

## МОДЕЛЬ ДЕФОРМИРОВАНИЯ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ С УЧЕТОМ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ\*

Мишустин И.В.

*ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Поведение сплавов с памятью формы (СПФ) существенно зависит от вида напряженно-деформированного состояния. Например, при активном растяжении и сжатии изначально хаотического мартенсита кривые мартенситной неупругости отличаются как по абсолютным значениям, так и по форме. Пологий участок, напоминающий площадку текучести, наблюдается при растяжении и отсутствует при сжатии. Напряжения растяжения и сжатия с одинаковой интенсивностью вызывают неупругие деформации, интенсивность которых может отличаться вдвое. Кривые реверсивного и циклического растяжения-сжатия имеют участки с аналогичными различиями.

Предложена нелинейная модель фазово-структурного деформирования поликристаллических СПФ, в которой при описании структурного превращения использовались гипотеза о неоднородном упрочнении представительного объема и аналог теории пластического течения с изотропным и трансляционным упрочнением. Для учета вида деформированного и напряженного состояния введены два безразмерных параметра, пропорциональных отношению третьего инварианта девиатора к кубу интенсивности тензора неупругой деформации и тензора активного напряжения (или приращения неупругой деформации) соответственно. Параметром изотропного упрочнения мартенситного объема является максимальное за все время его существования значение величины, равной отношению интенсивности неупругой деформации к ее предельному значению, отвечающему текущему виду деформированного состояния. Материальная функция, описывающая трансляционное упрочнение, зависит от интенсивности полного напряжения и вида напряженного состояния. Указаны тестовые режимы нагружения СПФ, позволяющие установить используемые в модели функции. Сформулированы требования к этим функциям, связанные с единственностью решения, диссипацией и перекрестным упрочнением.

Рассмотрены частные случаи мартенситной неупругости СПФ в однородном напряженном состоянии и соответствующие упрощения основных соотношений. Первый случай относится к пропорциональному нагружению образца, второй к осевому растяжению-сжатию и кручению тонкостенного цилиндрического стержня. Приведены результаты численных расчетов в рамках предложенной модели, демонстрирующие разносопротивляемость материала.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы; фазовые переходы; структурное превращение; неоднородное упрочнение; вид напряженного состояния

## MODEL OF SHAPE MEMORY ALLOY DEFORMATION WITH RESISTANCE ASYMMETRY

Mishustin I.V.

*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

---

\* Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, проект № 17-01-00216.

## ABSTRACT

Shape memory alloys (SMA) behavior essentially depends on the type of stress-strain state. For example, under active tension and compression of initially chaotic martensite, the martensitic inelasticity curves differ both in absolute values and in shape. A flat slope section of the curve like yield plateau is present under tension and is absent in case of compression. The intensity of inelastic deformations caused by tension and compression stresses with the same intensity can be twice as much. Reversing and cyclic tension-compression curves have parts with similar differences.

A nonlinear model of polycrystalline SMA phase-structural transformation is proposed using hypothesis of heterogeneous strain hardening of a representative volume and analogue of incremental plasticity theory with isotropic and translational hardening to describe the structural transformation. Two dimensionless parameters proportional to the ratio of deviator third invariant to the cube of intensity of inelastic deformation tensor and active stress (or inelastic deformation increment) tensor respectively are introduced to take into account the type of stress and strain state. The parameter of martensitic volume isotropic hardening is lifetime maximum of the ratio of inelastic deformation intensity to its limit value corresponding to the current strain state type. The material function of translational hardening depends on the full stress intensity and stress state type. The test modes of SMA loading to determine functions used in the model are described. The requirements to these functions related to solution uniqueness, dissipation, and cross hardening are formulated.

Special cases of SMA martensitic inelasticity in a homogeneous stress state and corresponding simplifications of the basic equations are considered. The first case relates to the proportional loading of a specimen, the second one relates to the axial tension-compression and torsion of a thin-walled cylindrical beam. The results of numerical calculations in the framework of proposed model demonstrating resistance asymmetry of the material are presented.

**Keywords:** shape memory alloys; phase transformations; structural transformation; heterogeneous hardening; stress state type

## ВВЕДЕНИЕ

Влияние вида нагружения на поведение сплавов с памятью формы установлено в ряде экспериментов [1-2]. Известные работы предлагают два пути учета разносопротивляемости СПФ. Вывод свойств поликристаллического СПФ путем осреднения процессов, происходящих в большом количестве по-разному ориентированных монокристаллов [3-6], предполагает необходимость получения качественных изменений поведения объектов на разных уровнях, неясность итоговых определяющих соотношений и наличие многих постоянных, значения которых не очевидны. Введение потенциала неупругого деформирования, зависящего от инвариантов тензора напряжения [7-9], приводит к противоречиям с экспериментальными данными или к существенно нелинейным соотношениям. Кроме того, описанные модели не учитывают особенности поведения СПФ при накоплении фазовой деформации, сверхупругости и мартенситной неупругости, а также влияние вида деформированного состояния.

Особые свойства сплавов с памятью формы обеспечивают два механизма неупругого деформирования – фазовые переходы и структурное превращение мартенсита. При фазовых переходах происходит перестройка кристаллической решетки. Прямой переход аустенитной решетки в мартенситную является многовариантным ввиду понижения симметрии элементарной ячейки (для никелида титана объемноцентрированная кубическая решетка B2 преобразуется

в моноклинную  $B19'$  в один этап или через ромбоэдрическую R-фазу), причем относительные удлинения ребер представительного элемента решетки существенно отличаются (для равноатомного TiNi они равны  $-4,18\%$ ,  $-3,38\%$  и  $8,4\%$ ). Мартенсит формируется в виде структурных образований типа пластин или игл, растущих из зародыша, имеющего форму двояковыпуклой линзы и содержащего большое количество элементарных ячеек нескольких ориентаций (сдвойникованных) [10-11]. Согласно экспериментальным данным, в любой момент процесса скорость роста объема одинакова для всех образований. Аналогично можно предположить, что при обратном переходе объем мартенситных образований уменьшается (с одинаковой скоростью) до некоторого минимума, после чего эти образования исчезают (переходят целиком в аустенит).

Будем считать, что мартенситные образования зарождаются группами. Назовем их мартенситными элементами. Мартенситная часть представительного объема является совокупностью последовательно зародившихся мартенситных элементов. В каждом элементе находятся образования различной ориентации, их осредненная деформация зависит от истории нагружения и не меняется с ростом или уменьшением мартенситных образований. Мартенситный элемент, зародившийся в отсутствие напряжения, имеет в этот момент нулевую осредненную деформацию формоизменения. Заметим, что мартенситный элемент введен формально как минимальный объект континуального анализа и не является физической структурой, в отличие от мартенситного образования.

Под действием нагрузки мартенсит может испытывать структурное превращение, которое происходит путем раздвойнивания мартенситных образований и их переориентации (встраивания в соседние образования). Попытки по повторному нагружению СПФ в мартенситном состоянии свидетельствуют о том, что для структурного превращения, в отличие от фазовых переходов, характерно деформационное упрочнение. Также экспериментально обнаружено, что мартенсит получает упрочнение при формировании под действием напряжения (явление перекрестного упрочнения) [2,12]. Разное нагружение приводит к разному упрочнению. Поэтому мартенситная часть представительного объема, зародившаяся при меняющемся напряжении, в общем случае имеет неоднородную деформацию и упрочнена неравномерно. Мартенситные элементы получают при зарождении разное упрочнение и деформацию и участвуют в дальнейшем структурном превращении по-разному. Таким образом, для построения модели неупругого деформирования СПФ нужно описать поведение мартенситных элементов, найти их деформации и использовать для всего представительного объема осреднение по Рейсу [13-14].

Предельная интенсивность неупругой деформации мартенситного элемента при росте интенсивности напряжения (в отсутствие пластичности) связана с кристаллографической деформацией фазового перехода. Мартенситные образования стремятся к энергетически выгодному строению (набору ячеек разной ориентации с одновременно большей работой напряжения на деформации кристаллической решетки и меньшей несовместностью деформаций фаз). Например, в случае одноосного растяжения мартенситные образования стремятся быть вытянутыми вдоль нагрузки и мало деформированными в поперечной плоскости. Аналогично в случае одноосного сжатия. Но как было упомянуто выше, линейные деформации решетки в разных направлениях существенно отличаются по модулю. Поэтому предельная интенсивность неупругой деформации мартенситного элемента зависит от вида его деформированного

состояния. Другой причиной разносопротивляемости СПФ может быть разная активность процессов раздвойнивания и переориентации мартенситных образований при структурном превращении. Неравномерность деформирования образца также приводит к его разносопротивляемости.

## 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ МОДЕЛИ

В общем случае представительный объем включает аустенитную часть и ряд мартенситных элементов. Обозначим объемную долю мартенситного элемента  $\bar{q}$ , а его собственную деформацию  $\bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{\varepsilon}'_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_0$  (штрихом обозначен девиатор,  $\delta_{ij}$  – единичный тензор,  $\varepsilon_0$  – линейная деформация объемного эффекта прямого фазового перехода). Деформация представительного объема и доля в нем мартенсита вычисляются суммированием по имеющимся в рассматриваемый момент мартенситным элементам

$$\varepsilon_{ij} = \sum \bar{\varepsilon}_{ij} \bar{q} = \sum \bar{\varepsilon}'_{ij} \bar{q} + \delta_{ij} \varepsilon_0 q, \quad q = \sum \bar{q}$$

Изменение деформации происходит за счет изменения числа мартенситных образований (зарождения новых при прямом переходе, исчезновения при обратном), изменения объемных долей имеющихся элементов путем роста при прямом переходе, уменьшения при обратном (влияние переориентации на объемные доли элементов здесь не рассматривается) и изменения собственных деформаций элементов в ходе структурного превращения

$$d\varepsilon_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} \tilde{q} + \sum \bar{\varepsilon}_{ij} d\bar{q} + \sum d\bar{\varepsilon}_{ij} \bar{q} \quad (1)$$

где  $\tilde{\varepsilon}_{ij}$  и  $\tilde{q}$  – осредненная деформация зародившихся (исчезнувших) образований и изменение объемной доли мартенсита вследствие их зарождения (исчезновения после уменьшения). При прямом переходе зародившиеся образования составляют новый мартенситный элемент, при обратном переходе исчезают образования, достигшие определенного минимального размера, причем если происходила переориентация образований, то исчезающие образования не составляют мартенситный элемент. Удельную скорость изменения объема элементов обозначим  $0 \leq f(q) \leq 1/q$ . Тогда

$$d\bar{q} = \bar{q}f(q)dq, \quad \sum \bar{\varepsilon}_{ij} d\bar{q} = \varepsilon_{ij} f(q) dq, \quad \tilde{q} = dq - \sum d\bar{q} = [1 - qf(q)]dq$$

Собственная деформация зародившегося элемента определяется действующим в момент зарождения напряжением

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \rho(\mu_\sigma) \varphi_1(\sigma_i) + \delta_{ij} \varepsilon_0 = \tilde{\varepsilon}'_{ij} + \delta_{ij} \varepsilon_0 \quad (2)$$

где  $\sigma'_{ij}$  и  $\sigma_i$  – девиатор и интенсивность напряжения,  $\varphi_1$  – материальная функция, монотонно возрастающая от 0 до 1. Так как компоненты девиаторов деформации и напряжения пропорциональны, в момент зарождения элемента вид его деформированного состояния совпадает с видом напряженного состояния, а предельная интенсивность неупругой деформации  $\rho$  отвечает параметру вида напряженного состояния  $\mu_\sigma$  (при нулевом напряжении этот параметр можно считать равным любому из принимаемых значений). Осредненная деформация образований, исчезающих при обратном переходе, определяется историей формирования и нагружения мартенсита, а также скоростями роста и убывания мартенситных образований. В результате вместо (1) имеем

$$d\varepsilon_{ij} = [\omega_{ij} + \delta_{ij} \varepsilon_0]dq + d\varepsilon_{ij}^{st}, \quad \omega_{ij} = \tilde{\varepsilon}'_{ij}[1 - qf(q)] + \varepsilon'_{ij}f(q) \quad (3)$$

Для вычисления изменения деформации за счет структурного превращения  $d\varepsilon_{ij}^{st}$  нужно найти собственные деформации и параметры упрочнения мартенситных элементов согласно истории нагружения. Если считать их зарождение непрерывным процессом, параметром которого является значение доли мартенсита [15], то в текущий момент прямого фазового превращения существуют элементы, соответствующие доле мартенсита при их зарождении  $q_*$ , имеющей значение в диапазоне от 0 до текущего значения  $q$ . Тогда

$$\bar{q} = \bar{q}_0 \exp\left\{\int_{q_*}^q f(x)dx\right\}, \quad \bar{q}_0 = [1 - q_*f(q_*)]dq_*$$

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \int_0^q d\bar{\varepsilon}_{ij}(q_*)[1 - q_*f(q_*)] \exp\left\{\int_{q_*}^q f(x)dx\right\}dq_*$$

или если обозначить  $q_\Sigma(q_*, q)$  суммарную долю элементов, из которых состояла мартенситная часть представительного объема, когда ее доля была равна  $q_*$ , то

$$d\varepsilon_{ij}^{st} = \int_0^q d\bar{\varepsilon}_{ij}[q_*(q_\Sigma)]dq_\Sigma, \quad q_\Sigma(q_*, q) = q_* \exp\left\{\int_{q_*}^q f(x)dx\right\} \quad (4)$$

Если зародившиеся в диапазоне  $q_1 \leq q_* \leq q_2$  элементы получают одинаковое приращение собственной деформации  $d\bar{\varepsilon}_{ij}$ , то их вклад в изменение деформации представительного объема равен  $q_{st}d\bar{\varepsilon}_{ij}$ , где  $q_{st} = q_\Sigma(q_2, q) - q_\Sigma(q_1, q)$ .

Для обратного перехода, начинающегося со значения объемной доли мартенсита  $q_{max}$ , при скорости убывания объема мартенситных образований  $f_2(q)$ , отличающейся в общем случае от скорости роста  $f_1(q)$ , в формуле (4)

$$q_\Sigma(q_*, q) = q_* \exp\left\{\int_{q_*}^{q_{max}} f_1(x)dx - \int_q^{q_{max}} f_2(x)dx\right\} \quad (5)$$

Если нет переориентации мартенситных образований, то в текущий момент обратного перехода будет исчезать мартенситный элемент, отвечающий  $q_{**}$

$$q_\Sigma(q_{**}, q) = q, \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \bar{\varepsilon}_{ij}(q_{**}), \quad \tilde{q} = -\bar{q}(q_{**}, q) + d\bar{q}(q_{**}, q) = [1 - qf_2(q)]dq$$

В случае  $f_1(q) = f_2(q)$  величина  $q_{**}$  равна текущему значению  $q$ , то есть мартенситные элементы зарождаются и исчезают при одинаковых долях  $q$ .

Соотношения (3), описывающие изменение деформации при фазовом переходе и структурном превращении, следует дополнить выражением объемной доли мартенсита, обеспечивающим неотрицательность диссипации [16]. В случае прямого фазового перехода имеем равенства [17]

$$d\varepsilon_{ij} = [\omega_{ij} + \delta_{ij} \varepsilon_0]dq + \int_0^q d\bar{\varepsilon}_{ij}[q_*(q_\Sigma)]dq_\Sigma, \quad dq \geq 0$$

$$q = \psi(t), \quad dt > 0; \quad \omega_{ij} = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} \rho(\mu_\sigma) \varphi_1(\sigma_i) [1 - qf_1(q)] + \varepsilon'_{ij} f_1(q)$$

$$t = \frac{M_s - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad M_s = M_s^0 + \frac{\omega_{ij} \sigma'_{ij} + Z(\sigma_i, \sigma_{kk}) + \sigma_{kk} \varepsilon_0}{\Delta S} \quad (6)$$

$$6Z(\sigma_i, \sigma_{kk}) = (K_M^{-1} - K_A^{-1})\sigma_{kk}^2 + (G_M^{-1} - G_A^{-1})\sigma_i^2$$

а обратный переход описывается системой

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_{ij} &= [\omega_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon_0]dq + \int_0^q d\bar{\varepsilon}_{ij}[q_*(q_\Sigma)]dq_\Sigma, \quad dq \leq 0 \\
 q &= \psi(1-t), \quad dt > 0; \quad \omega_{ij} = \bar{\varepsilon}'_{ij}(q_{**})[1 - qf_2(q)] + \varepsilon'_{ij}f_2(q) \\
 t &= \frac{T - A_s}{A_f^0 - A_s^0}, \quad A_s = A_s^0 + \frac{\omega_{ij}\sigma_{ij}' + Z(\sigma_i, \sigma_{kk}) + \sigma_{kk}\varepsilon_0}{\Delta S}
 \end{aligned} \tag{7}$$

где  $\psi$  – материальная функция, монотонно возрастающая от 0 до 1 при условии роста безразмерного параметра  $t$ ;  $M_s^0$ ,  $M_f^0$  и  $A_s^0$ ,  $A_f^0$  – начальные и конечные температуры прямого и обратного переходов в отсутствии напряжений;  $T$  – абсолютная температура;  $\Delta S$  – разность объемных плотностей энтропии аустенита и мартенсита в ненагруженном состоянии при отсчетной температуре;  $K_A$ ,  $K_M$  и  $G_A$ ,  $G_M$  – значения утроенного объемного модуля и модуля сдвига в аустенитном и мартенситном состояниях.  $q_\Sigma$  вычисляются, соответственно, по формулам (4) при  $f = f_1$  и (5). Выражения  $q$  приведены для непрерывных фазовых переходов, начинающихся из однофазного состояния при  $t = 0$ . В случае уменьшения  $t$  фазовый переход прерывается и возобновляется по закону

$$\begin{aligned}
 q &= \frac{q_0 - \psi(t_s) + (1 - q_0)\psi(t)}{1 - \psi(t_s)}, \quad dq > 0; \quad q = \frac{q_0\psi(1-t)}{\psi(1-t_s)}, \quad dq < 0 \\
 t_s &= \max(t_0, 0), \quad t_s \leq t \leq 1, \quad dt > 0
 \end{aligned}$$

где  $q_0$  и  $t_0$  – начальные значения параметров  $q$  и  $t$  согласно (6) или (7). Если предположить, что при обратном переходе нет структурного превращения и исчезновения мартенситных образований, то получим упрощенную формулу

$$\varepsilon_{ij} = [\varepsilon_{ij}]_{max} q, \quad dq < 0 \quad \text{при} \quad f_2(q) = 1/q, \quad d\varepsilon_{ij}^{st} = 0$$

Прямой фазовый переход, происходящий с уменьшением температуры при постоянном напряжении, не сопровождается структурным превращением. Все мартенситные элементы имеют одинаковую собственную деформацию  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  согласно (2), а для представительного объема целиком получим

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{ij} &= \bar{\varepsilon}_{ij} q, \quad \varepsilon_i = \rho(\mu_\sigma)\varphi_1(\sigma_i)q, \quad q = \psi\left(\frac{M_s - T}{M_s^0 - M_f^0}\right) \\
 M_s &= M_s^0 + \frac{\rho(\mu_\sigma)\varphi_1(\sigma_i)\sigma_i + Z(\sigma_i, \sigma_{kk}) + \sigma_{kk}\varepsilon_0}{\Delta S}
 \end{aligned} \tag{8}$$

Отсюда видно, что функция  $\varphi_1$  описывает зависимость отношения интенсивности неупругой деформации после полного прямого перехода в указанных условиях к ее предельной величине от интенсивности напряжения. С другой стороны, по зависимости интенсивности неупругой деформации от температуры для подобного процесса можно судить о виде функции  $\psi$ . Если при температуре  $T_1$ , которой отвечает  $q_1 < 1$ , происходит разгрузка без инициации обратного перехода, то дальнейшее охлаждение вызывает продолжение прямого перехода и изменение деформации за счет роста образований с собственной деформацией  $\bar{\varepsilon}_{ij}$ , зародившихся до снятия нагрузки (при  $\sigma_i = \sigma_1$ )

$$\varepsilon'_{ij} = \bar{\varepsilon}'_{ij}q_\Sigma(q_1, q), \quad \varepsilon_i = \rho(\mu_\sigma)\varphi_1(\sigma_1)q_1 \exp\left\{\int_{q_1}^q f_1(x)dx\right\}, \quad q_1 \leq q \leq 1$$

$$q = \frac{q_1 - \psi(t_s) + (1 - q_1)\psi(t)}{1 - \psi(t_s)}, \quad t = \frac{M_s^0 - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad M_f^0 \leq T \leq T_s$$

где  $t_s$  – значение  $t$  при температуре  $T_s = \min(T_1, M_s^0)$ . Функция  $f_1$  влияет на интенсивность деформации после завершения прямого перехода. Если теперь произвести нагрев образца, то в нем произойдет обратный переход по закону

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{ij} &= \bar{\varepsilon}'_{ij} q_{1\Sigma}(q), \quad q_1^* \leq q \leq 1; \quad \varepsilon'_{ij} = \bar{\varepsilon}'_{ij} q, \quad 0 \leq q \leq q_1^* \\ q_{1\Sigma}(q) &= q_1 \exp\left\{ \int_{q_1}^1 f_1(x) dx - \int_q^1 f_2(x) dx \right\}, \quad q_{1\Sigma}(q_1^*) = q_1^* \\ q &= \psi\left( \frac{A_f^0 - T}{A_f^0 - A_s^0} \right) \quad A_s^0 \leq T \leq A_f^0 \end{aligned}$$

Как видно, у зависимости интенсивности деформации от температуры при  $T = T_1^*$ , отвечающей  $q = q_1^*$ , производная меняется в  $q_1^* f_2(q_1^*)$  раз, что позволяет судить о виде функции  $f_2$ . Отсутствие такого изменения внутри температурного диапазона обратного перехода соответствует  $f_2(q) = 1/q$  или свидетельствует об условиях исчезновения и переориентации мартенситных образований, отличных от принятых выше. Функция  $f_2$  также влияет на максимальную деформацию при обратном переходе в опыте с реверсивной памятью формы [15], однако вероятные структурное превращение и возобновление прямого перехода при смене нагрузки усложняет задачу. Зависимость функций  $\varphi_1$ ,  $\psi$ ,  $f_1$  и  $f_2$  от вида напряженного и деформированного состояния требует экспериментального исследования и в данной работе не предполагается.

Как было сказано ранее, предельная интенсивность фазово-структурной деформации определяется видом деформированного состояния. Однако непосредственному установлению зависимости  $\rho(\mu_\varepsilon)$  мешает пластическое деформирование материала при больших нагрузках. При известной функции  $\varphi_1(\sigma_i)$  можно найти указанную зависимость из экспериментов без пластического деформирования – по второй формуле (8) для прямого перехода под действием постоянного напряжения или по напряжениям начала неупругого деформирования СПФ в режиме сверхупругости из условия  $T = M_s$ , где для  $M_s$  справедливо выражение (8).

## 2. СТРУКТУРНОЕ ПРЕВРАЩЕНИЕ ОДНОРОДНО УПРОЧНЕННОГО ОБЪЕМА МАРТЕНСИТА

Рассмотрим однородно упрочненный объем мартенсита. В общем случае это – мартенситный элемент, в частном случае формирования мартенсита при постоянном напряжении – весь представительный объем. Структурное превращение описывается по аналогии с теорией пластического течения [18]

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} &= d\lambda S_{ij} \quad \text{при} \quad \varphi_2(S_i) = e_{max}, \quad S_{ij} d\sigma_{ij} > 0 \\ dr_{ij} &= g(\sigma_i, \mu_s) d\varepsilon_{ij}, \quad \sigma'_{ij} = S_{ij} + r_{ij}, \quad e = \varepsilon_i / \rho(\mu_\varepsilon) \end{aligned} \quad (9)$$

где  $S_{ij}$  – активное напряжение,  $r_{ij}$  – остаточное микронапряжение. Материальная функция  $\varphi_2$  монотонно возрастает от 0 до 1 с ростом интенсивности активного

напряжения и описывает изотропное упрочнение с параметром, равным максимальному значению величины  $e$  за время от начала существования рассматриваемого объема мартенсита как однородно упрочненного до текущего момента. Описывающая трансляционное упрочнение знакоположительная материальная функция  $g$  зависит от интенсивности напряжения и меняется вместе с видом напряженного состояния. Параметр вида деформированного состояния  $\mu_\varepsilon$  выражается через третий инвариант девиатора и интенсивность тензора неупругой деформации, а параметр вида напряженного состояния  $\mu_S$  – через аналогичные характеристики тензора активных напряжений

$$\mu_\varepsilon = 4I_3(D_\varepsilon)/\varepsilon_i^3, \quad \mu_S = 27I_3(D_S)/(2S_i^3)$$

В силу (9)  $\mu_S$  совпадает с параметрами, вычисленными по тензорам  $d\varepsilon_{ij}$  и  $dr_{ij}$ .

Для осуществления структурного превращения должны выполняться два условия активного нагружения, приведенные в (9). Упрочнение может быть либо чисто трансляционным, либо комбинированным с изотропным при выполнении дополнительных условий  $e = e_{max}$ ,  $de > 0$ . Если в этом случае представить

$$de = Pd\lambda, \quad P = \left[ \frac{2}{3} \frac{\varepsilon'_{ij}}{\varepsilon_i} - \varphi_2(S_i)R_{ij} \right] \frac{S_{ij}}{\rho(\mu_\varepsilon)}, \quad R_{ij} = \rho'(\mu_\varepsilon) \frac{\partial \mu_\varepsilon}{\partial \varepsilon'_{ij}}$$

то условия изотропного упрочнения сводятся к

$$e = e_{max}, \quad P > 0 \tag{10}$$

При неизменности вида деформированного состояния в ходе структурного превращения второе условие сводится к  $\varepsilon_{ij}S_{ij} > 0$ . Параметр  $d\lambda$  находится с помощью соотношений (9) из равенства

$$de_{max} = \delta_c Pd\lambda = \varphi'_2(S_i)dS_i$$

где  $\delta_c = 1$  при выполнении условий изотропного упрочнения (10), иначе  $\delta_c = 0$ .

В общем случае имеем систему дифференциальных уравнений

$$dS_{ij} = d\sigma'_{ij} - g(\sigma_i, \mu_S)S_{ij}d\lambda, \quad d\varepsilon'_{ij} = S_{ij}d\lambda \tag{11}$$

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}d\sigma'_{ij}}{S_i} \left[ g(\sigma_i, \mu_S)S_i + \frac{\delta_c P}{\varphi'_2(S_i)} \right]^{-1}$$

где при  $\delta_c = 0$  второе слагаемое исключается, независимо от определенности и величины его значения. Так как условие (9) связывает искомые компоненты  $S_{ij}$  (при изотропном упрочнении вместе с  $\varepsilon'_{ij}$ ), независимых уравнений меньше числа входящих в систему (11) на одно. Неравенства из (9) и (10) обеспечивают  $d\lambda > 0$ .

Начальные условия формулируются исходя из упрочнения при зарождении мартенситного элемента. Предполагается, что напряжение, действовавшее в этот момент, не влияет на закон изменения поверхности нагружения, но полностью определяет ее начальное состояние. Будем считать, что ему соответствует поверхность нагружения, образующаяся при активном нагружении хаотического мартенсита напряжением, пропорциональным напряжению зарождения, до деформации, равной собственной деформации элемента (2). Это предположение не противоречит экспериментальным данным, приведенным в [12].

Пусть  $\varphi_2(S_i)$ ,  $\rho(\mu_\varepsilon)$ ,  $g(\sigma_i, \mu_S)$  непрерывны вместе с производными и  $g > 0$  при  $\sigma_i < \infty$ . Тогда при непрерывной скорости изменения напряжения правые

части уравнений системы (11) являются непрерывными функциями по параметру времени и компонентам искомым тензорам  $S_{ij}$  и  $\varepsilon'_{ij}$  во всей области их значений, кроме точек изменения вида упрочнения  $\delta_c$  и нулевой точки  $S_{ij} = 0$ ,  $\varepsilon'_{ij} = 0$ , отвечающей начальному состоянию хаотического мартенсита (других особых точек нет, так как  $S_i$  не убывает, а в случаях  $\varepsilon'_{ij} = 0$  при  $S_i > 0$  нарушается первое условие (10), и неопределенность исключается). Аналогичным свойством обладают производные правых частей уравнений (11) по  $\varepsilon'_{ij}$  и по  $S_{ij}$ , если

$$\varphi_2''(S_i)/\varphi_2'(S_i)^2 < \infty \text{ при } 0 < S_i < \infty$$

При  $\sigma_i \rightarrow \infty$  имеем  $d\varepsilon'_{ij} \rightarrow 0$  и  $dr_{ij} \rightarrow 0$ , если  $g(\infty, \mu_S) < \infty$ , так как  $\varphi_2(\infty) = 1$  и в этом случае  $\delta_c = 1$ ,  $\mu_S = \mu_\varepsilon \rightarrow \text{const}$ . Следовательно, если в исходном состоянии мартенсит упрочнен (начальное значение параметра  $e = e_0 > 0$ ), процесс его деформирования можно разделить на этапы с постоянным видом упрочнения, на каждом из которых система (11) имеет единственное решение [19].

В неупрочненном состоянии  $e_0 = 0$  неупругое деформирование не может начаться, так как согласно первому условию (9)  $S_{ij} = 0$ , и второе условие невыполнимо. Поэтому для описания мартенситной неупругости с начальными условиями  $\varepsilon'_{ij} = 0$  и  $r_{ij} = 0$  примем  $e_0 > 0$ . При росте интенсивности напряжения с нуля материал будет деформироваться упруго до  $\sigma_i = S_0$ , где  $\varphi_2(S_0) = e_0$ , затем будет происходить неупругое деформирование с чисто трансляционным упрочнением, пока текущее значение параметра  $e$  не достигнет  $e_0$ , и станет возможным изотропное упрочнение. Если значение  $e_0$  мало, нагружение до этапа с комбинированным упрочнением можно считать пропорциональным (с постоянными параметрами  $\mu_S = \mu_\varepsilon = \mu_0$ ). Тогда в начале указанного этапа

$$S_{ij} d\lambda = d\sigma'_{ij} \left[ g(\sigma_0, \mu_0) + \frac{2}{3\rho(\mu_0)\varphi_2'(S_0)} \right]^{-1}$$

$$\rho(\mu_0)\varphi_2(S_0) = \frac{2}{3} \int_{S_0}^{\sigma_0} \frac{dx}{g(x, \mu_0)} \quad (12)$$

и, устремляя  $S_0 \rightarrow 0$ , как следствие  $e_0 \rightarrow 0$  получим начальные значения правых частей системы (11) для хаотического мартенсита

$$dS_{ij} = \frac{d\sigma'_{ij}}{1 + C_0}, \quad d\varepsilon'_{ij} = \frac{C_0 d\sigma'_{ij}}{g(0, \mu_0)(1 + C_0)} \quad (13)$$

$$C_0 = \frac{3}{2} \rho(\mu_0) \lim_{S_0 \rightarrow 0} [\varphi_2'(S_0) g(\sigma_0, \mu_0)] < \infty$$

где  $\mu_0$  определяется по начальному значению тензора  $d\sigma'_{ij}$ , а  $\sigma_0$  и  $S_0$  связаны соотношением (12).

### 3. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ СТРУКТУРНОГО ПРЕВРАЩЕНИЯ

В случае пропорционального нагружения каждый девиатор выражается через скалярный параметр и постоянный направляющий девиатор  $\sigma_{ij}^0$

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} &= \sigma \sigma_{ij}^0, \quad S_{ij} = S \sigma_{ij}^0, \quad r_{ij} = r \sigma_{ij}^0, \quad \sigma = S + r, \quad \mu_S = \mu_0 \text{sign}(S) \\ \varepsilon'_{ij} &= \frac{3}{2} \varepsilon \sigma_{ij}^0, \quad \frac{3}{2} \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 = 1, \quad \frac{9}{2} \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 \sigma_{ij}^0 = \mu_0 > 0, \quad \mu_\varepsilon = \mu_0 \text{sign}(\varepsilon)\end{aligned}$$

Вместо (9) получим формулы

$$\begin{aligned}d\varepsilon &= \frac{2}{3} S d\lambda \quad \text{при } \varphi_2(|S|) = e_{max}, \quad S d\sigma > 0; \quad dr = \frac{3}{2} g_\pm(|\sigma|) d\varepsilon, \quad e = |\varepsilon|/\rho_\pm \\ \rho_\pm &= \rho_{\text{sign}(\varepsilon)} = \rho(\mu_0 \text{sign}(\varepsilon)), \quad g_\pm(|\sigma|) = g_{\text{sign}(S)}(|\sigma|) = g(|\sigma|, \mu_0 \text{sign}(S))\end{aligned}$$

а условия изотропного упрочнения (10) принимают вид

$$e = e_{max}, \quad S\varepsilon > 0$$

Система уравнений (11) при  $\delta_c = 0$  имеет решение

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{2dx}{3g_\pm(|x|)}, \quad S = S_0 \quad (14)$$

а при  $\delta_c = 1$  сводится к решению одного уравнения

$$\frac{dS}{d\sigma} = \left[ 1 + \frac{3}{2} \rho_\pm g_\pm(|\sigma|) \varphi'_2(|S|) \right]^{-1}, \quad \varepsilon = \text{sign}(S) \rho_\pm \varphi_2(|S|) \quad (15)$$

с начальным значением правой части в точке  $S = \varepsilon = 0$ , определяемым по (12-13).

Как видно из решения (14), для фиксированного  $\mu_S$  функцию  $g(\sigma_i, \mu_S)$  можно определить путем дифференцирования зависимости  $\varepsilon$  и  $\sigma$  на участке с чисто трансляционным упрочнением, полученной при пропорциональном нагружении, соответствующем  $\mu_S$ . С такого участка начинается неупругое деформирование при активном нагружении после реверса (смены знака  $\sigma$ ).

Решение уравнения (15) позволяет сформулировать еще два требования к материальным функциям

$$\varphi_2(|S(\sigma)|) \leq \varphi_1(|\sigma|), \quad |\sigma| \leq 2|S(\sigma)| \quad (16)$$

которые должны выполняться для всех  $\sigma \neq 0$  при любом виде нагружения. Первое неравенство требует, чтобы при зарождении мартенситного элемента точка в пространстве компонент девиатора напряжений, отвечающая текущему напряженному состоянию, находилась на начальной поверхности нагружения или внутри нее (при отсутствии или наличии перекрестного упрочнения). Второе неравенство (16) описывает такое же требование к точке, отвечающей нулевому девиатору напряжений, что обеспечивает неотрицательность работы напряжения на приращении девиатора фазово-структурной деформации и вместе с (6), (7) исключает отрицательную диссипацию при классической термодинамической формулировке [16]. Заметим, что выполнение этого неравенства в случае монотонного пропорционального нагружения не гарантирует того же при циклическом знакопеременном нагружении [18].

На рис.1 показаны результаты расчетов пропорционального растяжения с последующим сжатием (левый график) и пропорционального сжатия с последующим растяжением (правый график) изначально хаотического мартенсита. Пунктирные кривые отвечают монотонному растяжению и сжатию.

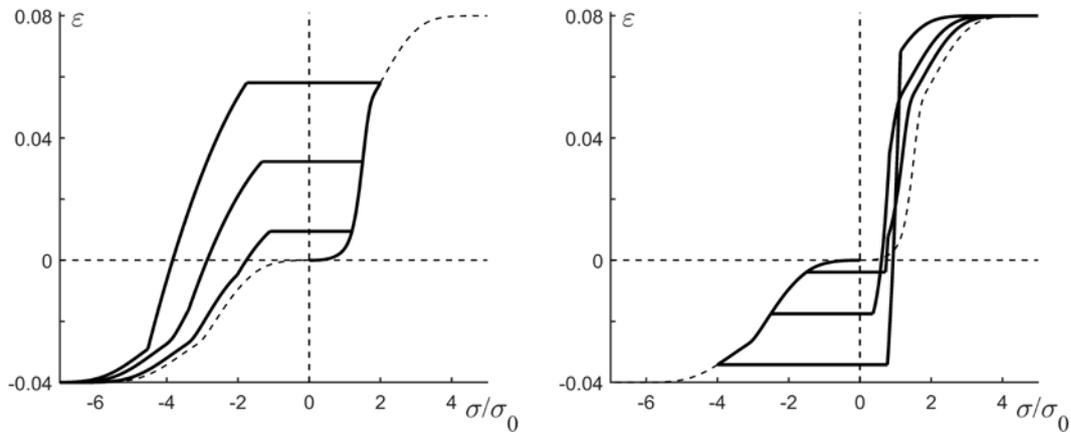


Рис.1. Реверсивное растяжение-сжатие.

Были использованы следующие функции (при данном нагружении  $\mu_0 = 1$ ).

$$\begin{aligned} \rho(\mu_\varepsilon) &= 0.06 + 0.02\mu_\varepsilon, \quad g(\sigma_i, \mu_S)^{-1} = 1.5A(\mu_S)B(\mu_S)(\sigma_i/\sigma_0)^{A(\mu_S)-1} \\ A(\mu_S) &= 2.5 + 0.5\mu_S, \quad B(\mu_S) = 0.0049 + 0.0031 \exp(3.42\mu_S) \\ \varphi_2(S_i) &= \Phi(S_i/\sigma_0), \quad \Phi(x) = k_1V_1(x) + k_2V_2(x) \\ V_n(x) &= 1 - \exp[-(\beta_n x)^{\alpha_n}], \quad n = 1, 2; \quad k_1 = k_2 = 0.5 \\ \alpha_1 &= 3, \quad \alpha_2 = 10, \quad \beta_1 = 0.45, \quad \beta_2 = 0.7 \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим теперь сложное нагружение тонкостенного цилиндрического стержня. Предположим, что он находится в однородном напряженном состоянии, являющемся суммой осевого растяжения-сжатия и кручения. Выразим девиатор напряжения через два скалярных параметра (оси координат в точке направлены параллельно продольной оси стержня, в окружном и в радиальном направлениях)

$$D_\sigma = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_1 & \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_2 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_2 & -\frac{1}{3}\sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma_1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_i = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Решение системы (11) можно представить через аналогичные параметры

$$D_S = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}S_1 & \frac{1}{\sqrt{3}}S_2 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}}S_2 & -\frac{1}{3}S_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}S_1 \end{bmatrix}, \quad D_\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_2 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_2 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\varepsilon_1 \end{bmatrix}$$

$$S_i = \sqrt{S_1^2 + S_2^2}, \quad 27I_3(D_S) = S_1(2S_1^2 + 3S_2^2)$$

$$\varepsilon_i = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}, \quad 8I_3(D_\varepsilon) = \varepsilon_1(2\varepsilon_1^2 + 3\varepsilon_2^2)$$

которые выражаются через полярные координаты на той же плоскости

$$S_1 = S_i \cos \theta, \quad S_2 = S_i \sin \theta, \quad \mu_S = \cos \theta (1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta)$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_i \cos \vartheta, \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_i \sin \vartheta, \quad \mu_\varepsilon = \cos \vartheta (1 + \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta)$$

В итоге система (11) сводится к четырем уравнениям

$$dS_k = d\sigma_k - g(\sigma_i, \theta) d\lambda S_k, \quad d\varepsilon_k = \frac{2}{3} d\lambda S_k \quad k = 1, 2$$

$$d\lambda = \frac{S_1 d\sigma_1 + S_2 d\sigma_2}{S_i} \left[ g(\sigma_i, \theta) S_i + \frac{\delta_c P}{\varphi'_2(S_i)} \right]^{-1}$$

$$P = \frac{2S_i}{3\rho(\vartheta)} \left[ \cos(\theta - \vartheta) - \frac{\rho'(\vartheta)}{\rho(\vartheta)} \sin(\theta - \vartheta) \right]$$

или к трем уравнениям в полярных координатах и конечному соотношению

$$d\varepsilon_i = \frac{2}{3} S_i \cos(\theta - \vartheta) d\lambda, \quad \varepsilon_i d\vartheta = \frac{2}{3} S_i \sin(\theta - \vartheta) d\lambda$$

$$S_i d\theta = \cos \theta d\sigma_2 - \sin \theta d\sigma_1, \quad \varphi(S_i) = [\varepsilon_i / \rho(\vartheta)]_{max}$$

На рис.2 показаны результаты расчетов растяжения предварительно закрученного стержня (а), кручения предварительно растянутого стержня (б), сжатия предварительно закрученного стержня (в) и кручения предварительно сжатого стержня (г).

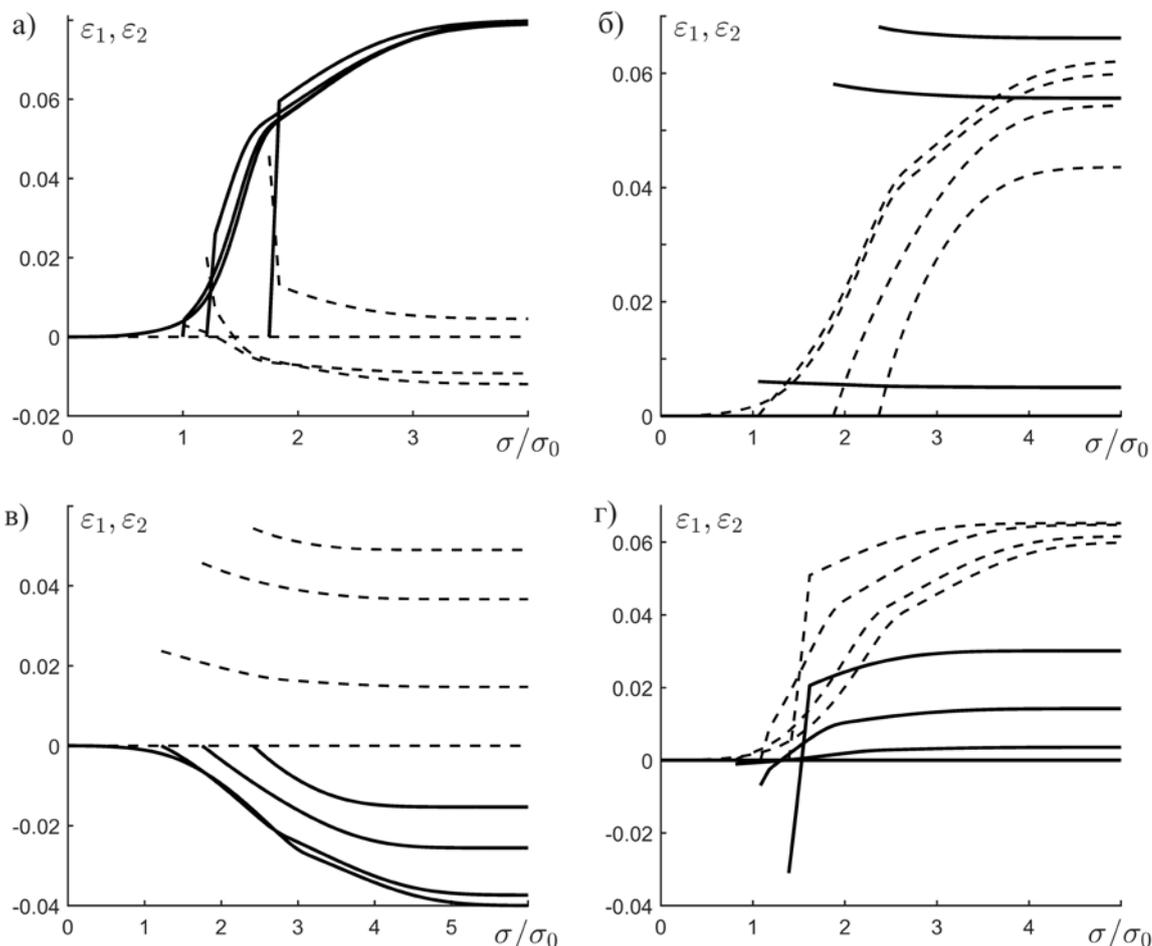


Рис.2. Совместное растяжение-сжатие и кручение стержня.

Материальные функции приведены в (17). Сплошные линии отвечают параметру растяжения-сжатия  $\varepsilon_1$ , пунктирные линии отвечают параметру кручения  $\varepsilon_2$ . Представлено по четыре варианта с разной величиной предварительной неупругой деформации (включая нулевую), полученной пропорциональным нагружением хаотического мартенсита.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck J., Delaey L. *Asymmetry of stress–strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys* // Acta Materialia. – 1998. – Vol.46. – No.12. – Pp.4325-4338.
2. Казарина С.А., Мовчан А.А., Сильченко А.Л. *Диаграммы мартенситной неупругости никелида титана при растяжении, сжатии и сжатии после растяжения* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2015. – Т.21. – №1. – С.83-93.
3. Lexcelent C., Vivet A., Bouvet C., Calloch S., Blanc P. *Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape-memory alloys* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2002. – Vol.50. – Iss.12. – Pp.2717-2735.
4. Wang Y.F., Yue Z.F., Wang J. *The effect of grain orientation on the tensile–compressive asymmetry of polycrystalline NiTi shape memory alloy* // Mat.-Wiss. u. Werkstofftech. – 2007. – Vol.38. – No.4. – Pp.294-298.
5. Novák V., Šittner P. *Micromechanics modelling of NiTi polycrystalline aggregates transforming under tension and compression stress* // Materials Science and Engineering: A. – 2004. – Vol.378. – Iss.1-2. – Pp.490-498.
6. Volkov A.E., Emelyanova E.V., Evard M.E., Volkova N.A. *An explanation of phase deformation tension–compression asymmetry of TiNi by means of microstructural modeling* // Journal of Alloys and Compounds. – 2013. – Vol.577. – No.Suppl.1. – Pp.S127-S130.
7. Qidwai M.A., Lagoudas D.C. *On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material* // International Journal of Plasticity. – 2000. – Vol.16. – Iss.10-11. – Pp.1309-1343.
8. Lubliner J., Auricchio F. *Generalized plasticity and shape-memory alloys* // Int. J. Solids Struct. – 1996. – Vol.33. – No.7. – Pp.991-1003.
9. Gillet Y., Patoor E., Berveiller M. *Calculation of pseudoelastic elements using a non-symmetrical thermomechanical transformation criterion and associated rule* // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. – 1998. – Vol.9. – Iss.5. – Pp.366-378.
10. Ильин А.А. *Механизм и кинетика фазовых и структурных превращений в титановых сплавах*. – М.: Наука, 1994. – 304 с.
11. Nishida M., Nishiura T., Kawano H., Inamura T. *Self-accommodation of B19' martensite in Ti–Ni shape memory alloys. Part I. Morphological and crystallographic studies of the variant selection rule* // Philosophical Magazine. – 2012. – Vol.92. – No.17. – Pp.2215-2233.
12. Казарина С.А., Мовчан А.А., Сильченко А.Л. *Экспериментальное исследование взаимодействия фазовых и структурных деформаций в сплавах с памятью формы* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №1. – С.85-98.
13. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений* // Изв. РАН. МТТ. – 2014. – №1. – С.37-53.
14. Мовчан А.А., Мишустин И.В., Казарина С.А. *Вариант микроструктурной модели деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2017. – №5. – С.6-11.

15. Mishustin I.V., Movchan A.A. *The microstructural model of mechanical behavior of a shape-memory alloy* // Nanoscience and Technology: An International Journal. – 2016. – Vol.7. – Iss.1. – Pp.77-91.
16. Мишустин И.В. *О фазовых переходах в стержне из сплава с памятью формы под действием электрического напряжения при неоднородном начальном фазовом состоянии* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №4/2. – С.629-638.
17. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. *Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Изв. РАН. МТТ. – 2010. – №3. – С.118-130.
18. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Изв. РАН. МТТ. – 2015. – №2. – С.78-95.
19. Петровский И.Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений* / Под ред. А.Д. Мышкиса, О.А. Оленник. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 296 с.

#### REFERENCES

1. Liu Y., Xie Z., Van Humbeeck J., Delaey L. *Asymmetry of stress–strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys*. Acta Materialia, 1998, Vol.46, No.12, Pp.4325-4338.
2. Kazarina S.A., Movchan A.A., Sil'chenko A.L. *Diagrammy martensitnoi neuprugosti nikelida titana pri rastiazhenii, szhatii i szhatii posle rastiazheniia [Nitinol's martensite inelasticity diagramm for tension, compression and tension after compression]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2015, Vol.21, No.1, Pp.83-93.
3. Lexcellent C., Vivet A., Bouvet C., Calloch S., Blanc P. *Experimental and numerical determinations of the initial surface of phase transformation under biaxial loading in some polycrystalline shape-memory alloys*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2002, Vol.50, Iss.12, Pp.2717-2735.
4. Wang Y.F., Yue Z.F., Wang J. *The effect of grain orientation on the tensile–compressive asymmetry of polycrystalline NiTi shape memory alloy*. Mat.-wiss. u. Werkstofftech, 2007, Vol.38, No.4, Pp.294-298.
5. Novák V., Šittner P. *Micromechanics modelling of NiTi polycrystalline aggregates transforming under tension and compression stress*. Materials Science and Engineering: A, 2004, Vol.378, Iss.1-2, Pp.490-498.
6. Volkov A.E., Emelyanova E.V., Evard M.E., Volkova N.A. *An explanation of phase deformation tension–compression asymmetry of TiNi by means of microstructural modeling*. Journal of Alloys and Compounds, 2013, Vol.577, No.Suppl.1, Pp.S127-S130.
7. Qidwai M.A., Lagoudas D.C. *On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material*. International Journal of Plasticity, 2000, Vol.16, Iss.10-11, Pp.1309-1343.
8. Lubliner J., Auricchio F. *Generalized plasticity and shape-memory alloys*. Int. J. Solids Struct., 1996, Vol.33, No.7, Pp.991-1003.
9. Gillet Y., Patoor E., Berveiller M. *Calculation of pseudoelastic elements using a non-symmetrical thermomechanical transformation criterion and associated rule*.

Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 1998, Vol.9, Iss.5, Pp.366-378.

10. Il'in A.A. *Mekhanizm i kinetika fazovykh i strukturnykh prevrashchenii v titanovykh splavakh [Mechanism and kinetics of phase and structural transformations in titanium alloys]*. – Moskva.: Nauka, 1994, 304 p.
11. Nishida M., Nishiura T., Kawano H., Inamura T. *Self-accommodation of B19' martensite in Ti–Ni shape memory alloys. Part I. Morphological and crystallographic studies of the variant selection rule*. Philosophical Magazine, 2012, Vol.92, No.17, Pp.2215-2233.
12. Kazarina S.A., Movchan A.A., Sil'chenko A.L. *Ekspierimental'noe issledovanie vzaimodeistviia fazovykh i strukturnykh deformatsii v splavakh s pamiat'iu formy [Experimental investigation of the interaction between phase and structure deformations in shape memory alloys]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.85-98.
13. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids, 2014, Vol.49, Iss.1, Pp.27-39.
14. Movchan A.A., Mishustin I.V., Kazarina S.A. *Variant mikrostrukturnoi modeli deformirovaniia splavov s pamiat'iu formy [A version of the microstructural model of shape memory alloy deformation]*. Deformatsiia i razrushenie materialov, 2017, No.5, Pp.6-11.
15. Mishustin I.V., Movchan A.A. *The microstructural model of mechanical behavior of a shape-memory alloy*. Nanoscience and Technology: An International Journal, 2016, Vol.7, Iss.1, Pp.77-91.
16. Mishustin I.V. *O fazovykh perekhodakh v sterzhne iz splava s pamiat'iu formy pod deistviem elektricheskogo napriazheniia pri neodnorodnom nachal'nom fazovom sostoianii [On phase transitions in shape memory alloy bar under the action of voltage in case of heterogeneous initial phase state]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2010, Vol.16, No.4/2, Pp.629-638.
17. Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L.G. *Micromechanical model of nonlinear deformation of shape memory alloys under phase and structure transitions*. Mechanics of Solids, 2010, Vol.45, Iss.3, Pp.406-416.
18. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, Iss.2, Pp.176-190.
19. Petrovskii I.G. *Lektsii po teorii obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [Lectures on the theory of ordinary differential equations]*. Pod red. A.D. Myshkisa, O.A. Olennik. – Moskva: Izdatel'stvo Moskovskogo Universiteta, 1984, 296 p.

Поступила в редакцию 23 октября 2017 года.

---

Сведения об авторе:

Мишустин Илья Владимирович – к.ф.-м.н., с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: [lewis@nm.ru](mailto:lewis@nm.ru)