УДК 539.3

О ДИСПЕРСИОННЫХ СВОЙСТВАХ ПОРИСТЫХ СРЕД*

Харченко К.Д.[1], Лыкосова Е.Д.[2]

[1]*ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия*
[2]*ФГБУН Институт прикладной механик РАН, г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

В статье исследованы динамические свойства пористой среды и установлена особенность, связанная с эффектом «запирания», т.е. с эффектом непроницаемости (отфильтровывания) для определенных длин волн в пористой среде. Исследование особенностей распространения продольных гармонических волн проводится на основе уравнений движения, полученных для пористой среды, и анализа дисперсионного уравнения. Диссипация энергии волны в среде не учитывается. Изучение распространения акустических волн в пористой среде позволяет развить представление о процессах, возникающих в неоднородных средах с полями дефектов. Модель пористости построена как частный случай общей модели сред Миндлина с учетом полей свободных деформаций, связанных с полями дефектов т.е. со структурными особенностями материала. В данной работе представлен вариант прикладной теории пористых сред, построенный как частный случай теории сред с сохраняющимися дислокациями. Приводится вариационная математическая постановка теории пористых сред, включающая определяющие уравнения, уравнения равновесия и краевые условия. Для обобщенной модели пористой среды записываются выражения для плотностей потенциальной и кинетической энергии. Кинетическая энергия имеет неклассический вид и определяется расширенным списком обобщенных переменных модели. Показано, что при определенной комбинации характеристик пористой среды возникает эффект «запирания», при котором пористая среда является фильтром для некоторого диапазона волн. Установлено, что для моделирования этого эффекта необходимо привлекать модель среды, учитывающую эволюцию дефектов - пор при деформировании.

Ключевые слова: пористые среды; волны; дисперсия; масштабные эффекты

DISPERSION PROPERTIES OF POROUS MEDIA

Kharchenko K.D.[1], Lykosova E.D.[2]

[1]*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*
[2]*Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

ABSTRACT

In the article we investigate the dynamic properties of a porous medium, and establish a feature associated with the effect of "locking" i.e. with the effect of impermeability (filtration) for certain wavelengths in a porous medium. Investigation of the singularities of the propagation of longitudinal harmonic waves is carried out on the basis of the equations of motion obtained for a porous medium and the analysis of the dispersion equation. Dissipation of wave energy in the medium is not considered. The study of the propagation of acoustic waves in a porous medium allows to develop an understanding of the processes that arise in inhomogeneous

* *Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 15-01-03649.*

medias with defect fields. The porosity model is constructed as a particular case of the general model of Mindlin's media with considering the fields of free deformations associated with defect fields, ie, with structural features of the material. In this paper, we present a variant of the applied theory of porous medias constructed as a special case of the theory of medias with conserved dislocations. It is given the variational mathematical formulation of the theory of porous medias which includes the determining equations, the equilibrium equations, and boundary conditions. For a generalized model of a porous medium, expressions for the densities of the potential and kinetic energy are written. The kinetic energy has a nonclassical form and is determined by an extended list of generalized variables of the model. It is shown that with a certain combination of characteristics of a porous medium, a "locking" effect occurs, in which the porous medium is a filter for a certain range of waves. It is established that to model this effect, it is necessary to involve a model of the medium which takes into account the evolution of defects- pores during deformation.

Keywords: porous medias; waves; dispersion; scale effects

ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемая теория материалов с пустотами начала развиваться в работах Cowin и Ninziato [1,2]. Изучаемая авторами теория существенно отличается от классической линейной ТУ, в том, что деформация объема, связанная с пустотами – порами, принимается как независимая кинематическая переменная. Последовательная вариационная модель пористых сред как частный случай сред с сохраняющимися дефектами представлена в работах [3-5]. В дальнейшем, на основе микродилатационной теории проводился анализ деформирования пористых конструкционных материалов [6], рассматривались задачи о толстостенных сферических и круглых цилиндрических оболочках, находящихся под действием внутреннего и внешнего давления [7]. Cowin [8] рассматривал задачи о распределении напряжений около круглого отверстия в пластине, подвергнутой одноосному растяжению вдали от отверстия. Работы [9-12] посвящены решению задаче Сен-Венана для упругого пористого материала. Температурные эффекты рассматривались в работах Iesan [13], где поля перемещений, температуры и напряжений имеют параметры, характеризующие влияние пористости. В работе [14] рассмотрен изгиб термоупругих пластин с учетом поперечной деформации сдвига. Birsan и Altenbach [15] использовали модели с нелинейными уравнениями для описания механического поведения пористых стержней.

В рассматриваемой среде под действием нагрузки будет происходить перераспределение пористости. Причем закрытие пор или образование пористости связано со знаком первых инвариантов тензоров напряжений и деформаций. С развитием дилатационной теории, можно получить уточненные прогнозы в отношении механического поведения сред, содержащих малое объемное содержание микроскопических пор-дефектов, которые даже в случае незначительного влияния на жесткость материала могут играть существенную роль в процессе накопления повреждений в задачах прочности и разрушения [16].

В работе Миндлина Р.Д. [17] была сформулирована линейная теория трехмерного упругого континуума с полями дефектов, обладающая некоторыми свойствами кристаллической решетки в результате включения в теорию идеи элементарной ячейки. Записывались уравнения движения, исследовались дисперсионные соотношения для волн с акустическими и оптическим ветвями. Стоит также отметить работы, касающиеся распространению волн в пористых средах [18,19] и посвященные рассмотрению дисперсионных соотношений для продольных и поперечных волн [20,21].

В данной работе исследуется корректная частная модель пористых сред с микроструктурой (по определению Миндлина), устанавливается система определяющих соотношений и формулируется согласованная постановка краевой задачи. При исследовании волновых процессов распространения продольных волн получены системы уравнений движения пористой среды. Для одномерной задачи решение строится в виде $u = u_a \exp i\left(\omega t - kx\right)$. Условие существования нетривиального решения приводит к дисперсионному закону $W\left(\omega, k\right) = 0$, связывающему частоту ω и волновое число k [21].

1. МОДЕЛИРОВАНИЕ СРЕД С ПОЛЯМИ ДЕФЕКТОВ КАК ИЗОТРОПНЫХ СРЕД С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Воспользуемся вариационным принципом, позволяющим найти вид функционала энергии для исследуемой среды. Для теории дефектных сред записываем Лагранжиан

$$
\begin{aligned}
&L = A - \iiint U_V\left(d_{mn}, D_{mn}, D_{mn,l}\right) dV \\
&U_V = \frac{1}{2}\left(C^{11}_{ijmn} d_{ij} d_{mn} + 2C^{12}_{ijmn} d_{ij} D_{mn} + C^{22}_{ijmn} D_{ij} D_{mn} + C_{ijkmnl} D_{ij,k} D_{mn,l}\right)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

здесь $A = \iiint\limits_V P_i^V R_i dV + \iint\limits_F P_i^F R_i dF$ – работа внешних объемных сил P_i^V, распределенных в объеме упругого тела V, и поверхностных сил P_i^F заданных на поверхности тела F на перемещениях R_i, U_V – плотность потенциальной энергии, $d_{ij} = \gamma_{ij} + \left(1/3\right)\theta\delta_{ij} - \omega_k Э_{ijk}$ – тензор дисторсии, γ_{ij} – компоненты тензора девиатора деформаций, θ – объемная деформация, ω_k – псевдовектор поворотов или упругих вращений, $Э_{ijk}$ – компоненты тензора Леви-Чивиты, δ_{ij} – тензор Кронекера, D_{ij} – тензор свободных дисторсий, C^{pq}_{ijmn} – тензоры модулей упругости, среди которых C^{11}_{ijmn} – тензор модулей упругости классической, неповрежденной дефектами среды, C^{12}_{ijmn} – тензор модулей упругости, описывающий перекрестные эффекты, связанные с взаимовлиянием полей стесненных деформаций и свободных деформаций, C^{22}_{ijmn} – тензор модулей упругости условной поврежденной среды с полем свободных деформаций, $C^{pq}_{ijmn} = \lambda^{pq}\delta_{ij}\delta_{mn} + \mu^{pq}\left(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}\right)$, $p,q = 1,2$, C_{ijkmnl} – тензор градиентных модулей, характеризующий масштабные эффекты, связанные с учетом свободных дисторсий.

Математическая модель рассматриваемой обобщенной среды полностью определяется вариационным равенством

$$
\begin{aligned}
\delta L &= \delta A - \iiint\left[\sigma_{ij}\delta d_{ij} + s_{ij}\delta D_{ij} + m_{ijk}\delta D_{ij,k}\right] dV = \\
&= \iiint\left[\left(\sigma_{ij,j} + P_i^V\right)\delta R_i + \left(m_{ijk,k} - s_{ij}\right)\delta D_{ij}\right] dV + \\
&+ \oiint\left\{\left[P_i^F - \sigma_{ij} n_j\right]\delta R_i - m_{ijk} n_k \delta D_{ij}\right\} dF = 0
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $\sigma_{ij} = \partial U_V / \partial d_{ij} = \left(C^{11}_{ijmn} d_{mn} + C^{12}_{ijmn} D_{mn} \right)$, $s_{ij} = \partial U_V / \partial D_{ij} = \left(C^{21}_{ijmn} d_{mn} + C^{22}_{ijmn} D_{mn} \right)$, $m_{ijk} = \partial U_V / \partial D_{ij,k} = C_{ijkmnl} D_{mn,l}$.

В работах [22,23] была установлена энергетическая эквивалентность модели дефектных сред и изотропной классической средой. На основании установленной эквивалентности, были получены выражения для эффективного модуля объемной деформации эквивалентной классической неоднородной среды

$$\tilde{K} = \frac{\sigma_{kk}}{R_{k,k}} = \frac{K^{11} R_{m,m} + K^{12} D_{mm}}{R_{k,k}} = K^{11} + K^{12} \frac{D_{mm}}{R_{k,k}} \tag{3}$$

а также уравнение для модуля сдвига эквивалентной неоднородной среды

$$\tilde{G} = \mu^{11} + \mu^{12} \sqrt{\left(\beta_{ab} \beta_{ab} \right) / \left(\gamma_{ab} \gamma_{ab} \right)} \tag{4}$$

где $K^{pq} = \left(2\mu^{pq} + 3\lambda^{pq} \right) / 3$, $p, q = 1, 2$; μ^{pq}, λ^{pq} – коэффициенты Ламе, $\gamma_{ab} = \left(R_{a,b}/2 + R_{b,a}/2 - R_{p,p} \delta_{ab}/3 \right)$ – девиатор стесненных деформаций, $\beta_{ab} = \left(D_{ab}/2 + D_{ba}/2 - D_{rr} \delta_{ab}/3 \right)$ – девиатор свободных деформаций.

Переменность по координатам модуля объемного сжатия (3) и модуля сдвига (4) определяется полями несовместных дисторсий D^2_{ij} и перемещений R_i, которые находятся как решение краевой задачи.

2. МОДЕЛИРОВАНИЕ СРЕДЫ С ПОРИСТОСТЬЮ КАК ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ С ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫМИ СВОЙСТВАМИ

Запищим Лагранжиан общей теории сред с полями дефектов

$$\begin{aligned} L = A - \frac{1}{2} \iiint \Big(& C^{11}_{ijmn} D^1_{ij} D^1_{mn} + 2 C^{12}_{ijmn} D^1_{ij} D^2_{mn} + C^{22}_{ijmn} D^2_{ij} D^2_{mn} + \\ & + C^{22}_{ijkmnl} D^2_{ij,k} D^2_{mn,l} \Big) dV \end{aligned} \tag{5}$$

где $C^{pq}_{ijmn} = \lambda^{pq} \delta_{ij} \delta_{mn} + \mu^{pq} \left(\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm} \right)$. Введем определения пористой среды

$$D^1_{ij} = R_{i,j}; \quad D^2_{ij} = \theta \delta_{ij}/3; \quad \theta \neq R_{k,k} \tag{6}$$

где D^1_{ij}, D^2_{ij} – стесненная и свободная дисторсия. Далее, подставляя определения (6) в Лагранжиан (5) и следуя алгоритму, приведенному в [23], получаем вариационное уравнение, интегрирование которого по частям приводит к уравнению, определяющему краевую задачу для сред с полями дефектов – пор

$$\begin{aligned} \delta L = \iiint \Big[& \left(C^{11}_{ijmn} R_{n,mj} + K^{12} \theta_{,i} + P^V_i \right) \delta R_i + \\ & + \left(K^{22} l_\theta^{\,2} \theta_{,kk} - K^{22} \theta - K^{12} R_{k,k} \right) \delta\theta \Big] + \\ & + \oiint \Big[\left(P^F_i - (C^{11}_{ijmn} R_{n,m} + K^{12} \theta \delta_{ij}) n_j \right) \delta R_i - K^{22} l_\theta^{\,2} \theta_{,k} n_k \delta\theta \Big] dF = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Поверхностный интеграл в выражении (7) определяет «статические» и «кинематические» краевые условия.

На основе решения для пористой среды и соотношений, приведенных в [20], запишем выражение для модуля объемного сжатия

$$\tilde{K} = K^{11} - \frac{K^{12} f}{1 - f} - \left(2\mu^{11} + \lambda^{11} \right) l_\theta^{\,2} \frac{\Delta R_{k,k}}{R_{k,k}} \tag{8}$$

где f – объемное содержание пор (θ дислокаций [5]), l_θ – масштабный параметр. Т.е. деградация свойств определяется «алгебраической поврежденностью» – первое слагаемое в (8) и эволюцией пор – второе слагаемое в том же выражении. В случае если $\Delta R_{k,k} / R_{k,k} \approx 0$ и $K^{12} = 0$ имеем идеальную неповрежденную среду.

3. ЗАКОН ДИСПЕРСИИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Рассмотрим распространение волн в пористой среде. Лагранжиан теории дефектных сред

$$L = A + K - U_V \tag{9}$$

где $K = K_{classic} + K_{grad}$ кинетическая энергия, являющаяся суммой классической и градиентной частей, которые представляют из себя функции скоростей деформации

$$\begin{aligned} K_{classic} &= \frac{1}{2}\int_V \int_0^t \rho \dot{R}_i \dot{R}_i dt dV \\ K_{grad} &= \frac{1}{2}\int_V \int_0^t \frac{1}{2}\left[\rho_0 R_t^2 + \rho_1 \theta_t^2 + \rho_2 R_t \theta_t \right] dt dV \end{aligned} \tag{10}$$

где ρ_1, ρ_2 – инертность полей дефектов – пор, δ_{ij} – тензор Кронекера. Запишем выражение (9) в расширенном виде

$$\begin{aligned} L = \Bigg\{ &\iiint_V P_i^V R_i dV + \iint_F P_i^F R_i dF + \frac{1}{2}\left[\rho_0 R_t^2 + \rho_1 \theta_t^2 + \rho_2 R_t \theta_t \right] dV - \\ &- \frac{1}{2}\iiint \left[C_{ijmn}^{11} R_{i,j} R_{n,m} + 2K^{12}\delta_{ij} R_{i,j}\theta + K^{22}\theta\theta + K^{22} l_\theta{}^2 \delta_{kl}\theta_{,k}\theta_{,l} \right] dV \Bigg\} dt \end{aligned} \tag{11}$$

где ρ_0 – классическая плотность (классическая мера инертности), ρ_1, ρ_2 – меры инерции, связанные с полями дефектов. В результате варьирования и интегрирования по частям в уравнения движения добавятся слагаемые вида $\rho_C \ddot{R}_{i,jj}$ в i-м уравнении движения (при вариации δR_i), изменятся граничные условия (в них войдут слагаемые вида $\left(\rho_C \dot{R}_{i,j} n_j \delta R_i \right)$ и добавятся начальные условия вида $\left(\rho_C \dot{R}_{i,j} \delta R_{i,j} \right)$. Отметим, что в рассматриваемой одномерной модели допускается формально что $\rho_2 \neq 0$. Однако в общем случае следует полагать, что $\rho_2 = 0$ в силу разной тензорной размерности поля перемещений и свободной деформации изменения объема.

Записываем вариационное уравнение для функционала (11)

$$\begin{aligned} \delta L = \int_0^t \Bigg\{ &\iiint_V \Big(P^V \delta R_i + \frac{1}{2}\big[\rho_0 R_{,t}\delta R_{,t} + \rho_1 \theta_{,t}\delta\theta_{,t} + \\ &+ \rho_2 \left(R_{,t}\delta\theta_{,t} + \theta_{,t}\delta R_{,t} \right) \big] \Big) dV + \iint_F P^F \delta R_i dF - \\ &- \iiint \Big[\left(C_{ijmn}^{11} R_{n,m} + K^{12}\theta\delta_{ij} \right) \delta R_{i,j} + \end{aligned} \tag{12}$$

$$+\left(K^{12}R_{k,k}+K^{22}\theta\right)\delta\theta+K^{22}l_\theta{}^2\theta_{,k}\delta\theta_{,k}\Big]dV\Big\}dt$$

Интегрируем по частям под знаком вариации в (12)

$$\begin{aligned}\delta L=\int_0^t\Big\{\iiint\Big[\left(C^{11}_{ijmn}R_{n,mj}+K^{12}\theta_{,i}+P_i^V-\rho_0R_{,tt}+\rho_2\theta_{,tt}\right)\delta R+\\+\left(K^{22}l_\theta{}^2\theta_{,kk}-K^{22}\theta-K^{12}R_{k,k}-\rho_1\theta_{,tt}+\rho_2R_{,tt}\right)\delta\theta\Big]dV+\\+\oiint\Big[\left(P_i^F-(C^{11}_{ijmn}R_{n,m}+K^{12}\theta\delta_{ij})n_j\right)\delta R-K^{22}l_\theta{}^2\theta_{,k}n_k\delta\theta\Big]dF\Big\}dt+\\+\iiint\Big[\left(\rho_0R_{,t}+\rho_2\theta_{,t}\right)\delta R+\left(\rho_1\theta_{,t}+\rho_2R_{,t}\right)\delta\theta\Big]dV\Big|_{t=0}^{t=t}=0\end{aligned}\qquad(13)$$

Зависимость фазовой скорости от длины волны (волнового числа или частоты) называется дисперсией волны. Если в системе есть дисперсия, то частота ω является нелинейной функцией волнового числа k [21]

$$\omega=W\left(k\right)$$

Фазовая скорость также зависит от волнового числа

$$c\left(k\right)=\frac{\omega}{k}=k^{-1}W\left(k\right)$$

Будем рассматривать распространение гармонических волн. Введем следующие выражения

$$R=R_0e^{i(kx-\omega t)},\quad \theta=\theta_0e^{i(kx-\omega t)}\qquad(14)$$

где R_0 и θ_0 – амплитуды, e – основание натурального логарифма, i – мнимая единица, k – волновое число (величина, обратная длине волны), ω – частота, t – время, x – продольная координата.

Вариационное уравнение (13) определяет краевую задачу для сред с полями дефектов – пор. Соответственно уравнения движения следуют из (13) как уравнения Эйлера. Запишем их в следующем виде

$$\begin{aligned}&ER''-K^{12}\theta'-\rho_0R_{tt}+\rho_2\theta_{tt}=0\\&K^{22}l_\theta{}^2\theta''-K^{22}\theta+K^{12}R'-\rho_1\theta_{tt}+\rho_2R_{tt}=0\end{aligned}\qquad(15)$$

Нижние индексы обозначают дифференцирование по независимой переменной – времени.

С учетом соотношений (14) уравнения движения (15) примут вид

$$ER_0i^2k^2-K^{12}\theta_0ik-\rho_0R_0i^2\omega^2+\rho_2\theta_0i^2\omega^2=0$$

$$K^{22}l_\theta{}^2\theta_0i^2k^2-K^{22}\theta_0+K^{12}R_0ik-\rho_1\theta_0i^2\omega^2+\rho_2R_0i^2\omega^2=0$$

Упростим систему и сгруппируем слагаемые с R_0 и θ_0

$$\begin{aligned}&-Ek^2R_0+\rho_0\omega^2R_0-K^{12}ik\theta_0-\rho_2\omega^2\theta_0=0\\&K^{12}ikR_0-\rho_2\omega^2R_0-K^{22}l_\theta{}^2k^2\theta_0-K^{22}\theta_0+\rho_1\omega^2\theta_0=0\end{aligned}\qquad(16)$$

Найдем определитель системы (16)

$$\begin{vmatrix}-Ek^2+\rho_0\omega^2 & -K^{12}ik-\rho_2\omega^2\\ K^{12}ik-\rho_2\omega^2 & -K^{22}l_\theta^2k^2-K^{22}+\rho_1\omega^2\end{vmatrix}=0$$

$$\begin{aligned}&\left(-Ek^2+\rho_0\omega^2\right)\left(-K^{22}l_\theta^2k^2-K^{22}+\rho_1\omega^2\right)-\\&-\left(-K^{12}ik-\rho_2\omega^2\right)\left(K^{12}ik-\rho_2\omega^2\right)=0\end{aligned}\qquad(17)$$

Рассмотрим несколько частных случаев. Первый: $l_\theta = 0;\ \rho_1 = \rho_2 = 0.$ Выражение (17) примет вид

$$\left(-Ek^2 + \rho_0\omega^2\right)\left(-K^{22}\right) - \left(-K^{12}ik\right)\left(K^{12}ik\right) = 0 \tag{18}$$

Упростим выражение (18) и выразим из него частоту, с учетом объемного содержания пор

$$\omega^2 = \frac{Ek^2}{\rho_0}\left(1 - \frac{f}{1-f}\frac{K^{12}}{E}\right) \tag{19}$$

В данном случае дисперсия отсутствует. Тогда, должно выполняться условие

$$\frac{f}{1-f}\frac{K^{12}}{E} < 1$$

Выразим модуль упругости через модуль сдвига G и коэффициент Пуассона ν

$$\frac{f}{1-f}\frac{K^{12}}{2G(1+\nu)} < 1 \tag{20}$$

Существуют такие значения коэффициента Пуассона и объемного содержания пор, при которых левая часть выражения (20) больше единицы, в таком случае пористая среда становится «непроницаемой» для распространения в ней любых длин волн. Данный эффект представляется нетипичным, поэтому необходимо использовать более корректное выражение для оценки частоты, учитывающее эволюцию пористости.

На рис.1 представлен график для частоты в зависимости от волнового числа, определенной выражением (19). Принято: $E = 71$ ГПа, $\rho_0 = 2700$ кг/м^3, $K^{12} = 65,73$ ГПа. Пять кривых соответствуют различному объемному содержанию пор: сплошная – отсутствие пористости, точечная $f = 0.05$, штриховая $f = 0.1$, штрихпунктирная $f = 0.2$, длинно штриховая $f = 0.3$. Из графика видно, что с ростом объемного содержания пор, при одном и том же волновом числе частота падает.

Рассмотрим второй случай: $l_\theta \neq 0;\ \rho_1 = \rho_2 = 0.$ Выражение (17) примет вид

$$\left(-Ek^2 + \rho_0\omega^2\right)\left(-K^{22}l_\theta^2k^2 - K^{22}\right) - \left(-K^{12}ik\right)\left(K^{12}ik\right) = 0.$$

Упростим его и выразим частоту. С учетом объемного содержания пор

$$\omega^2 = \frac{Ek^2}{\rho_0}\left(1 - \frac{f}{1-f}\frac{K^{12}}{E\left(l_\theta^2k^2 + 1\right)}\right). \tag{21}$$

На рис.2 представлен график правой части уравнения (21) в зависимости от волнового числа. Для расчета принято: $E = 71$ ГПа, $\rho_0 = 2700$ кг/м^3, $K^{12} = 65,73$ ГПа, $l_\theta = 0.4$. Пять кривых соответствуют различному объемному содержанию пор: сплошная – пористости $f = 0.1$, точечная $f = 0.5$, штриховая $f = 0.6$, штрихпунктирная $f = 0.7$, длинно штриховая $f = 0.8$. На графике видна характерная зона отрицательных значений, наблюдаемая при объемном содержание пор свыше 50%.

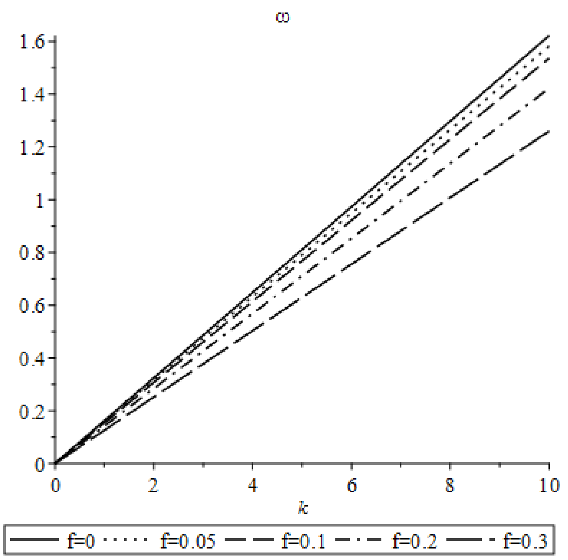

Рис.1. Распределение частоты (Гц) в зависимости от волнового числа.

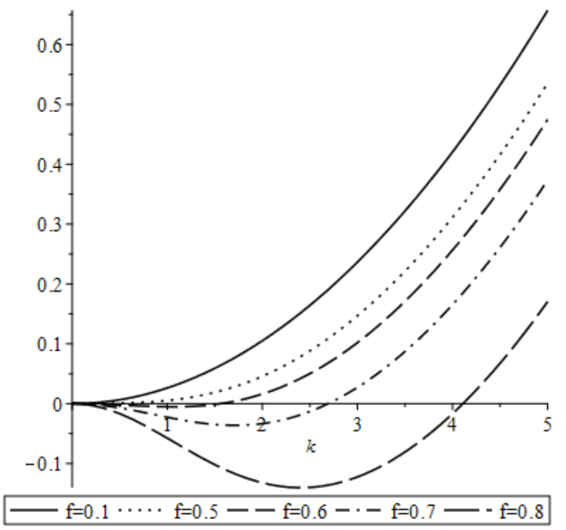

Рис.2. Распределение правой части уравнения (21) (Гц^2) в зависимости от волнового числа.

Рассмотрим третий случай $l_\theta \neq 0$; $\rho_1 \neq 0$; $\rho_2 \neq 0$. Выражение (17) в этом случае останется в исходном виде. Упрощая его получаем уравнение четвертой степени относительно частоты

$$\left(\rho_1\rho_0-\rho_2^2\right)\omega^4-\left(Ek^2\rho_1+K^{22}l_\theta^2k^2\rho_0-K^{22}\rho_0\right)\omega^2+$$
$$+EK^{22}k^2\left(l_\theta^2k^2+1-\frac{K^{12}K^{12}}{K^{22}E}\right)=0$$

Решив биквадратное уравнение получаем

$$\omega^2=\frac{1}{2}\frac{1}{\rho_0\rho_1-\rho_2^2}\Big[K^{22}\rho_0\left(l_\theta^2k^2-1\right)+Ek^2\rho_1+$$
$$+\sqrt{\frac{1-f}{f}\Bigg[EK^{12}k^4l_\theta^2\left(\frac{l_\theta^2\rho_0^2}{E}-2\rho_0\rho_1+4\rho_2^2+\frac{\rho_1^2}{K^{22}l_\theta^2}\right)+}$$

$$\overline{+2K^{12}k^2\left(-\rho_0\rho_1+2E\rho_2^2\right)+}$$

$$\left.\left.\overline{+\frac{f}{1-f}4K^{12}k^2\left(\rho_0\rho_1-K^{12}\rho_2^2\right)+K^{12}\rho_0^2}\right]\right]. \tag{22}$$

На рис.3 представлен график правой части уравнения (22) в зависимости от волнового числа. Для расчета принято: $E = 71$ ГПа, $\rho_0 = 2700$ кг/м^3, $K^{12} = 65{,}73$ ГПа, $l_\theta = 0.4$, $\rho_1 = 1500$ кг/м, $\rho_2 = 1010$ кг/м. Пять кривых соответствуют различному объемному содержанию пор: сплошная – пористости $f = 0.1$, точечная $f = 0.2$, штриховая $f = 0.3$, штрихпунктирная $f = 0.4$, длинно штриховая $f = 0.5$. На графике видна характерная зона отрицательных значений, наблюдаемая при малых значениях волнового числа.

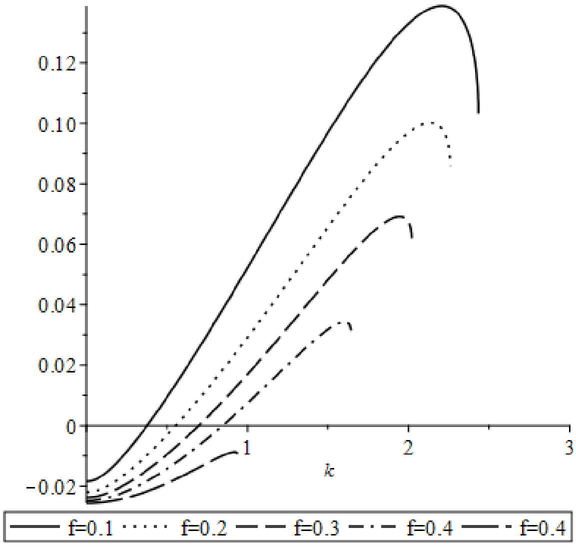

Рис.3. Распределение правой части уравнения (22) (Гц^2) в зависимости от волнового числа.

ВЫВОДЫ

В работе, на основе вариационного подхода дана корректная модель пористых сред. Используется уточненное описание НДС таких сред, в котором объемное содержание пористости изменяется под действием приложенных внешних нагрузок. Полученные аналитические соотношения позволяют по накопленной поврежденности за счет дефектов определить эффективные характеристики пористого материала. Проведена оценка дисперсионных соотношений для пористой среды. Исследованы случаи возможного упрощения модели, установлено, что пористая среда может стать «непроницаемой» для распространения волн с определенной длиной волны. Показано, что при анализе дисперсионных свойств пористых сред следует учитывать эволюцию дефектов-пор при деформировании среды.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cowin S.C., Nunziato J.W. *Linear elastic materials with voids* // Journal of elasticity. – 1983. – Vol.13. – №2. – Pp.125-147.

2. Nunziato J., Cowin S. *A nonlinear theory of elastic materials with voids* // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1979. – Vol.72. – №2. – Pp.175-201.
3. Белов П.А., Лурье С.А. *Континуальная модель микрогетерогенных сред* // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т.73. – №5. – С.833-848.
4. Лурье С.А., Белов П.А. *Вариационная формулировка математических моделей сред с микроструктурами* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2006. – №14. – С.114-132.
5. Лурье С.А., Белов П.А. *Теория сред с сохраняющимися дислокациями. Частные случаи: среды Коссера и Аэро-Кувшинского, пористые среды, среды с двойникованием* / Сборник трудов Современные проблемы механики гетерогенных сред. – 2005. – Т.1. – С.235-267.
6. Repka M., Sladek V., Sladek J. *Numerical analysis of poro-elastic materials described by the micro-dilatation theory*. – 2017. – Vol.100. – Pp.248-254.
7. Cowin S.C., Puri P. *The classical pressure vessel problems for linear elastic materials with voids* // Journal of Elasticity. – 1983. – Vol.13. – №2. – Pp.157-163.
8. Cowin S.C. *The stresses around a hole in a linear elastic material with voids* // Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. – 1984. – Vol.37. – Pp.441-465.
9. Dell'Isola F., Batra R.C. *Saint-Venant's problem for porous linear elastic materials* // Journal of elasticity. – 1997. – Vol.47. – №1. – Pp.73-81.
10. Iesan D., Scalia A. *On the deformation of functionally graded porous elastic cylinder* // Journal of Elasticity. – 2007. – Vol.87. – №2. – Pp.147-159.
11. Ghiba I. *Semi-inverse solution for Saint-Venant's problem in the theory of porous elastic materials* // Journal of Mechanics. – 2008. – Vol.27. – Pp.1060-1074.
12. Batra R.C., Yang J.S. *Saint-Venant's principle for linear elastic porous materials* // Journal of elasticity. – 1995. – Vol.39. – №3. – Pp.265-271.
13. Iesan D. *A theory of thermoelastic materials with voids* // Acta Mechanica. – 1986. – Vol.60. – №1-2. – Pp.67-89.
14. Birsan M. *A bending theory of porous thermoelastic plates* // Journal of thermal stresses. – 2003. – Vol.26. – №1. – Pp.67-90.
15. Birsan M., Altenbach H. *On the theory of porous elastic rods* // International Journal of Solids and Structures. – 2011. – Vol.48. – №6. – Pp.910-924.
16. Markov K.Z. *On a microstructural model of damage in solids* // International Journal of Engineering Science. – 1995. – Vol.33. – №1. – Pp.139-150.
17. Mindlin R.D. *Micro-structure in linear elasticity* // Archive for rational mechanics and analysis. – 1964. – Vol.16. – №1. – Pp.51-78.
18. Шагапов В.Ш., Хусаинов И.Г., Дмитриев В.Л. *Распространение линейных волн в насыщенных газом пористых средах с учетом межфазного теплообмена* // Прикладная механика и техническая физика. – 2004. – Т.45. – №4. – С.114-120.
19. Айзикович С.М., Ерофеев В.И., Леонтьева А.В. *Дисперсионные характеристики плоских продольных упругих волн, распространяющихся в пористой жидконасыщенной среде с полостями* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – №4. – С.175-186.
20. Николаевский В.Н., Басниев К.С., Горбунов А.Т., Зотов Г.А. *Механика насыщенных пористых сред*. – М.: Недра, 1970. – 339 с.

21. Ерофеев В.И., Кажаев В.В., Семерикова Н.П. *Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 208 с.
22. Ломакин Е.В., Лурье С.А., Белов П.А., Рабинский Л.Н. *Моделирование локально-функциональных свойств материала, поврежденного полями дефектов* // Доклады академии наук. – 2017. – Т.472. – №3. – С.282-285.
23. Харченко К.Д. *О функционально-градиентных эффективных свойствах пористой среды* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №3. – С.374-389.

REFERENCES

1. Cowin S.C., Nunziato J.W. *Linear elastic materials with voids.* Journal of elasticity, 1983, Vol.13, No.2, Pp.125-147.
2. Nunziato J., Cowin S. *A nonlinear theory of elastic materials with voids.* Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1979, Vol.72, No.2, Pp.175-201.
3. Belov P.A., Lur'e S.A. *Kontinual'naia model' mikrogeterogennykh sred [The continuum model of microheterogeneous media]*. Prikladnaia matematika i mekhanika, 2009, Vol.73, No.5, Pp.833-848.
4. Lur'e S.A., Belov P.A. *Variatsionnaia formulirovka matematicheskikh modelei sred s mikrostrukturami [Variational formulation of mathematical models of media with microstructures]*. Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika, 2006, No.14, Pp.114-132.
5. Lur'e S.A., Belov P.A. *Teoriia sred s sokhraniaiushchimisia dislokatsiiami. Chastnye sluchai: sredy Kossera i Aero-Kuvshinskogo, poristye sredy, sredy s dvoinikovaniem [Theory of media with conserved dislocations. Particular cases: Cosserat and Aero-Kuvshinsky environments, porous media, twinning media]*. Sbornik trudov Sovremennye problemy mekhaniki geterogennykh sred, 2005, Vol.1, Pp.235-267.
6. Repka M., Sladek V., Sladek J. *Numerical analysis of poro-elastic materials described by the micro-dilatation theory,* 2017, Vol.100, Pp.248-254.
7. Cowin S.C., Puri P. *The classical pressure vessel problems for linear elastic materials with voids.* Journal of Elasticity, 1983, Vol.13, No.2, Pp.157-163.
8. Cowin S.C. *The stresses around a hole in a linear elastic material with voids.* Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, 1984, Vol.37, Pp.441-465.
9. Dell'Isola F., Batra R.C. *Saint-Venant's problem for porous linear elastic materials.* Journal of elasticity, 1997, Vol.47, No.1, Pp.73-81.
10. Iesan D., Scalia A. *On the deformation of functionally graded porous elastic cylinder.* Journal of Elasticity, 2007, Vol.87, No.2, Pp.147-159.
11. Ghiba I. *Semi-inverse solution for Saint-Venant's problem in the theory of porous elastic materials.* Journal of Mechanics, 2008, Vol.27, Pp.1060-1074.
12. Batra R.C., Yang J.S. *Saint-Venant's principle for linear elastic porous materials.* Journal of elasticity, 1995, Vol.39, No.3, Pp.265-271.
13. Iesan D. *A theory of thermoelastic materials with voids.* Acta Mechanica, 1986, Vol.60, No.1-2, Pp.67-89.
14. Birsan M. *A bending theory of porous thermoelastic plates.* Journal of thermal stresses, 2003, Vol.26, No.1, Pp.67-90.
15. Birsan M., Altenbach H. *On the theory of porous elastic rods.* International Journal of Solids and Structures, 2011, Vol.48, No.6, Pp.910-924.

16. Markov K.Z. *On a microstructural model of damage in solids.* International Journal of Engineering Science, 1995, Vol.33, No.1, Pp.139-150.
17. Mindlin R.D. *Micro-structure in linear elasticity.* Archive for rational mechanics and analysis, 1964, Vol.16, No.1, Pp.51-78.
18. Shagapov V.Sh., Khusainov I.G., Dmitriev V.L. *Rasprostranenie lineinykh voln v nasyshchennykh gazom poristykh sredakh s uchetom mezhfaznogo teploobmena [Propagation of linear waves in gas-saturated porous media taking into account interphase heat transfer]*. Prikladnaia mekhanika i tekhnicheskaia fizika, 2004, Vol.45, No.4, Pp.114-120.
19. Aizikovich S.M., Erofeev V.I., Leont'eva A.V. *Dispersionnye kharakteristiki ploskikh prodol'nykh uprugikh voln, rasprostraniaiushchikhsia v poristoi zhidkonasyshchennoi srede s polostiami [Dispersion characteristics of plane longitudinal elastic waves propagating in a porous liquid-saturated medium with cavities]*. Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika, 2016, No.4, Pp.175-186.
20. Nikolaevskii V.N., Basniev K.S., Gorbunov A.T., Zotov G.A. *Mekhanika nasyshchennykh poristykh sred [Mechanics of saturated porous media]*. – M.: Nedra, 1970, 339 p.
21. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. *Volny v sterzhniakh. Dispersiia. Dissipatsiia. Nelineinost' [Waves in rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity]*. – Moskva: FIZMATLIT, 2002, 208 p.
22. Lomakin E.V., Lur'e S.A., Belov P.A., Rabinskii L.N. *Modelirovanie lokal'no-funktsional'nykh svoistv materiala, povrezhdennogo poliami defektov [Modeling of local-functional properties of a material damaged by defect fields]*. Doklady akademii nauk, 2017, Vol.472, No.3, Pp.282-285.
23. Kharchenko K.D. *O funktsional'no-gradientnykh effektivnykh svoistvakh poristoi sredy [On the functional-gradient effective properties of a porous medium]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2017, Vol.23, No.3, Pp.374-389.

Поступила в редакцию 19 октября 2017 года.

Сведения об авторах:

Харченко Кирилл Дмитриевич – асп., ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: work.air.fly@gmail.com

Лыкосова Елена Дмитриевна – м.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН (ИПРИМ РАН), г. Москва, Россия; e-mail: elykosova@mail.ru