M.M., Garcia-Castillo S.K., Sanchez-Saez S. *The oblique impact response of composite sandwich plates*. Composite Structures, 2015, No.133, Pp.1127-1136.
8. Grover N., Singh B.N., Maiti D.K. *An inverse trigonometric shear deformation theory for supersonic flutter characteristics of multilayered composite plates*. Aerospace Science and Technology, 2016, No.52, Pp.41-51.
9. Škec L., Jelenić G. *Analysis of a geometrically exact multi-layer beam with a rigid interlayer connection*. Acta Mechanica, 2014, Vol.225, No.2, Pp.523-541.
10. Kuznetsova E.L., Leonenko D.V., Starovoitov E.I. *Natural vibrations of three-layer circular cylindrical shells in an elastic medium*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.3, Pp.359-366.
11. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Issledovanie spektra chastot trekhsloinoi tsilindricheskoi obolochki s uprugim napolnitelem [Investigation of the frequency spectrum of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.2, Pp.162-169.
12. Starovoitov E.I., Leonenko D.V. *Rezonansnye kolebaniia trekhsloinoi tsilindricheskoi obolochki s uprugim napolnitele [Resonance oscillations of a three-layered cylindrical shell with an elastic filler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.60-68.

13. Starovoitov E. I., Leonenko D.V., Rabinskiy L.N. *Natural vibrations of a composite cylindrical shells with an elastic filler*. Composites: Mechanics, Computations, Applications, 2016, Vol.7, No.2, Pp.118-132.
14. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Garmonicheskoe nagruzhenie sloistyykh viazkouprugoplasticheskikh sistem [Harmonic loading viscoelasticoplastic layered systems]*. Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk. Mekhanika tverdogo tela, 2000, No.6, Pp.91-98.
15. Leonenko D.V., Starovoitov E.I. *Thermal impact on a circular sandwich plate on an elastic foundation*. Mechanics of Solids, 2012, Vol.47, No.1, Pp.111-118.
16. Gorshkov A.G., Starovoitov E.I., Yarovaya A.V. *Cyclic loading of elastic-plastic bodies in neutron flux*. Mechanics of Solids, 2001, Vol.36, No.1, Pp.64-69.
17. Leonenko D.V., Starovoitov E.I. *Thermoplastic strain of circular sandwich plates on an elastic base*. Mechanics of Solids, 2009, Vol.44, No.5, Pp.744-755.
18. Pleskachevskii Y.M., Starovoitov E.I., Leonenko D.V., Panin S.V. *Termoplasticheskiizgib krugovykh kompozitnykh plastin na osnovanii Vinklera [Thermoplasticbending of circular composite plates based on Winkler]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktсии, 2011, Vol.17, No.2, Pp.209-219.
19. Leonenko D.V., Starovoitov E.I. *Deformation of a three-layer elastoplastic beam on an elastic foundation*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.291-298.
20. Starovoitov E.I., Pleskachevskii Yu.M., Leonenko D.V., Tarlakovskii D.V. *Deformation of a step composite beam in a temperature field*. Journal of Engineering Physics and Thermophysics, 2015, Vol.88, No.4. Pp.1023-1029.
21. Ilushin A.A. *Plastichnost. Ch. 1. Uprugoplasticheskie deformacii [Plastic. Part 1. Elastoplastic deformation]*. Moskva, Leningrad, Gostechizdat, 1948, 376 p.

*Поступила в редакцию 04 января 2017 года*

---

Сведения об авторах:

Старовойтов Эдуард Иванович – д.ф.-м.н., проф., Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: [edstar0@yandex.by](mailto:edstar0@yandex.by)  
 Леоненко Денис Владимирович – д.ф.-м.н., доц., Белорусский государственный университет транспорта, г. Гомель, Республика Беларусь; e-mail: [leoden@tut.by](mailto:leoden@tut.by)