

УДК 539.376

## СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ ИЗГИБНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ АРМИРОВАННЫХ МЕТАЛЛОКОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН В УСЛОВИЯХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ\*

Янковский А.П.

*ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

### АННОТАЦИЯ

Сформулирована задача механического поведения изгибаемых металлокомпозитных армированных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести всех материалов фаз композиции. Получены уравнения, с разной степенью точности описывающие напряженно-деформированное состояние в таких пластинах с учетом их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам. Как частные случаи из этих уравнений вытекают соотношения классической теории Кирхгофа, неклассической теории Рейсснера и второго варианта теории Тимошенко. На основе метода секущего модуля осуществлена линеаризация полученных уравнений. Для осесимметрично нагруженных и осесимметрично армированных кольцевых пластин, жестко закрепленных на одной кромке и статически нагруженных на другой кромке, разработан упрощенный вариант уточненной теории, сложность практической реализации которого сопоставима со сложностью теории Рейсснера. Проведены конкретные расчеты изгибного деформирования осесимметрично армированных кольцевых пластин при разных уровнях теплового воздействия. Показано, что с увеличением температуры точность расчетов в рамках традиционных теорий резко уменьшается, и все они не обеспечивают даже 20%-й точности определения податливости таких конструкций. Обнаружено, что армирование по направлениям главных осредненных напряжений и скоростей деформаций не всегда является рациональным с точки зрения уменьшения податливости пластин в условиях установившейся ползучести. Выявлено, что традиционные теории как классическая, так и неклассические могут приводить к неверному решению задач оптимального и рационального проектирования изгибаемых армированных тонкостенных элементов конструкций.

**Ключевые слова:** армированные пластины; металлокомпозитные конструкции; установившаяся ползучесть; теория Рейсснера; теория Тимошенко; уточненная теория изгиба

## COMPARATIVE ANALYSIS OF MODELS OF FLEXURAL DEFORMATION OF REINFORCED METAL-COMPOSITE PLATES IN CONDITIONS OF STEADY CREEP

Yankovskii A.P.

*Khristianovich Institute of theoretical and applied mechanics the Siberian Branch  
of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia*

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14-01-00102-а).

## ABSTRACT

The problem of the mechanical behavior is formulated for flexible metal-reinforced composite plates in conditions of steady creeping of all phases of the materials composition. The equations, describing with varying degrees of accuracy the stress-strain state in such plates with account of their weakened resistance to the transverse shears, are obtained. The equations of the classical Kirchhoff theory, of non-classical Reissner theory and of the second variant of Timoshenko theory are appeared as special cases of these equations. The linearization of the equations is carried out on base of the method of secant modulus. For axially loaded and axially reinforced annular plates with clamped one edge and statically loaded on another edge, the simplified variant of the improved theory was developed, for which the complexity of practical realizing is comparable with the complexity of Reissner theory. Specific calculations are carried out for the bending deformation of and axially reinforced annular plates at different levels of heat loadings. It is shown that with increasing temperature the accuracy of the calculations in the framework of the traditional theories is reduced and they do not provide even 20% accuracy of determining the flexibility of such structures. It is found that the reinforcement in the directions of the main averaged stress and strain rate is not always rational from the point of view of reducing the flexibility plates in conditions of steady creep. It is shown that the traditional theory of classical and nonclassical can lead to the wrong solution of problems of optimal and rational design of flexible reinforced thin-walled structural elements.

**Keywords:** reinforced plates; metal-composite constructions; steady-state creep; Reissner theory; Timoshenko theory; refined theory of bending

## ВВЕДЕНИЕ

В последние десятилетия в инженерной практике все более активное применение находят элементы конструкций, изготовленные из металлокомпозитов [1 и др.]. Известно, что при длительном нагружении металлоизделия (в том числе и металлокомпозитные) подавляющую часть времени работают в условиях установившейся ползучести [2-6 и др.], причем один из критериев длительной прочности металлов сформулирован на базе вычисления предельных неупругих деформаций, накопленных именно на стадии установившейся ползучести [6]. Этим определяется актуальность проблемы адекватного расчета механического поведения металлокомпозитных конструкций, работающих в таких условиях.

Особенности изгиба в условиях ползучести однородных металлических тонкостенных элементов изучались, например, в [2-4 и др.]. Теория же изгибного деформирования в условиях установившейся ползучести армированных металлокомпозитных конструкций типа пластин и оболочек в настоящее время находится в состоянии становления. Так, в [7,8 и др.] моделировалось изгибное поведение армированных металлокомпозитных пластин и пологих оболочек, работающих в условиях установившейся ползучести всех фаз композиции. Основные уравнения и соотношения в этих работах были построены на базе гипотез классической теории Кирхгофа. Однако, в [9,10] было показано, что классическая теория не обеспечивает требуемой точности расчетов установившейся ползучести армированных металлокомпозитных пластин при изгибе, так как не учитывает их ослабленного сопротивления поперечным сдвигам.

Как правило, ослабленное сопротивление пластин поперечным сдвигам учитывают в рамках гипотез теории Рейсснера [11-13 и др.], теории Миндлина [14 и др.] или второго варианта теории Тимошенко [15-17 и др.]. В частности,

в работах [9,10] использовался второй вариант теории Тимошенко. Исследования упругого изгибного деформирования анизотропных пластин показали, что не требуется уточнять разрешающие уравнения, полученные в рамках второго варианта теории Тимошенко [17]. Однако открытым до настоящего времени остается вопрос о приемлемости этой теории для адекватного расчета установившейся ползучести армированных металлокомпозитных пластин при изгибе или же требуется построение уточненных теорий. Самостоятельный интерес вызывает и точность теории Рейсснера применительно к исследованию изгибного поведения таких конструкций, поскольку из всех неклассических теорий она наиболее проста и получила наибольшее распространение в расчетной практике.

В силу этого настоящее исследование посвящено построению уточненной теории изгибаемых армированных металлокомпозитных пластин, материалы фаз композиции которых работают в условиях установившейся ползучести, и проведению сравнительного анализа решений, полученных в рамках теорий Кирхгофа, Рейсснера и второго варианта теории Тимошенко, а также по соотношениям уточненной теории.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В прямоугольной декартовой системе координат  $x_i$  рассматривается металлокомпозитная пластина толщиной  $2h$ , состоящая из регулярно чередующихся армированных слоев, параллельных отсчетной плоскости  $(x_1, x_2)$ , которая совмещена со срединной плоскостью пластины, а ось  $x_3$  направлена по ее толщине (рис.1). В направлении  $x_3$  армирование является квазиоднородным.

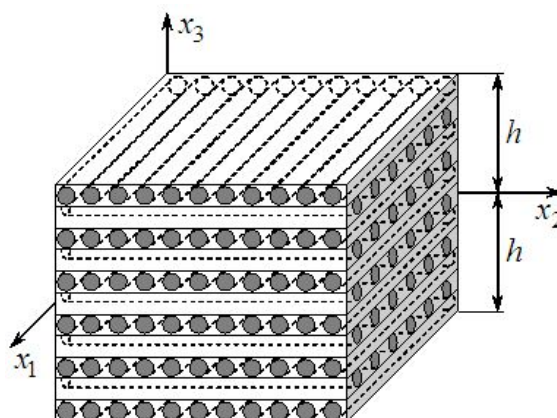


Рис.1. Элемент армированной металлокомпозитной пластины.

Предполагается: начальными деформациями можно пренебречь по сравнению с деформациями ползучести [2-4,7-9]; прогибы малы; температура в пластине однородна; материалы компонентов композиции изотропны и работают в условиях установившейся ползучести.

Для моделирования ослабленного сопротивления такой конструкции поперечным сдвигам аппроксимируем соответствующие скорости деформаций ползучести  $\xi_{i3}$  следующими соотношениями

$$\xi_{i3}(\mathbf{r}) = \beta \left[ \frac{x_3 + h}{2h} \xi_{i3}^{(+)}(\mathbf{x}) - \frac{x_3 - h}{2h} \xi_{i3}^{(-)}(\mathbf{x}) \right] + \frac{h^2 - \beta x_3^2}{h^2} \sum_{k=0}^K x_3^k \xi_{i3}^{(k)}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad \mathbf{x} = \{x_1, x_2\}, \quad \mathbf{r} = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad i = 1, 2,$$

где  $\xi_{i3}^{(\pm)}$  – скорости сдвиговых деформаций на верхней и нижней ( $x_3 = \pm h$ ) лицевых поверхностях пластины; при  $\xi_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$  функции  $\xi_{i3}^{(0)}$  определяют скорости поперечных деформаций сдвига в срединной плоскости  $x_3 = 0$ ;  $G$  – область, занимаемая пластиной в плане;  $\beta$  – параметр переключения.

При  $\beta = 0$ ,  $\xi_{i3}^{(k)}(\mathbf{x}) \equiv 0$  ( $0 \leq k \leq K$ ,  $i = 1, 2$ ) далее получаются соотношения, базирующиеся на гипотезах классической теории [3,4,7,8,12 и др.]. Если  $K = 0$  и  $\beta = 1$ , то из (1) следуют уравнения, соответствующие второму варианту теории Тимошенко [9,10]. В случае  $K \geq 1$  и  $\beta = 1$  получаются соотношения, уточняющие второй вариант теории Тимошенко, а при  $K = 0$  и  $\beta = 0$  из (1) следуют равенства, соответствующие теории Рейсснера [11-13].

Как обычно, обжатием пластины пренебрегаем [3,4,7-11,13-17], т.е. предполагаем, что скорость прогиба ползучести не зависит от координаты  $x_3$

$$v_3(\mathbf{r}) = v_3^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h. \quad (2)$$

Используя дифференциальные соотношения Коши [3,4], на основании (1), (2) получим

$$v_i(\mathbf{r}) = v_i^0(\mathbf{x}) - x_3 \partial_i v_3^0(\mathbf{x}) + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \xi_{i3}^{(k)}(\mathbf{x}) + \frac{\beta x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) \xi_{i3}^{(+)}(\mathbf{x}) - \frac{\beta x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) \xi_{i3}^{(-)}(\mathbf{x}), \quad (3)$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad i = 1, 2;$$

$$\begin{aligned} \xi_{12}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} (\partial_1 v_2 + \partial_2 v_1) = \frac{1}{2} (\partial_1 v_2^0 + \partial_2 v_1^0) - x_3 \partial_1 \partial_2 v_3^0 + \\ &+ \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \times (\partial_1 \xi_{23}^{(k)} + \partial_2 \xi_{13}^{(k)}) + \\ &+ \frac{\beta x_3}{2h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) (\partial_1 \xi_{23}^{(+)} + \partial_2 \xi_{13}^{(+)}) - \frac{\beta x_3}{2h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) (\partial_1 \xi_{23}^{(-)} + \partial_2 \xi_{13}^{(-)}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \xi_{ii}(\mathbf{r}) &= \partial_i v_i = \partial_i v_i^0 - x_3 \partial_i^2 v_3^0 + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \partial_i \xi_{i3}^{(k)} + \\ &+ \frac{\beta x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) \partial_i \xi_{i3}^{(+)} - \frac{\beta x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) \partial_i \xi_{i3}^{(-)}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad i = 1, 2,$$

где  $v_i$  – скорости ползучести точек пластины в тангенциальных направлениях  $x_i$  ( $i = 1, 2$ );  $v_i^0$  – то же для точек отсчетной плоскости ( $x_3 = 0$ );  $\partial_i$  – оператор дифференцирования по переменной  $x_i$ .

Таким образом, в соотношениях (1)-(4) неизвестными являются функции  $v_i^0$ ,  $v_3^0$ ,  $\xi_{i3}^{(\pm)}$ ,  $\xi_{i3}^{(k)}$  ( $i = 1, 2$ ,  $0 \leq k \leq K$ ), зависящие только от двух переменных  $x_1, x_2$ .

Предполагается, что механическое поведение рассматриваемого металлокомпозитного элемента (см. рис.1) в условиях установившейся ползучести описывается итерационной моделью 3, предложенной в [18], причем на предыдущей  $n$ -й итерации метода секущего модуля компоненты  $5 \times 5$ -матрицы  $A = \begin{pmatrix} a_{ij}^n \end{pmatrix}$  (см. формулу (52) в [18]) уже известны. Как показано в [9], матрица  $A$  имеет блочно-диагональный вид. Для удобства дальнейшего изложения ненулевые компоненты этой матрицы переобозначим так

$$b_{ij}^n \equiv a_{ij}^n \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad b_1^n \equiv a_{55}^n, \quad b_2^n \equiv a_{44}^n \quad (b_{ij}^n = b_{ji}^n). \quad (5)$$

С целью использования компактной формы записи соотношений (1)-(4) и приведенных ниже равенств над всеми неизвестными функциями (в том числе и над  $v_i^0$ ,  $v_3^0$ ,  $\xi_{i3}^{(\pm)}$ ,  $\xi_{i3}^{(k)}$ ,  $i = 1, 2$ ,  $0 \leq k \leq K$ ) не будем указывать верхний индекс  $n+1$ , означающий номер текущей итерации метода секущего модуля, а над коэффициентами, вычисленными на основе величин, приведенных в (5), и над самими этими величинами не будем указывать верхний индекс  $n$ , означающий номер предыдущей итерации, решение рассматриваемой задачи на которой предполагается уже известным.

Зная выражения для компонентов тензора осредненных скоростей деформаций ползучести  $\xi_{ij}$  (см. (1), (4)), на базе матричного равенства (52) из [18] с учетом (5) можем определить все компоненты осредненных напряжений  $\sigma_{ij}$  в каждой точке пластины (при этом в силу допущений из [18] имеем  $\sigma_{33} \approx 0$ )

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{r}) = & \sum_{i=1}^2 \mathbf{B}_i \left[ \partial_i v_i^0 - x_3 \partial_i^2 v_3^0 + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \partial_i \xi_{i3}^{(k)} + \right. \\ & \left. + \frac{\beta x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) \times \partial_i \xi_{i3}^{(+)} - \frac{\beta x_3}{h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) \partial_i \xi_{i3}^{(-)} \right] + \\ & + 2\mathbf{B}_3 \left[ \frac{1}{2} (\partial_1 v_2^0 + \partial_2 v_1^0) - x_3 \partial_1 \partial_2 v_3^0 + \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \times \right. \\ & \times \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) (\partial_1 \xi_{23}^{(k)} + \partial_2 \xi_{13}^{(k)}) + \frac{\beta x_3}{2h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) (\partial_1 \xi_{23}^{(+)} + \partial_2 \xi_{13}^{(+)}) - \\ & \left. - \frac{\beta x_3}{2h} \times \left( \frac{x_3}{2} - h \right) (\partial_1 \xi_{23}^{(-)} + \partial_2 \xi_{13}^{(-)}) \right], \quad (6) \end{aligned}$$

$$\sigma_{i3}(\mathbf{r}) = 2b_i \left( \frac{h^2 - \beta x_3^2}{h^2} \sum_{k=0}^K x_3^k \xi_{i3}^{(k)} + \beta \frac{x_3 + h}{2h} \xi_{i3}^{(+)} - \beta \frac{x_3 - h}{2h} \xi_{i3}^{(-)} \right),$$

$$i = 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h,$$

где

$$\sigma^* = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}\}, \quad \mathbf{B}_i^* = \{b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}\}, \quad i = \overline{1, 3}; \quad (7)$$

$\mathbf{V}_i$  – трехкомпонентный вектор-столбец, элементы которого на  $n$ -й итерации равны компонентам  $b_{ji}$   $i$ -го столбца  $3 \times 3$ -матрицы  $B$ , определенной равенствами (5); звездочка означает операцию транспонирования.

Определяющие соотношения (6) позволяют вычислить ( $n+1$ -ые) приближения внутренних силовых факторов в пластине

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^{(l)}(\mathbf{x}) &= \int_{-h}^h \boldsymbol{\sigma} x_3^l dx_3 = \sum_{i=1}^2 \left( \mathbf{A}_i^{(l)} \partial_i v_i^0 - \mathbf{B}_i^{(l)} \partial_i^2 v_3^0 + 2 \sum_{k=0}^K \mathbf{C}_i^{(l,k)} \partial_i \xi_{i3}^{(k)} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \mathbf{D}_i^{(l)} \partial_i \xi_{i3}^{(+)} - 2 \mathbf{E}_i^{(l)} \partial_i \xi_{i3}^{(-)} \right) + \mathbf{A}_3^{(l)} \left( \partial_1 v_2^0 + \partial_2 v_1^0 \right) - \\ &\quad - 2 \mathbf{B}_3^{(l)} \partial_1 \partial_2 v_3^0 + 2 \sum_{k=0}^K \mathbf{C}_3^{(l,k)} \left( \partial_1 \xi_{23}^{(k)} + \partial_2 \xi_{13}^{(k)} \right) + \\ &\quad + 2 \mathbf{D}_3^{(l)} \left( \partial_1 \xi_{23}^{(+)} + \partial_2 \xi_{13}^{(+)} \right) - 2 \mathbf{E}_3^{(l)} \left( \partial_1 \xi_{23}^{(-)} + \partial_2 \xi_{13}^{(-)} \right), \\ M_{i3}^{(l)}(\mathbf{x}) &= \int_{-h}^h \sigma_{i3} x_3^l dx_3 = 2 \sum_{k=0}^K g_i^{(l,k)} \xi_{i3}^{(k)} + 2 h_i^{(l)} \xi_{i3}^{(+)} - 2 p_i^{(l)} \xi_{i3}^{(-)}, \\ i &= 1, 2, \quad l = 0, 1, \dots, \frac{2}{3} K + 1, \quad \mathbf{x} \in G, \end{aligned} \quad (8)$$

где в соответствии с (7)

$$\mathbf{M}^{(l)} = \left\{ M_{11}^{(l)}, M_{22}^{(l)}, M_{12}^{(l)} \right\}^*, \quad l = 0, 1, \dots, \frac{2}{3} K + 1; \quad (9)$$

$\mathbf{A}_i^{(l)}$ ,  $\mathbf{B}_i^{(l)}$ ,  $\mathbf{C}_i^{(l,k)}$ ,  $\mathbf{D}_i^{(l)}$ ,  $\mathbf{E}_i^{(l)}$  – трехкомпонентные вектор-столбцы, элементы которых совпадают с компонентами  $i$ -ых столбцов  $3 \times 3$ -матриц  $A^{(l)} = (a_{ji}^{(l)})$ ,  $B^{(l)} = (b_{ji}^{(l)})$ ,  $C^{(l,k)} = (c_{ji}^{(l,k)})$ ,  $D^{(l)} = (d_{ji}^{(l)})$ ,  $E^{(l)} = (e_{ji}^{(l)})$  ( $i, j = \overline{1, 3}$ ), определяемых, согласно (6)-(8), так

$$\begin{aligned} A^{(l)}(\mathbf{x}) &= \int_{-h}^h B x_3^l dx_3, \quad B^{(l)}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h B x_3^{l+1} dx_3, \\ D^{(l)}(\mathbf{x}) &= \beta \int_{-h}^h B \frac{x_3^{l+1}}{2h} \left( \frac{x_3}{2} + h \right) dx_3, \quad E^{(l)}(\mathbf{x}) = \beta \int_{-h}^h B \frac{x_3^{l+1}}{2h} \left( \frac{x_3}{2} - h \right) dx_3, \\ C^{(l,k)}(\mathbf{x}) &= \int_{-h}^h B \frac{x_3^{l+k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) dx_3, \\ g_i^{(l,k)}(\mathbf{x}) &= \int_{-h}^h b_i \frac{x_3^{l+k}}{h^2} (h^2 - \beta x_3^2) dx_3, \quad h_i^{(l)}(\mathbf{x}) = \beta \int_{-h}^h b_i \frac{x_3^l}{2h} (x_3 + h) dx_3, \\ p_i^{(l)}(\mathbf{x}) &= \beta \int_{-h}^h b_i \frac{x_3^l}{2h} (x_3 - h) dx_3, \quad C^{(l,k)} = C^{(k,l)}, \\ B^{(l)} &= A^{(l+1)}, \quad g_i^{(l,k)} = g_i^{(k,l)}, \\ i &= 1, 2, \quad 0 \leq l \leq \frac{2}{3} K + 1, \quad 0 \leq k \leq K; \end{aligned} \quad (10)$$

$B$  –  $3 \times 3$ -матрица, столбцы которой определены в (7) с учетом (5). Здесь и далее принимается, что число  $K$  кратно трем. Согласно левым равенствам в (8) с учетом (9), имеем  $M_{ij}^{(0)} \equiv F_{ij}$ ,  $M_{ij}^{(1)} \equiv M_{ij}$  – мембранные усилия и изгибающие и крутящие

моменты в пластине;  $M_{i3}^{(0)} \equiv F_{i3}$  ( $i, j = 1, 2$ ) – поперечные силы; остальные силовые факторы – математические моменты высших порядков.

Для получения дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять внутренние силовые факторы (8), (9), используем уравнения равновесия для композитной среды

$$\partial_1 \sigma_{i1} + \partial_2 \sigma_{i2} + \partial_3 \sigma_{i3} = -X_i(\mathbf{r}), \quad i = \overline{1, 3}, \quad \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| \leq h, \quad (11)$$

где  $X_i$  – компоненты объемной нагрузки, действующей на материал армированной композиции. Умножим равенства (11) на  $x_3^l$  и результат проинтегрируем по толщине пластины, тогда с учетом левых равенств (8) и обозначения (9) будем иметь

$$\begin{aligned} \partial_1 M_{i1}^{(l)} + \partial_2 M_{i2}^{(l)} - l M_{i3}^{(l-1)} &= -X_i^{(l)} - h^l \left[ \sigma_{i3}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{i3}^{(-)} \right] \\ \left( 0 \leq l \leq \frac{2}{3} K + 1 \right), \\ \partial_1 M_{13}^{(l)} + \partial_2 M_{23}^{(l)} &= -X_3^{(l)} + l \int_{-h}^h x_3^{l-1} \sigma_{33}^n dx_3 - h^l \left[ \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] \\ \left( 0 \leq l \leq \frac{2}{3} K \right), \\ i &= 1, 2, \quad \mathbf{x} \in G, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$X_i^{(l)}(\mathbf{x}) = \int_{-h}^h X_i(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad \sigma_{i3}^{(\pm)}(\mathbf{x}) = \sigma_{i3}(\mathbf{x}, \pm h), \quad i = \overline{1, 3}. \quad (13)$$

(При выводе равенств (12) использовались формулы интегрирования по частям.)

В равенства (12) не входят моменты высших порядков  $M_{13}^{(l)}$  и  $M_{23}^{(l)}$  при  $l = \frac{2}{3} K + 1$ , поэтому их можно не вычислять по формулам (8) с учетом (10).

Напряжения  $\sigma_{i3}^{(\pm)}$  (см. (13)) известны из статических граничных условий, заданных на лицевых поверхностях пластины  $x_3 = \pm h$ . Приближение же напряжения  $\sigma_{33}^n(\mathbf{r})$  в последнем равенстве (12) предполагается известным из решения на предыдущей  $n$ -й итерации метода секущего модуля, поэтому интеграл в этом соотношении перенесен вправо.

Так как толщина пластины много меньше ее характерного размера в плане, напряжение  $\sigma_{33}$  можно аппроксимировать по переменной  $x_3$  полиномами Эрмита. В качестве начального приближения при этом может быть использован кубический полином, вычисленный по известным значениям  $\sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x})$  и  $\partial_3 \sigma_{33}|_{x_3=\pm h} = -X_3(\mathbf{x}, \pm h) - \partial_1 \sigma_{13}^{(\pm)}(\mathbf{x}) - \partial_2 \sigma_{23}^{(\pm)}(\mathbf{x})$  (см. уравнение (11) при  $i = 3$ ). При  $X_3 \equiv 0$ ,  $\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$  ( $i = 1, 2$ ), в частности, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(\mathbf{r}) &= -\frac{\sigma_{33}^{(+)}(\mathbf{x}) - \sigma_{33}^{(-)}(\mathbf{x})}{4h^3} x_3 (x_3^2 - 3h^2) + \frac{\sigma_{33}^{(+)}(\mathbf{x}) + \sigma_{33}^{(-)}(\mathbf{x})}{2}, \\ \mathbf{x} \in G, \quad |x_3| &\leq h. \end{aligned} \quad (14)$$

После стабилизации итерационного процесса в рамках метода секущего модуля уточнение выражения  $\sigma_{33}^n(\mathbf{r})$  возможно за счет использования полиномов Эрмита более высоких порядков, основанных как на значениях  $\sigma_{33}^{(\pm)}(\mathbf{x})$  и  $\partial_3 \sigma_{33}|_{x_3=\pm h}$  (см. (14)), так и на дополнительных значениях  $\partial_3 \sigma_{33}^n$ , известных на  $n$ -й итерации во внутренних точках пластины  $x_3 \in (-h, h)$ . Эти дополнительные значения также получаются из уравнения (11) при  $i=3$ , если в нем все напряжения заменить их  $n$ -ми приближениями с учетом того, что на предыдущей  $n$ -й итерации касательные напряжения  $\sigma_{13}$ ,  $\sigma_{23}$  уже определены на основании соотношений (6). Чем больше используется промежуточных (по направлению  $x_3$ ) значений  $\partial_3 \sigma_{33}^n$ , тем точнее удастся аппроксимировать напряжение  $\sigma_{33}^n$  полиномами Эрмита высоких порядков.

Подставив полученную аппроксимацию  $\sigma_{33}^n$  в равенство (12) (например, подставив (14) в (12)), на текущей  $(n+1)$ -й итерации с учетом (13) получим искомую систему дифференциальных уравнений, которым должны удовлетворять введенные в (8) внутренние силовые факторы, причем правые части этих уравнений – известные функции. К этой системе необходимо добавить четыре статических граничных условия на лицевых поверхностях пластины (см. (6))

$$2b_i(\mathbf{x}, \pm h) \left( \frac{h^2 - \beta x_3^2}{h^2} \sum_{k=0}^K x_3^k \xi_{i3}^{(k)} + \beta \frac{x_3 + h}{2h} \xi_{i3}^{(+)} - \beta \frac{x_3 - h}{2h} \xi_{i3}^{(-)} \right) \Big|_{x_3=\pm h} =$$

$$= \sigma_{i3}^{(\pm)}(\mathbf{x}), \quad (15)$$

$$\mathbf{x} \in G, \quad i=1, 2,$$

где правые части – известные функции; коэффициенты  $b_i$ , согласно (5), известны из решения на предыдущей  $n$ -й итерации.

В случае использования второго варианта теории Тимошенко или его уточнения ( $\beta=1, K \geq 0$ ) из равенств (15) на текущей  $(n+1)$ -й итерации можно однозначно определить функции  $\xi_{i3}^{(\pm)}(\mathbf{x})$ ,  $i=1, 2$ . В случаях же использования теории Рейсснера ( $\beta=0, K=0$ ) или классической теории ( $\beta=0, \xi_{i3}^{(k)} \equiv 0$ ) равенства (15) (т.е. статические граничные условия по касательным напряжениям на лицевых поверхностях пластины) в общем случае удовлетворить не удастся.

Для однозначного интегрирования рассматриваемой задачи на кромках пластины должны быть заданы соответствующие граничные условия. Пусть на одной части торцевой поверхности пластины (обозначим ее  $G_\sigma$ ) заданы статические граничные условия

$$\sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 = \sigma_{nm},$$

$$(\sigma_{22} - \sigma_{11})n_1n_2 + \sigma_{12}(n_1^2 - n_2^2) = \sigma_{n\tau}, \quad (16)$$

$$\sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 = \sigma_{n3}, \quad n_1 = \cos \alpha, \quad n_2 = \sin \alpha, \quad \mathbf{r} \in G_\sigma,$$

а на другой части торцевой поверхности (обозначим ее  $G_\nu$ ) заданы кинематические граничные условия (см. (2), (3))



$$v_3^0(\mathbf{x}) = v_{30}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_v; \quad (17)$$

$$v_i(\mathbf{r}) = v_{i0}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in G_v, \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

где  $\sigma_{mn}$ ,  $\sigma_{n\tau}$ ,  $\sigma_{n3}$  – нормальная, касательная (в плоскости  $x_3 = \text{const}$ ) и поперечная (в направлении  $x_3$ ) внешние поверхностные нагрузки, заданные на  $G_\sigma$ ;  $\Gamma_v$  – проекция части торцевой поверхности  $G_v$  на отсчетную плоскость  $x_3 = 0$  (т.е.  $\Gamma_v$  – часть контура  $\Gamma$ , ограничивающего область  $G$ , занимаемую пластиной в плане);  $v_{30}(\mathbf{x})$  – заданная на  $\Gamma_v$  скорость прогиба установившейся ползучести;  $v_{i0}$  – заданные на торцевой поверхности  $G_v$  скорости ползучести в тангенциальных направлениях  $x_i$  ( $i = 1, 2$ );  $\alpha$  – угол, задающий направление внешней нормали к контуру  $\Gamma$  (или, что то же самое, к торцевой поверхности  $G_\sigma \cup G_v$ ) и отсчитываемый от направления  $x_1$ .

Для получения статических граничных условий, записанных в силовых факторах (8), умножим (16) на  $x_3^l$  и проинтегрируем результат по толщине пластины, тогда с учетом левых равенств (8) и соотношений (7), (9) будем иметь

$$M_{11}^{(l)} n_1^2 + M_{22}^{(l)} n_2^2 + 2M_{12}^{(l)} n_1 n_2 = M_{mn}^{(l)},$$

$$(M_{22}^{(l)} - M_{11}^{(l)}) n_1 n_2 + M_{12}^{(l)} (n_1^2 - n_2^2) = M_{n\tau}^{(l)} \quad (0 \leq l \leq \frac{2}{3}K + 1), \quad (19)$$

$$M_{13}^{(l)} n_1 + M_{23}^{(l)} n_2 = M_{n3}^{(l)} \quad (0 \leq l \leq \frac{2}{3}K), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma,$$

где

$$M_{mn}^{(l)} \equiv \int_{-h}^h \sigma_{mn} x_3^l dx_3, \quad M_{n\tau}^{(l)} \equiv \int_{-h}^h \sigma_{n\tau} x_3^l dx_3, \quad M_{n3}^{(l)} \equiv \int_{-h}^h \sigma_{n3} x_3^l dx_3; \quad (20)$$

$\Gamma_\sigma$  – проекция части торцевой поверхности  $G_\sigma$  на отсчетную плоскость  $x_3 = 0$ ;  $M_{mn}^{(l)}$ ,  $M_{n\tau}^{(l)}$ ,  $M_{n3}^{(l)}$  – заданные на контуре  $\Gamma_\sigma$  силовые факторы, причем, согласно (20),  $M_{mn}^{(0)}$ ,  $M_{n\tau}^{(0)}$  – заданные нормальная и касательная к  $\Gamma_\sigma$  мембранные силы,  $M_{n3}^{(0)}$  – заданная поперечная сила,  $M_{mn}^{(l)}$ ,  $M_{n\tau}^{(l)}$  – заданные на  $\Gamma_\sigma$  изгибающий и крутящий моменты (остальные величины в правых частях (19) – известные математические моменты высших порядков).

Разложения (3) являются конечными, поэтому кинематические граничные условия (18) нельзя удовлетворить в каждой точке  $\mathbf{r}$  торцевой поверхности пластины  $G_v$  при произвольной зависимости функций  $v_{i0}$  от поперечной координаты  $x_3$ . В силу этого, по аналогии со статическими граничными условиями (см. (16), (19), (20)) кинематические условия (18) на кромке пластины будем также удовлетворять в интегральном смысле, т.е. проинтегрируем граничные условия (18) по толщине пластины с весами  $x_3^l$ , тогда с учетом выражений (3) получим

$$\frac{h^{l+1}}{l+1} (1 - (-1)^{l+1}) v_i^0 - \frac{h^{l+2}}{l+2} (1 - (-1)^{l+2}) \partial_i v_3^0 +$$

$$+ 2 \sum_{k=0}^K h^{k+l+2} (1 - (-1)^{l+k+2}) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left( \frac{1}{(k+1)(l+k+2)} - \frac{\beta}{(k+3)(l+k+4)} \right) \xi_{i3}^{(k)} + \\
& + \beta h^{l+2} \left[ \frac{1}{2(l+3)} \left( 1 - (-1)^{l+3} \right) + \frac{1}{l+2} \left( 1 - (-1)^{l+2} \right) \right] \xi_{i3}^{(+)} - \\
& - \beta h^{l+2} \left[ \frac{1}{2(l+3)} \left( 1 - (-1)^{l+3} \right) - \frac{1}{l+2} \left( 1 - (-1)^{l+2} \right) \right] \xi_{i3}^{(-)} = v_{i0}^{(l)}(\mathbf{x}), \\
& \mathbf{x} \in \Gamma_\nu, \quad i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1,
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$v_{i0}^{(l)}(\mathbf{x}) \equiv \int_{-h}^h v_{i0}(\mathbf{r}) x_3^l dx_3, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\nu, \quad \mathbf{r} \in G_\nu, \quad i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq K+1. \tag{22}$$

Таким образом, для однозначного интегрирования рассматриваемой задачи в каждой точке контура  $\Gamma$  должны быть заданы статические граничные условия (19) с учетом (20) или кинематические условия (17), (21) с учетом (22). Возможно задание и смешанных из (17), (19), (21) граничных условий, например в случае свободного опирания кромки, к которым при  $\beta=1$  следует присоединить равенства (15) при  $\mathbf{x} \in \Gamma$ .

Подстановка соотношений (8) с учетом (9) в равенства (12) приводит к уравнениям равновесия, записанным в разрешающем виде

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^2 \partial_j F_m^{(l)}(\mathbf{v}^0, \xi_{13}, \xi_{23}) - 2l \sum_{k=0}^K g_i^{(l-1,k)} \xi_{i3}^{(k)} = \\
& = -X_i^{(l)} - h^l \left[ \sigma_{i3}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{i3}^{(-)} \right] - \sum_{j=1}^2 \partial_j P_m^{(l)}(\xi^{(+)}, \xi^{(-)}) + \\
& + 2l \left( h_i^{(l-1)} \xi_{i3}^{(+)} - p_i^{(l-1)} \xi_{i3}^{(-)} \right) \quad (i=1, 2, \quad 0 \leq l \leq \frac{2}{3}K+1), \\
& 2 \sum_{j=1}^2 \partial_j \sum_{k=0}^K g_j^{(l,k)} \xi_{j3}^{(k)} = -X_3^{(l)} + l \int_{-h}^h x_3^{l-1} \sigma_{33}^n dx_3 - h^l \left[ \sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)} \right] - \\
& - 2 \sum_{j=1}^2 \partial_j \left( h_j^{(l)} \xi_{j3}^{(+)} - p_j^{(l)} \xi_{j3}^{(-)} \right) \quad (0 \leq l \leq \frac{2}{3}K), \quad \mathbf{x} \in G,
\end{aligned} \tag{23}$$

где операторы  $F_m^{(l)}$ ,  $P_m^{(l)}$  имеют следующую структуру

$$\begin{aligned}
F_m^{(l)}(\mathbf{v}^0, \xi_{13}, \xi_{23}) & \equiv \sum_{s=1}^2 \left( a_{ms}^{(l)} \partial_s v_s^0 - b_{ms}^{(l)} \partial_s^2 v_3^0 + 2 \sum_{k=0}^K c_{ms}^{(l,k)} \partial_s \xi_{s3}^{(k)} \right) + \\
& + a_{m3}^{(l)} \left( \partial_1 v_2^0 + \partial_2 v_1^0 \right) - 2b_{m3}^{(l)} \partial_1 \partial_2 v_3^0 + 2 \sum_{k=0}^K c_{m3}^{(l,k)} \left( \partial_1 \xi_{23}^{(k)} + \partial_2 \xi_{13}^{(k)} \right), \\
P_m^{(l)}(\xi^{(+)}, \xi^{(-)}) & \equiv 2 \sum_{s=1}^2 \left( d_{ms}^{(l)} \partial_s \xi_{s3}^{(+)} - e_{ms}^{(l)} \partial_s \xi_{s3}^{(-)} \right) + 2d_{m3}^{(l)} \left( \partial_1 \xi_{23}^{(+)} + \partial_2 \xi_{13}^{(+)} \right) - \\
& - 2e_{m3}^{(l)} \left( \partial_1 \xi_{23}^{(-)} + \partial_2 \xi_{13}^{(-)} \right), \quad \mathbf{v}^0 \equiv \{v_1^0, v_2^0, v_3^0\},
\end{aligned} \tag{24}$$

$$\xi_{i3} \equiv \{ \xi_{i3}^{(0)}, \xi_{i3}^{(1)}, \dots, \xi_{i3}^{(K)} \}, \quad \xi^{(\pm)} \equiv \{ \xi_{13}^{(\pm)}, \xi_{23}^{(\pm)} \}, \quad i=1, 2;$$

$$m = \begin{cases} j & \text{при } j=i, \\ 3 & \text{при } j \neq i; \end{cases} \tag{25}$$

$a_{ms}^{(l)}$ ,  $b_{ms}^{(l)}$ ,  $c_{ms}^{(l,k)}$ ,  $d_{ms}^{(l)}$ ,  $e_{ms}^{(l)}$  – компоненты матриц  $A^{(l)}$ ,  $B^{(l)}$ ,  $C^{(l,k)}$ ,  $D^{(l)}$ ,  $E^{(l)}$  соответственно (см. (10)).

В равенствах (23), (24) нужно учесть соотношения (10), (13).

Для получения статических граничных условий в разрешающем виде подставим соотношения (8) с учетом (9), (20), (24) в равенства (19), тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 n_i n_j F_m^{(l)}(\mathbf{v}^0, \xi_{13}, \xi_{23}) &= M_{nn}^{(l)} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 n_i n_j P_m^{(l)}(\xi^{(+)}, \xi^{(-)}), \\ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^i n_{3-i} n_j F_m^{(l)}(\mathbf{v}^0, \xi_{13}, \xi_{23}) &= M_{nt}^{(l)} - \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 (-1)^i n_{3-i} n_j \times \\ &\times P_m^{(l)}(\xi^{(+)}, \xi^{(-)}) \quad (0 \leq l \leq \frac{2}{3}K + 1), \\ \sum_{j=1}^2 n_j \sum_{k=0}^K g_j^{(l,k)} \xi_{j3}^{(k)} &= \frac{1}{2} M_{n3}^{(l)} - \sum_{j=1}^2 n_j (h_j^{(l)} \xi_{j3}^{(+)} - p_j^{(l)} \xi_{j3}^{(-)}) \\ (0 \leq l \leq \frac{2}{3}K), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_\sigma, \end{aligned} \tag{26}$$

где индекс  $m$  определяется по формуле (25).

В уравнениях (23), (26) в правые части перенесены все известные на текущей  $(n+1)$ -й итерации слагаемые, содержащие функции  $\xi_{j3}^{(\pm)}$ , которые предварительно определены из (15) при  $\beta=1$ . В случае же  $\beta=0$  перенесенные в правые части (23), (26) слагаемые, согласно (10) и (24), тождественно равны нулю.

Таким образом, для решения рассматриваемой задачи необходимо использовать уравнения (15), (23) при статических (26) и кинематических (17), (21) граничных условиях.

Применяя известные формулы перехода от прямоугольной декартовой системы координат к цилиндрической [19], приведенные выше разрешающие уравнения и граничные условия можно записать в полярной системе координат.

## 2. МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим случай изгиба кольцевой пластины, имеющей постоянную толщину  $2h$  и ограниченной кромками радиусов  $r_0, r_1$  ( $r_0 < r_1$ ). Точки пластины задаются в цилиндрической системе координат  $x_i$ , где  $x_1$  – полярный радиус,  $x_2$  – полярный угол,  $x_3$  – осевое направление. Закрепление и нагружение пластины не зависят от окружной координаты  $x_2$ , внешние силы в этом направлении также отсутствуют. Металлокомпозитная пластина усилена осесимметрично двумя семействами волокон с одинаковыми плотностями армирования ( $\omega_1(x_1) = \omega_2(x_1)$ ; см. [9,18]) и по радиально-симметричным направлениям:  $\psi_1(x_1) = -\psi_2(x_1)$ ,  $r_0 \leq x_1 \leq r_1$ , где  $\psi_k$  – угол армирования волокнами  $k$ -го семейства, отсчитываемый от направления полярного радиуса  $x_1$  (рис.2).

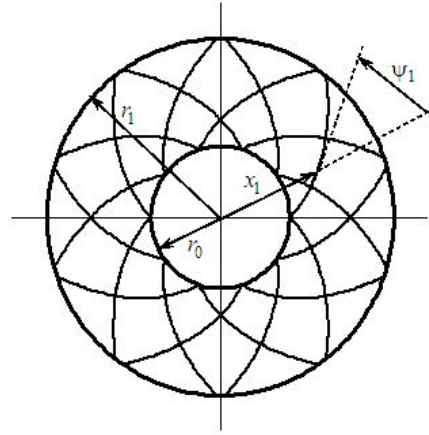


Рис.2. Спиральная структура армирования кольцевой пластины.

Согласно [9,18], при такой структуре армирования следующие компоненты матрицы  $B$  тождественно равны нулю (см. (5))

$$b_{13} = b_{31} = b_{23} = b_{32} \equiv 0. \quad (27)$$

В силу (5) с учетом (27) и особенностей закрепления и нагружения рассматриваемой пластины решение о ее деформировании в условиях установившейся ползучести не зависит от окружной координаты  $x_2$ , т.е. реализуется случай осесимметричного изгиба, причем

$$\begin{aligned} v_2(x_1, x_3) &\equiv 0, \quad \xi_{12}(x_1, x_3) = \xi_{23}(x_1, x_3) \equiv 0, \\ \sigma_{12}(x_1, x_3) &= \sigma_{23}(x_1, x_3) \equiv 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Для простоты исследуется случай, когда на лицевых поверхностях  $x_3 = \pm h$  касательные нагрузки отсутствуют ( $\sigma_{i3}^{(\pm)} \equiv 0$ ,  $i = 1, 2$ ), поэтому из равенств (15) при  $\beta = 1$  (второй вариант теории Тимошенко или его уточнения) получаем

$$\xi_{13}^{(\pm)} = \xi_{23}^{(\pm)} \equiv 0. \quad (29)$$

Функции  $\xi_{13}(x_1, x_3)$ ,  $v_1(x_1, x_3)$ ,  $\xi_{11}(x_1, x_3)$  по-прежнему определяются соотношениями (1), (3), (4), а скорость линейной деформации ползучести в окружном направлении с учетом (2), (3), (29) имеет следующее выражение [3,4]

$$\xi_{22}(x_1, x_3) = \frac{v_1}{x_1} = \frac{v_1^0}{x_1} - \frac{x_3}{x_1} \frac{dv_3^0}{dx_1} + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \frac{\xi_{13}^{(k)}}{x_1}, \quad (30)$$

$$|x_3| \leq h, \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1.$$

Осредненные напряжения в композиции такой пластины на основании (5), (27)-(30), (1), (4) имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}(x_1, x_3) &= b_{i1}(x_1, x_3) \left[ \frac{dv_1^0}{dx_1} - x_3 \frac{d^2v_3^0}{dx_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \frac{d\xi_{13}^{(k)}}{dx_1} \right] + \\ &\quad + b_{i2}(x_1, x_3) \left[ \frac{v_1^0}{x_1} - \frac{x_3}{x_1} \frac{dv_3^0}{dx_1} + \right. \end{aligned}$$

$$+ 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left( \frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \frac{\xi_{13}^{(k)}}{x_1} \Bigg], \quad i = 1, 2,$$

$$\sigma_{13}(x_1, x_3) = 2b_1(x_1, x_3) \frac{h^2 - \beta x_3^2}{h^2} \sum_{k=0}^K x_3^k \xi_{13}^{(k)}(x_1), \quad (31)$$

$$|x_3| \leq h, \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1.$$

Уравнения равновесия элемента пластины в исследуемом осесимметричном случае с учетом (28), (29) имеют вид [20]

$$\partial_1 \sigma_{11} + \partial_3 \sigma_{13} + (\sigma_{11} - \sigma_{22})/x_1 = -X_1(x_1, x_3); \quad (32)$$

$$\partial_1 \sigma_{13} + \partial_3 \sigma_{33} + \sigma_{13}/x_1 = -X_3(x_1, x_3), \quad |x_3| \leq h, \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1. \quad (33)$$

Далее для простоты будем исследовать частный случай закрепления кольцевой пластины: одна из кромок (например, внутренняя) жестко закреплена (т.е. при  $x_1 = r_0$  выполняются равенства (17), (18) при  $v_{i0} \equiv 0, i = \overline{1, 3}$ ), а на другой кромке (например, внешней) заданы статические граничные условия (16) (при  $x_1 = r_1, \alpha = 0$  и  $\sigma_{n\tau} = 0$ ).

В рассматриваемом случае на базе соотношений (31)-(33) можно построить упрощенный вариант уточненной теории, сложность реализации которого сопоставима с теориями типа Тимошенко [9]. С этой целью проинтегрируем уравнения (32) по толщине пластины с весами 1 и  $x_3$ , а уравнения (33) – с весами  $x_3^l$ , тогда получим

$$\partial_1 F_{11} + (F_{11} - F_{22})/x_1 = -X_1^{(0)}(x_1), \quad (34)$$

$$\partial_1 M_{11} + (M_{11} - M_{22})/x_1 = F_{13} - X_1^{(1)}(x_1), \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1;$$

$$\partial_1 (x_1 M_{13}^{(l)}) = -x_1 X_3^{(l)} + l x_1 \int_{-h}^h x_3^{l-1} \sigma_{33} dx_3 - h^l x_1 [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^l \sigma_{33}^{(-)}], \quad (35)$$

$$0 \leq l \leq K, \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1,$$

где  $F_{ii}, M_{ii}$  – мембранные усилия и изгибающие моменты;  $F_{13} \equiv M_{13}^{(0)}$  – поперечная сила;  $M_{13}^{(l)} (l \geq 1)$  – математические моменты высших порядков, имеющие тот же смысл, что и в (8), (12). В уравнениях (34), (35) нужно учесть равенства (13) и рассуждения, касающиеся соотношения (14).

Так как на внешней кромке предполагаются заданными статические граничные условия (16), где  $x_1 = r_1, \alpha = 0$  и  $\sigma_{n\tau} = 0$ , то по аналогии с (34), (35) получаем (см. (19))

$$F_{11}(r_1) = F_{m1}, \quad M_{11}(r_1) = M_{m1}; \quad (36)$$

$$M_{13}^{(l)}(r_1) = M_{n3}^{(l)}, \quad 0 \leq l \leq K, \quad (37)$$

где  $F_{m1}, M_{m1}$  – нормальное мембранное усилие и изгибающий момент, заданные на внешней кромке;  $M_{n3}^{(l)}$  определены соотношениями (20).

Используя (31), вычислим внутренние силовые факторы, входящие в равенства (34)-(37)

$$F_{ii}(x_1) = a_{i1}^{(0)}(x_1) \frac{dv_1^0}{dx_1} - a_{i1}^{(1)}(x_1) \frac{d^2 v_3^0}{dx_1^2} + 2 \sum_{k=0}^K c_{i1}^{(0,k)}(x_1) \frac{d\xi_{13}^{(k)}}{dx_1} +$$

$$\begin{aligned}
& + a_{i2}^{(0)}(x_1) \frac{v_1^0}{x_1} - \frac{a_{i2}^{(1)}(x_1)}{x_1} \frac{dv_3^0}{dx_1} + 2 \sum_{k=0}^K c_{i2}^{(0,k)}(x_1) \frac{\xi_{13}^{(k)}}{x_1}, \\
M_{ii}^{(l)}(x_1) & = a_{i1}^{(1)}(x_1) \frac{dv_1^0}{dx_1} - a_{i1}^{(2)}(x_1) \frac{d^2 v_3^0}{dx_1^2} + 2 \sum_{k=0}^K c_{i1}^{(1,k)}(x_1) \frac{d\xi_{13}^{(k)}}{dx_1} + \\
& + a_{i2}^{(1)}(x_1) \frac{v_1^0}{x_1} - \frac{a_{i2}^{(2)}(x_1)}{x_1} \frac{dv_3^0}{dx_1} + 2 \sum_{k=0}^K c_{i2}^{(1,k)}(x_1) \frac{\xi_{13}^{(k)}}{x_1}, \quad i = 1, 2; \\
M_{13}^{(l)}(x_1) & = 2 \sum_{k=0}^K g_1^{(l,k)}(x_1) \xi_{13}^{(k)}(x_1), \quad 0 \leq l \leq K, \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1, \quad (39)
\end{aligned}$$

где  $a_{ij}^{(m)}$ ,  $c_{ij}^{(m,k)}$  – компоненты  $3 \times 3$ -матриц  $A^{(m)}$ ,  $C^{(m,k)}$ , вычисленных по формулам (10).

Согласно равенству (14), правая часть в (35) – известная функция полярного радиуса  $x_1$ , поэтому при каждом  $l$  соотношение (35) является обыкновенным дифференциальным уравнением первого порядка относительно момента  $M_{13}^{(l)}$ , для однозначного интегрирования которого нужно использовать граничное условие (37). Если краевая задача (35), (37) для каждого  $l$  решена (т.е.  $M_{13}^{(l)}(x_1)$  известны на текущей  $(n+1)$ -й итерации), то соотношения (39) в каждой точке пластины ( $r_0 \leq x_1 \leq r_1$ ) образуют замкнутую систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $\xi_{13}^{(k)}(x_1)$ , из которой можно вычислить  $(n+1)$ -ые приближения этих функций, входящих в разложение (1) (при  $i=1$  и учете (29)). При этом в выражениях (38) неизвестными остаются только функции  $v_1^0(x_1)$  и  $v_3^0(x_1)$ , для определения которых равенства (38) нужно подставить в уравнения (34), тогда получим систему разрешающих уравнений в таком виде

$$\begin{aligned}
& \frac{d\bar{F}_{11}}{dx_1} - a_{21}^{(0)} \frac{dv_1^0}{dx_1} + a_{21}^{(1)} \frac{d\theta}{dx_1} - a_{22}^{(0)} \frac{v_1^0}{x_1} + a_{22}^{(1)} \frac{\theta}{x_1} = \\
& = -x_1 X_1^{(0)}(x_1) + 2 \sum_{k=0}^K \left( c_{21}^{(0,k)} \frac{d\xi_{13}^{(k)}}{dx_1} + c_{22}^{(0,k)} \frac{\xi_{13}^{(k)}}{x_1} \right), \\
& \frac{d\bar{M}_{11}}{dx_1} - a_{21}^{(1)} \frac{dv_1^0}{dx_1} + a_{21}^{(2)} \frac{d\theta}{dx_1} - a_{22}^{(1)} \frac{v_1^0}{x_1} + a_{22}^{(2)} \frac{\theta}{x_1} = \\
& = x_1 M_{13}^{(0)}(x_1) - x_1 X_1^{(1)}(x_1) + 2 \sum_{k=0}^K \left( c_{21}^{(1,k)} \frac{d\xi_{13}^{(k)}}{dx_1} + c_{22}^{(1,k)} \frac{\xi_{13}^{(k)}}{x_1} \right), \quad (40) \\
& x_1 a_{11}^{(0)} \frac{dv_1^0}{dx_1} - x_1 a_{11}^{(1)} \frac{d\theta}{dx_1} + a_{12}^{(0)} v_1^0 - a_{12}^{(1)} \theta - \bar{F}_{11} = \\
& = -2 \sum_{k=0}^K \left( x_1 c_{11}^{(0,k)} \frac{d\xi_{13}^{(k)}}{dx_1} + c_{12}^{(0,k)} \xi_{13}^{(k)} \right), \\
& x_1 a_{11}^{(1)} \frac{dv_1^0}{dx_1} - x_1 a_{11}^{(2)} \frac{d\theta}{dx_1} + a_{12}^{(1)} v_1^0 - a_{12}^{(2)} \theta - \bar{M}_{11} =
\end{aligned}$$

$$= -2 \sum_{k=0}^K \left( x_1 c_{11}^{(1,k)} \frac{d\xi_{13}^{(k)}}{dx_1} + c_{12}^{(1,k)} \xi_{13}^{(k)} \right),$$

$$\frac{dv_3^0}{dx_1} - \theta(x_1) = 0, \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1,$$

где введены обозначения

$$\bar{F}_{11}(x_1) = x_1 F_{11}(x_1), \quad \bar{M}_{11}(x_1) = x_1 M_{11}(x_1). \quad (41)$$

Согласно (35), (37) и (39) с учетом (14), правые части в уравнениях (40) известны на текущей  $(n+1)$ -й итерации. Левые же части в системе равенств (40) при соответствующих переобозначениях коэффициентов полностью совпадают с левыми частями уравнений (42) из [21].

Для однозначного интегрирования системы (40) нужно использовать статические граничные условия (36) с учетом обозначений (41), а также кинематические условия (17), (21) (при  $x_1 = r_0$ ,  $i = 1$  и  $l = 0, 1$ ) с учетом (22), (29) и введенной для удобства функции  $\theta = dv_3^0/dx_1$  (см. (40)). Система (40) содержит производные только первого порядка от неизвестных функций  $\bar{F}_{11}(x_1)$ ,  $\bar{M}_{11}(x_1)$ ,  $\theta(x_1)$ ,  $v_1^0(x_1)$ ,  $v_3^0(x_1)$ , поэтому сформулированную для нее двухточечную граничную задачу на каждой  $(n+1)$ -й итерации можно, как и в [21], проинтегрировать численно методом пристрелки [22] с привлечением абсолютно устойчивых неявных методов Рунге-Кутты [23].

При  $K = 0$  уравнения (40) полностью совпадают с системой (42) из [21], поэтому при использовании теории Рейсснера ( $\beta = 0$ , см. (1)) модельная задача решается совершенно так же, как и при использовании второго варианта теории Тимошенко ( $\beta = 1$ ), различие заключается лишь в числовых значениях коэффициентов  $a_{ij}^{(m)}$ ,  $c_{ij}^{(m,k)}$ , вычисляемых по формулам (10) либо при  $\beta = 0$ , либо при  $\beta = 1$ . В рамках же упрощенного варианта уточненной теории ( $K \geq 1$ ,  $\beta = 1$ ) уравнения (40) интегрируются так же, как и в рамках второго варианта теории Тимошенко [21], но имеют известные поправки в правых частях.

### 3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТОВ

В качестве конкретных примеров исследуем изгибное поведение в условиях установившейся ползучести кольцевых армированных пластин, ограниченных кромками радиусов  $r_0 = 1$  м,  $r_1 = 2$  м и имеющих разную толщину  $2h$ . Касательные нагрузки на лицевых поверхностях отсутствуют (см. (29)); конструкции равномерно нагреты до разных температур, близких к  $\Theta = 200^\circ\text{C}$ . Рассматриваются медные (Cu) или алюминиевые (сплав АМг3) пластины, усиленные двумя семействами стальной проволоки У8А.

Предполагается, что установившаяся ползучесть в каждом компоненте композиции описывается степенным законом  $\xi = A\sigma^\mu$ , механические характеристики которого для каждого используемого материала приведены в таблице с указанием температуры  $\Theta$ , при которой они определены. (При этом компоненты  $a_{ij}^n$  матрицы  $A^n$  в (5) вычисляются по формулам (48), (51) из [18].)

Таблица

Характеристики установившейся ползучести материалов компонентов композиции [1,5,24].

Материал	$\Theta, ^\circ\text{C}$	$\mu$	$A, (\text{МПа})^{-\mu} \cdot \text{ч}^{-1}$
Медь (Cu)	165	1,60	$3,65 \cdot 10^{-10}$
Медь (Cu)	235	2,16	$5,63 \cdot 10^{-9}$
Алюминиевый сплав АМг3 (Al)	215	6,045	$1,025 \cdot 10^{-14}$
Стальная проволока марки У8А	200	24,98	$1,054 \cdot 10^{-84}$

Пластины равномерно нагружены только в поперечном направлении ( $p(x_1) = -\sigma_{33}^{(+)} = \text{const}$ ,  $\sigma_{33}^{(-)} \equiv 0$ ,  $X_1 = X_3 \equiv 0$ ; см. (32), (33), (35)); внешние их кромки свободны от нагружения ( $F_m = 0$ ,  $M_m = 0$ ,  $M_{n3}^{(l)} = 0$ ,  $0 \leq l \leq K$ ; см. (36), (37)), а внутренние жестко закреплены (см. (17), (21), (22) при  $l = 0, 1$  и  $v_{30} = v_{i0} \equiv 0$ ,  $x_1 = r_0$ ), т.е. рассматриваются модельные задачи.

Согласно модельной задаче, пластины предполагаются осесимметрично армированными, причем по логарифмическим спиральям (см. рис.2)

$$\omega_1(x_1) = \omega_2(x_1), \quad \psi_1(x_1) = -\psi_2(x_1) = \psi = \text{const}, \quad r_0 \leq x_1 \leq r_1. \quad (42)$$

Так как армирование осуществляется проволокой постоянного поперечного сечения [1], то плотности армирования  $\omega_k$  в осесимметричном случае при армировании по логарифмическим спиральям под любыми углами  $\psi$  изменяются по закону [10,16]

$$\omega_k(x_1) = r_0 \omega_{0k} / x_1, \quad \omega_{0k} \equiv \omega_k(r_0), \quad \omega_{01} = \omega_{02}, \quad k = 1, 2, \quad (43)$$

где  $\omega_{0k}$  – плотность армирования волокнами  $k$ -го семейства, заданная на внутренней кромке  $x_1 = r_0$ . (Из равенств (43) следует, что при произвольных углах армирования  $\psi$  (см. (42)) общий расход арматуры в пластинах заданных размеров при фиксированных  $\omega_{0k}$  будет один и тот же.) Далее в расчетах принимаем  $\omega_{01} = \omega_{02} = 0,3$ . При этом суммарная плотность армирования на внутренней кромке пластины ( $\omega_{01} + \omega_{02} = 0,6$ ) близка к предельно допустимому значению, которое на практике примерно равно 0,7.

На рис.3,4 изображены эпюры скоростей прогибов установившейся ползучести  $v_3^0(x_1)$  для пластин из Cu–У8А-композиции (рис.3) и Al–У8А-композиции (рис.4) при радиальном армировании:  $\psi = 0$  (за исключением кривых 1'' и 6'' на рис.3б; подробнее см. ниже). Зависимости  $v_3^0(x_1)$  на рис.3 и 4а рассчитаны для пластин толщиной  $2h = 10$  см при  $p = 1$  МПа (за исключением кривых 1', 1'' и 6', 6'' на рис.3б; подробнее см. ниже), а на рис.4б – при  $2h = 3$  см и  $p = 0,23$  МПа. Линии 1, 1' и 1'' на рис.3 и 4 определены по теории Кирхгофа ( $\beta = 0$ ,  $\xi_{i3}^{(k)} \equiv 0$ ,  $0 \leq k \leq K$ ; см. (1)); кривые 2 – по теории Рейсснера ( $\beta = 0$ ,  $K = 0$ ); остальные кривые с номером  $i$  (в том числе и помеченные штрихами) соответствуют уточненным теориям при  $\beta = 1$  и  $K = 2(i - 3)$ ,  $i \geq 3$



(в частности, кривые с номером  $i = 3$  определены по второму варианту теории Тимошенко; см. (1)).

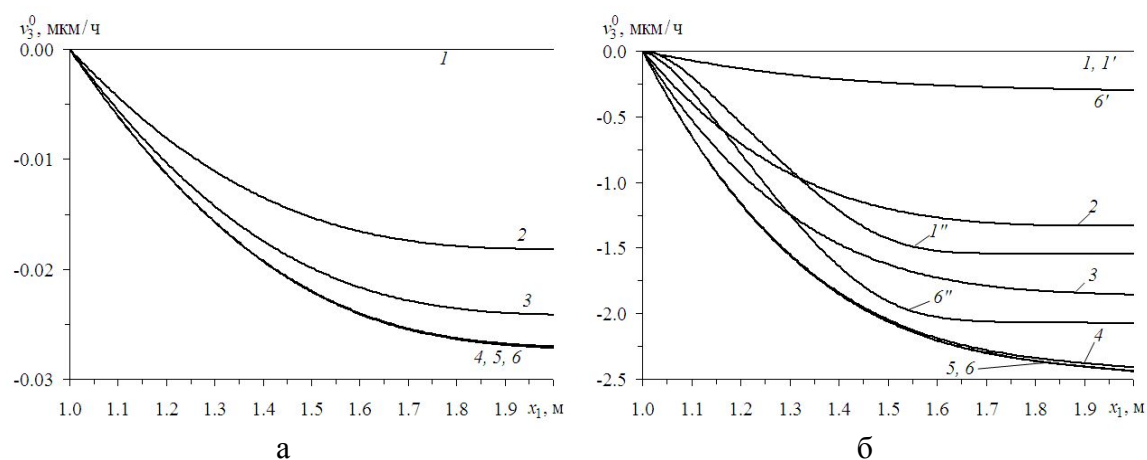


Рис.3. Зависимости скоростей прогибов установившейся ползучести от радиальной координаты, рассчитанные по разным теориям для кольцевых армированных пластин разной толщины, изготовленных из Cu-U8A-композиции: а – при  $\Theta = 165^\circ\text{C}$ ; б – при  $\Theta = 235^\circ\text{C}$ .

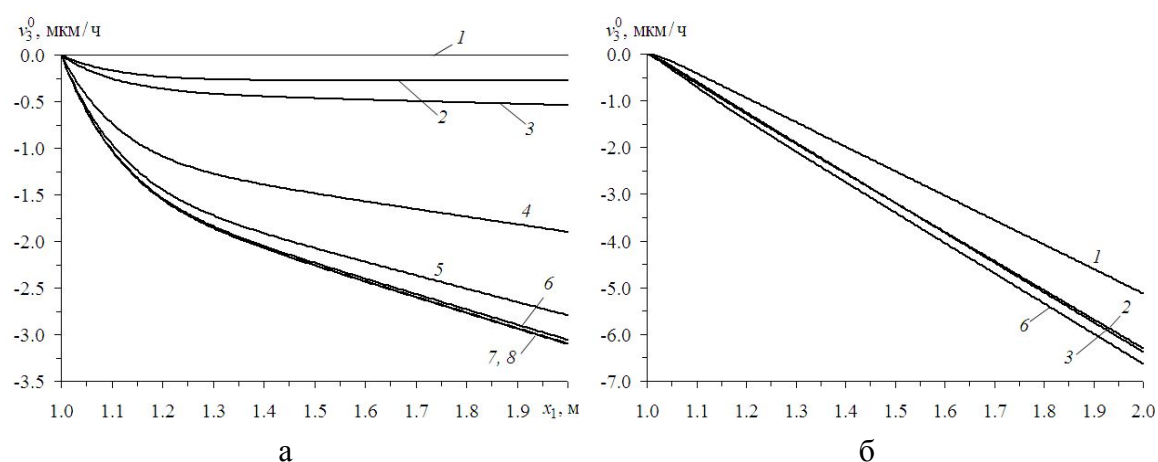


Рис.4. Зависимости скоростей прогибов установившейся ползучести от радиальной координаты, рассчитанные по разным теориям для кольцевых радиально-армированных пластин толщиной 10 см (а) и 3 см (б), изготовленных из Al-U8A-композиции.

Сравнение кривых на рис.3 и 4а с номерами  $i \geq 3$  свидетельствует о том, что с увеличением  $K$  имеет место сходимость частичных сумм в (1), (3), (4). Из рис.4а видно, что кривые 7 и 8 визуально уже не различимы, а линия 6 отличается от них менее чем на 1,5 %, поэтому далее результаты расчетов, выполненных при  $K = 6$  (см. кривые 6, 6', 6'' на рис.3-5), считаем эталонными.

Кривые на рис.3а рассчитаны для радиально армированной пластины из Cu-U8A-композиции при температуре  $\Theta = 165^\circ\text{C}$ . В этом случае ни теория Кирхгофа (см. линию 1), ни теория Рейсснера (см. кривую 2) не обеспечивают необходимой точности вычисления податливости армированной пластины, работающей в условиях установившейся ползучести.

Если считать приемлемой традиционную 20%-ю точность расчетов ползучести металлоконструкций [3,4], то в силу близости кривых 3 и б на рис.3а можно утверждать, что в данном случае второй вариант теории Тимошенко обеспечивает требуемую точность расчета по скорости прогиба. Однако при возрастании температуры такой пластины вычисления, сделанные по этой теории, уже не обеспечивают получения столь надежных результатов. Так, кривые 1–б на рис.3б получены для той же пластины из Cu–У8А-композиции, но при температуре  $\Theta = 235^\circ\text{C}$ . Сравнение кривых 3 и б на рис.3б показывает, что второй вариант теории Тимошенко в этом случае не обеспечивает 20%-ю точность расчетов скорости прогиба установившейся ползучести.

В гораздо большей степени результаты вычислений, выполненных в рамках традиционных теорий (как классической, так и неклассических), отличаются от эталонного расчета для пластин из Al–У8А-композиции. На рис.4 приведены эпюры  $v_3^0(x_1)$ , полученные для таких радиально армированных пластин при  $\Theta = 215^\circ\text{C}$ . Сравнение кривых 2 и 3 на рис.4а с эталонной линией б свидетельствует о том, что в этом случае ни теория Рейсснера, ни второй вариант теории Тимошенко не обеспечивают даже грубой 50 %-й точности по скорости прогиба. Кроме того, даже первое уточнение второго варианта теории Тимошенко (при  $K = 2$ ; см. кривую 4) не гарантирует 20%-ю точность расчетов податливости, и только уточненный расчет при  $K = 4$  (см. кривую 5) обеспечивает приемлемую точность (в этом случае отклонение от эталонного расчета по скорости прогиба составляет 10%).

Линии 1 и 1' на рис.3 и 4а визуальнo не отличаются от горизонтальных прямых, так как ординаты их точек на шесть порядков по модулю меньше ординат точек на эталонных кривых б и б'.

Рассмотренные выше пластины можно считать относительно толстыми ( $2h/(r_1 - r_0) = 1/10$ ), поэтому на рис.4б для сравнения приведены зависимости  $v_3^0(x_1)$ , рассчитанные для тонкой, радиально армированной пластины ( $2h = 3$  см,  $2h/(r_1 - r_0) = 1/33$ ) из Al–У8А-композиции при  $p = 0,23$  МПа. На этом рисунке кривые 2 и 3 визуальнo почти неразличимы и отличаются от эталонной кривой б не более чем на 5%. Следовательно, для такой пластины расчет по теории Рейсснера или по второму варианту теории Тимошенко вполне обеспечивает приемлемую точность расчетов установившейся ползучести по податливости. Поведение же кривой 1 на рис.4б показывает, что классическая теория даже в случае тонких металлокомпозитных армированных пластин не обеспечивает 20%-ю точность расчета их податливости при изгибе в условиях установившейся ползучести.

Дополнительные расчеты показали, что для относительно тонкой, радиально армированной Cu–У8А-пластины толщиной 3 см при  $\Theta = 235^\circ\text{C}$  и  $p = 0,11$  МПа зависимости  $v_3^0(x_1)$  имеют вид, аналогичный изображенному на рис.3б. В частности, при этих условиях рассчитаны кривые 1' и б' на рис.3б. В этом случае второй вариант теории Тимошенко дает ошибку определения  $v_3^0(x_1)$ , равную 25,2%, а теория Рейсснера – 49,1% (соответствующие кривые на рис.3б не изображены); классическая же теория (см. линию 1') занижает значения  $|v_3^0(x_1)|$  примерно на шесть порядков.

Таким образом, даже для относительно тонких пластин не только классическая теория, но и теории Рейсснера и Тимошенко в некоторых случаях не гарантируют получения приемлемой точности расчетов установившейся ползучести армированных металлокомпозитных тонкостенных элементов конструкций.

Поведение кривых на рис.4б указывает на то, что в окрестности внутренней кромки ( $x_1 = r_0$ ), которая жестко закреплена, в Al-U8A-пластине малой толщины ( $2h = 3$  см) возникает напряженное состояние, близкое к вязко-ползучему шарниру [3,4]. Поведение же кривых на рис.3 и 4а (за исключением линий  $I$  и  $I'$ , которые качественно подобны кривой  $I$  на рис.4б, и кривых  $I''$ ,  $б''$  на рис.3б) показывает, что в этих случаях вязко-ползучий шарнир в окрестности жестко закрепленной кромки не возникает, а скорость прогиба установившейся ползучести определяется главным образом скоростями деформаций поперечного сдвига, активно развивающимися в окрестности этой кромки  $x_1 = r_0$  (см. ниже).

В рассмотренных выше случаях армирование пластин предполагалось радиальным ( $\psi = 0$ ; см. (42)). Исследуем теперь зависимость податливости металлокомпозитных пластин в условиях установившейся ползучести от направления армирования  $\psi$ . При этом в качестве меры податливости изгибаемых пластин примем следующую величину:

$$v_3^m(\psi) = \max_{r_0 \leq x_1 \leq r_1} |v_3^0(x_1; \psi)|. \quad (44)$$

На рис.5 изображены зависимости (44), рассчитанные для Cu-U8A-пластин разной толщины при температуре  $\Theta = 235^\circ\text{C}$ .

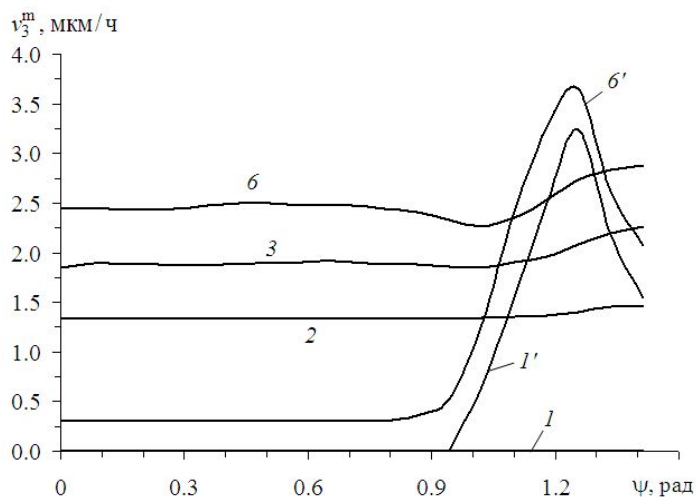


Рис.5. Зависимости максимальной по модулю скорости прогиба ползучести от угла спирального армирования кольцевых Cu-U8A-пластин при  $\Theta = 235^\circ\text{C}$ .

Кривые  $I-3$  и  $б$  характеризуют зависимость  $v_3^m(\psi)$  для пластин толщиной  $2h = 10$  см при уровне их нагружения  $p = 1$  МПа (эти линии рассчитаны при тех же условиях, что и соответствующие кривые на рис.3б); кривые же  $I'$  и  $б'$  определены для пластин толщиной  $2h = 3$  см при  $p = 0,11$  МПа (линия  $I'$  рассчитана по классической теории, а кривая  $б'$  соответствует эталонному

расчету). Линия 1 на рис.5 визуально не отличается от горизонтальной прямой  $v_3^m(\psi) \equiv 0$ , так как ординаты ее точек на шесть порядков меньше ординат точек на кривых 2, 3 и 6 (это же касается и левого участка кривой 1' при  $0 \leq \psi < 0,93$ ).

Сравнение линий 1–3 на рис.5 с эталонной кривой 6 показывает, что не только при радиальном армировании:  $\psi = 0$  (см. зависимости  $v_3^0(x_1)$  с номерами 1–3 и 6 на рис.3б), но и при спиральном армировании ( $\psi > 0$ ; см. рис.2) относительно толстых ( $2h = 10$  см) металлокомпозитных пластин ни одна из традиционных теорий изгиба тонкостенных конструкций не обеспечивает приемлемой точности расчета податливости в условиях установившейся ползучести. Так, ординаты точек кривой 3 почти всюду отличаются от ординат точек кривой 6 более чем на 20%, только в малой окрестности точки  $\psi \approx 1$  это различие составляет менее 20%, но более 18 %.

Из рис.5 видно, что изменяемость кривых 2 и 3 незначительна (особенно линии 2), т.е. в этом случае, согласно расчетам по теории Рейсснера и второго варианта теории Тимошенко, изменение угла армирования  $\psi$  почти не сказывается на изменении податливости металлокомпозитных пластин. (В рамках второго варианта теории Тимошенко эта особенность ранее была обнаружена

и в [10].) Согласно же поведению кривой 6, при эталонном расчете изменяемость зависимости  $v_3^m(\psi)$  проявляется в большей степени, чем при расчетах по теориям Рейсснера и Тимошенко, хотя и эта изменяемость не так уж велика.

Точка локального минимума на кривой 6 рис.5 определяет рациональный (из множества всех рассматриваемых структур армирования по логарифмическим спиральям) угол армирования  $\psi \approx 1$  рад, при котором соответствующая пластина обладает наименьшей податливостью. Следовательно, не всегда армирование по направлениям главных напряжений и скоростей деформаций ползучести (в рассматриваемых задачах эти направления на лицевых поверхностях пластин совпадают с радиальным ( $\psi = 0$ ) и окружным ( $\psi = \pi/2$ ) направлениями) является наилучшим. При этом поведение кривых 2 и 3 (а также линии 1 при увеличенном масштабе по оси ординат) на рис.5 показывает, что в рамках соответствующей традиционной теории изгиба тонкостенных конструкций наилучшим по условию минимума податливости будет радиальное армирование ( $\psi = 0$ ).

Таким образом, в тех случаях, когда традиционные теории (Кирхгофа, Рейсснера и Тимошенко) не обеспечивают требуемой точности расчетов, они могут приводить к неверным результатам при решении задач рационального и оптимального армирования тонкостенных элементов конструкций.

Как уже отмечалось, кривые 2, 3 и 6 на рис.5 обладают малой изменяемостью, однако с уменьшением толщины пластины зависимость величины  $v_3^m$  (см. (44)) от угла армирования  $\psi$  становится более существенной. Так, на рис.5 для сравнения приведены зависимости 1' и 6', определенные при  $\Theta = 235^\circ\text{C}$  и  $p = 0,11$  МПа для относительно тонких ( $2h = 3$  см) Cu–У8А-пластин по классической теории (кривая 1') и в рамках эталонного расчета (кривая 6'). Как видно, изменяемость кривых 1' и 6' в целом значительна, но при  $0 \leq \psi < 0,9$  изменение углов армирования практически не влияет на изменение податливости армированных пластин. При этих углах армирования ординаты

точек на кривой  $I'$  примерно на шесть порядков меньше, чем на кривой  $b'$ . При  $\psi > 0,93$  рад наблюдается значительная изменчивость кривых  $I'$  и  $b'$ , причем на этом интервале изменения углов армирования  $\psi$  резко возрастает податливость тонких армированных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести, и существенно повышается точность классической теории. Так, при  $\psi \approx 1,26$  рад (см. точки максимумов на кривых  $I'$  и  $b'$ ) величина  $v_3^m$ , рассчитанная по теории Кирхгофа, всего на 11,5% отличается от аналогичной величины в эталонном расчете.

Изменение углов армирования  $\psi$  в тонких пластинах существенно сказывается не только на зависимости  $v_3^m(\psi)$  (см. (44)), но и приводит к существенному качественному и количественному изменению эпюры скорости прогибов установившейся ползучести. Так, на рис.3б для сравнения приведены зависимости  $I'$  и  $b'$ , рассчитанные при  $\Theta = 235^\circ\text{C}$  и  $p = 0,11$  МПа для тонких ( $2h = 3$  см) радиально армированных Cu-U8A-пластин. При этом поведение линии  $b'$  качественно подобно поведению линий 2-б, определенных для относительно толстых пластин той же структуры. Кривые же  $I''$  и  $b''$  на рис.5 соответствуют тонкой Cu-U8A-пластине, армированной по спиральным траекториям при угле  $\psi = 9\pi/20$ . Как видно, поведение кривых  $I''$  и  $b''$  качественно отличается от поведения линий 2-б и  $b'$  на рис.5 (неклассические теории расчета) и от кривой  $I$  на рис.4б, качественно подобной линиям  $I$  и  $I'$  на рис.3б (классическая теория), которые ранее были получены для случая радиального армирования ( $\psi = 0$ ).

**З а м е ч а н и е 1.** Зависимости  $v_3^m(\psi)$ , качественно аналогичные тем, что приведены на рис.5, получаются и для армированных пластин из Al-U8A-композиции при  $\Theta = 215^\circ\text{C}$ . В частности, для относительно толстых пластин ( $2h = 10$  см) изменчивость функций  $v_3^m(\psi)$  является малой, как и зависимостей 2, 3 и б на рис.5.

Для получения некоторого наглядного представления о картинах распределения скоростей деформаций установившейся ползучести в материалах фаз композиции радиально армированной Al-U8A-пластины, предсказываемых разными теориями, на рис.6 изображены поперечные радиальные сечения кольцевой пластины толщиной  $2h = 10$  см и изолинии, на которых интенсивность скоростей деформаций сдвига  $H_m = \text{const}$ ,  $m = 0, 1$  (см. формулу (12.11) в [3]), где  $m$  – номер компонента композиции ( $m = 0$  – связующее,  $m = 1$  – арматура). Расчеты проводились при  $p = 1$  МПа (см. рис.4а).

В силу отсутствия нагружения пластины в радиальном направлении ( $F_{11} \equiv 0$ ) и так как предполагается, что материалы компонентов композиции одинаково сопротивляются растяжению – сжатию, изолинии симметричны относительно срединной плоскости ( $x_3 = 0$ ), поэтому в нижних частях рис.6 изображены кривые, соответствующие  $H_0 = \text{const}$  (в алюминиевом связующем), а в верхних частях –  $H_1 = \text{const}$  (в стальной арматуре). На рис.6а изображены кривые  $H_m = \text{const}$ , рассчитанные по теории Кирхгофа, на рис.6б – по теории Рейсснера, на рис.6в – по второму варианту теории Тимошенко, на рис.6г –

результаты эталонного расчета ( $K = 6$ ; см. (1)). Номер  $n$ -й кривой на рис.6 означает, что на этой изолинии  $H_m = 10^{-n} \text{ ч}^{-1}$  ( $m = 0, 1$ ).

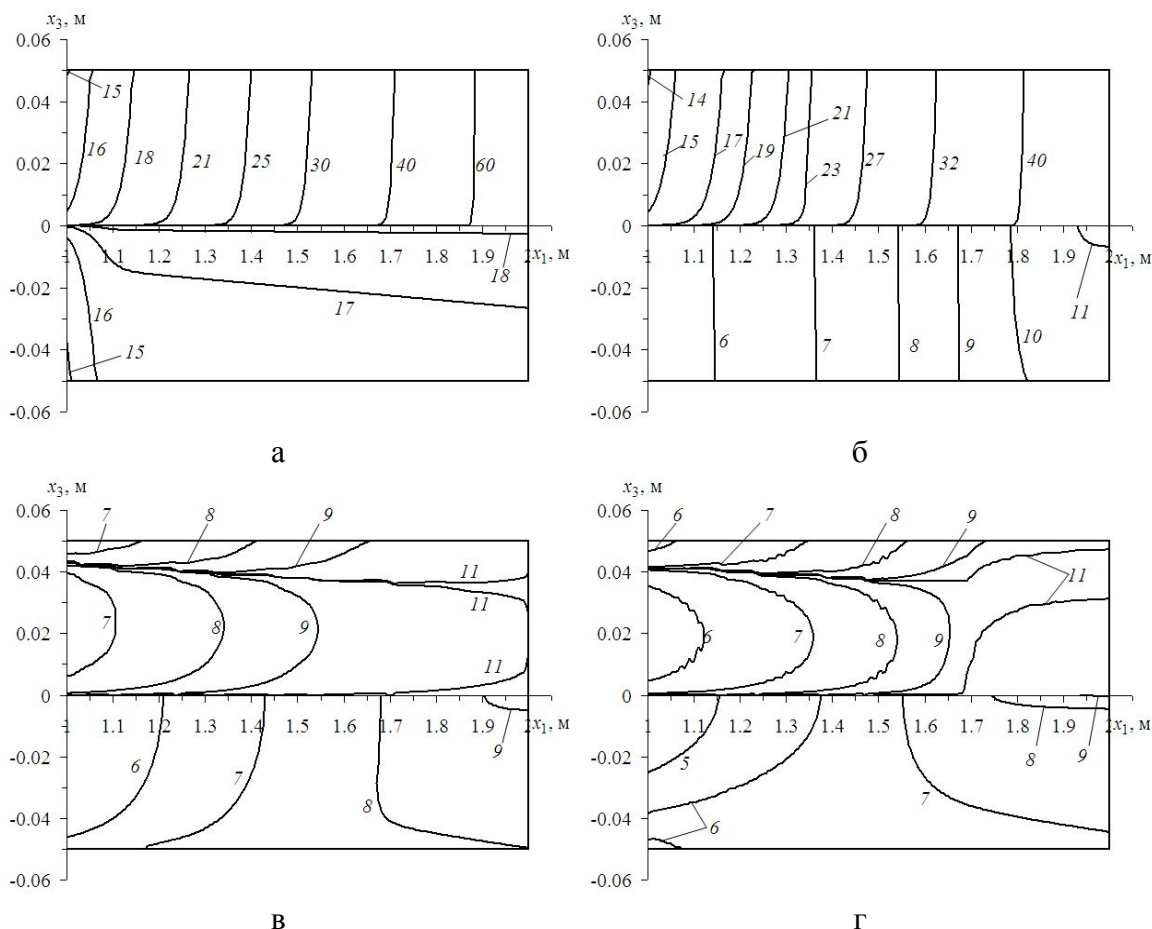


Рис.6. Характерные зоны вязко-ползучего течения в алюминиевом связующем (нижние части рисунков) и стальной поволоке (верхние части рисунков) кольцевой радиально-армированной пластины толщиной 10 см: а – расчет по классической теории Кирхгофа; б – по теории Рейсснера; в – по второму варианту теории Тимошенко; г – «эталонный» расчет.

Сопоставление кривых  $H_m = \text{const}$ , изображенных на рис.6а и рис.6б, с эталонным расчетом (см. рис.6г) указывает на то, что ни классическая теория, ни теория Рейсснера не дают ни качественного, ни количественно верного представления о действительной картине вязко-ползучего течения материалов фаз композиции в Al-U8A-пластине, армированной в радиальном направлении. Именно поэтому данные теории, как правило, неадекватно предсказывают податливость рассмотренных выше металлокомпозитных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести (ср. кривые 1 и 2 с б на рис.3 и 4а; кроме того, ср. линию 1 с б на рис.4б и кривую 1' с б' на рис.3б). Сравнение же изолиний  $H_m = \text{const}$ , изображенных на рис.6в, с кривыми на рис.6г свидетельствует о том, что второй вариант теории Тимошенко приближенно предсказывает качественно верную картину деформированного состояния материалов фаз Al-U8A-композиции, однако более чем на порядок занижает

значения  $H_m$  ( $m = 0, 1$ ). Это обстоятельство в некоторых частных случаях служит причиной значительного занижения по модулю скоростей прогиба ползучести  $v_3^0(x_1)$ , рассчитанных по этой теории (см. кривые 3 и 6 на рис.3б и на рис.4а).

Поведение изолиний  $H_m = \text{const}$ , изображенных на рис.6а, в окрестности жестко закрепленной кромки ( $x_1 \approx r_0 = 1$  м) показывает, что, согласно расчетам по классической теории, в окрестности этой кромки напряженное состояние в фазах композиции близко к вязко-ползучему шарниру. Согласно же поведению кривых  $H_m = \text{const}$  ( $m = 0, 1$ ) на рис.6б-6г, вязко-ползучий шарнир в окрестности жестко закрепленной кромки не образуется, а активно развиваются скорости деформаций поперечных сдвигов, особенно в алюминиевом связующем (см. нижние части рис.6б-6г).

**З а м е ч а н и е 2.** Картины деформирования материалов фаз композиции, аналогичные тем, что изображены на рис.6, получаются и в случае радиально армированной, относительно толстой пластины ( $2h = 10$  см) из Cu-U8A-композиции при  $\Theta = 235^\circ\text{C}$  и  $p = 1$  МПа.

Из сравнения изолиний, изображенных на верхних и нижних половинах рис.6в и 6г, видно, что в связующем материале относительно толстых пластин скорости деформаций ползучести более чем на порядок превосходят те же величины в арматуре, а в рамках расчетов по теории Рейсснера (см. рис.6б) – на несколько порядков. Этот факт, согласно замечаниям 1 и 2, объясняет особенности поведения кривых 2, 3 и 6 на рис.5, которые при  $0 \leq \psi \leq 0,9$  рад являются почти горизонтальными. Действительно, такие пластины можно условно рассматривать как слоистые с регулярно чередующимися элементарными армированными слоями и прослойками связующего между ними. При этом плотности армирования  $\omega_k$  каждого элементарного слоя одни и те же при разных  $\psi$  (см. (42), (43)) и, согласно рис.6в и 6г, арматура по сравнению с со связующим слабо ползет (либо практически вообще не ползет, как на рис.6б), т.е. слабо ползут (или практически не ползут) и элементарные армированные слои, а накопление осредненных деформаций ползучести происходит в основном за счет активного вязкого течения прослоек связующего материала между элементарными армированными слоями при разных углах  $\psi$ .

## ВЫВОДЫ

Выполненный сравнительный анализ моделей изгибного деформирования металлокомпозитных армированных пластин, работающих в условиях установившейся ползучести, показывает, что из двух традиционно используемых неклассических теорий второй вариант теории Тимошенко лучше описывает механическое поведение тонкостенных элементов конструкций по сравнению с теорией Рейсснера. Классическая же теория, как правило, дает вообще неприемлемые результаты расчетов таких пластин. В ряде случаев не только классическая теория, но и теории Рейсснера и Тимошенко не гарантируют получения требуемой точности расчетов изгибного поведения тонкостенных металлокомпозитных армированных конструкций при их работе в условиях установившейся ползучести. Только при расчетах пластин малой относительной

толщины (порядка 0,02 и менее) традиционные неклассические теории обеспечивают вполне приемлемые результаты расчетов.

Установлено, что не всегда армирование по направлениям главных напряжений является наилучшим с точки зрения уменьшения податливости конструкции. Кроме того, выявлено, что теория Кирхгофа и традиционные неклассические теории могут приводить к рациональным и оптимальным проектам армирования пластин, отличным от аналогичных проектов, полученных на основе использования уточненных теорий изгиба.

Все эти факты свидетельствуют о том, что для получения адекватных результатов расчетов изгибного деформирования в условиях установившейся ползучести металлокомпозитных армированных пластин необходимо использовать уточненные теории, базирующиеся на соотношениях (1)-(13) при  $K \geq 6$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Композиционные материалы. Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. – Киев: Наукова думка, 1985. – 592 с.
2. Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
3. Качанов Л.М. *Теория ползучести*. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
4. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
5. Никитенко А.Ф. *Ползучесть и длительная прочность металлических материалов*. – Новосибирск: НГАСУ, 1997. – 278 с.
6. Хажинский Г.М. *Модели деформирования и разрушения металлов*. – М.: Научный мир, 2011. – 231 с.
7. Янковский А.П. *Установившаяся ползучесть сложно армированных пологих металлокомпозитных оболочек* // Механика композитных материалов. – 2010. – Т.46. – №1. – С.121-138.
8. Немировский Ю.В. *Ползучесть заземленных пластин при различных структурах армирования* // ПМТФ. – 2014. – Т.55. – №1. – С.179-186.
9. Янковский А.П. *Установившаяся ползучесть изгибаемых армированных металлокомпозитных пластин с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. 1. Модель деформирования* // ПМТФ. – 2014. – Т.55. – №3. – С.154-163.
10. Янковский А.П. *Установившаяся ползучесть изгибаемых армированных металлокомпозитных пластин с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. 2. Анализ результатов расчетов* // ПМТФ. – 2014. – Т.55. – №4. – С.174-183.
11. Reissner E. *On bending of elastic plates* // Quarterly of Applied Mathematics. – 1947. – Vol.5. – No.1. – Pp.55-68.
12. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
13. Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
14. Mindlin R.D. *Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates* // Journal of Applied Physics. – 1951. – Vol.23. – No.3. – Pp.316-323.
15. Малмейстер А.К., Тамуж В.П., Тетерс Г.А. *Сопротивление полимерных и композитных материалов*. – Рига: Зинатне, 1980. – 571 с.



16. Немировский Ю.В., Резников Б.С. *Прочность элементов конструкций из композитных материалов.* – Новосибирск: Наука, 1986. – 168 с.
17. Амбарцумян С.А. *Теория анизотропных пластин. Прочность, устойчивость и колебания.* – М.: Наука, 1987. – 360 с.
18. Янковский А.П. *Моделирование механического поведения перекрестно армированных металлокомпозитов в условиях установившейся ползучести // Механика композиционных материалов и конструкций.* – 2011. – Т.17. – №3. – С.362-384.
19. Бидерман В.Л. *Механика тонкостенных конструкций. Статика.* – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
20. Демидов С.П. *Теория упругости.* – М.: Высшая школа, 1979. – 432 с.
21. Янковский А.П. *Исследование установившейся анизотропной ползучести слоистых металлокомпозитных пластин с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. 2. Модель деформирования // Механика композитных материалов.* – 2012. – Т.48. – №2. – С.279-302.
22. Холл Дж., Уатт Дж. *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1979. – 312 с.
23. Деккер К., Вервер Я. *Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1988. – 334 с.
24. Писаренко Г.С., Можаровский Н.С. *Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие.* – Киев: Наукова думка, 1981. – 496 с.

## REFERENCES

1. *Kompozitsionnye materialy. Spravochnik [Composite materials. Reference Book] / Under edition D.M. Karpinos. Kiev, Naukova dumka, 1985, 592 p.*
2. Malinin N.N. *Prikladnaja teorija plastichnosti i polzuchesti [The applied theory of plasticity and creep]. Moskva, Mashinostroenie, 1968, 400 p.*
3. Kachanov L.M. *Teoriya polzushchesti [Creep theory]. Moskva, Fismathgiz, 1960, 456 p.*
4. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruksiy [Creep of structural elements]. Moskva, Nauka, 1966, 752 p.*
5. Nikitemko A.F. *Polzuchest' i dlitel'naya prochnost' metallicheskih materialov [Creep and creep rupture strength metallic materials]. Novosibirsk, NSUCE Publ., 1997, 278 p.*
6. Khazhinskii G.M. *Modeli deformirovaniya i razrusheniya metallov [Model of deformation and fracture of metals]. Moskva, Nauchny mir, 2011, 231 p.*
7. Yankovskii A.P. *Steady-state creep of complexly reinforced shallow metal-composite shells. Mechanics of Composite Materials, 2010, Vol.46, No.1, Pp.89-100.*
8. Nemirovskii Yu.V. *Polzuchest' zashchemljennykh plastin pri razlichnykh strukturakh armirovaniya [Creep clamped plates with various reinforcement structures]. Prikladnaja mekhanika i tekhnicheskaja fizika, 2014, Vol.55, No.1, Pp.179-186.*
9. Yankovskii A.P. *Steady-state creep of bent reinforced metal-composite plates with consideration of their reduced resistance to transverse shear. 1. Deformation model. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2014, Vol.55, No.3, Pp.506-514.*

10. Yankovskii A.P. *Steady-state creep of bent reinforced metal-composite plates with consideration of their reduced resistance to transverse shear. 2. Analysis of calculated results*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2014, Vol.55, No.4, Pp.701-708.
11. Reissner E. *On bending of elastic plates*. Quarterly of Applied Mathematics, 1947, Vol.5, No.1, Pp.55-68.
12. Washizu K. *Variational methods in elasticity and plasticity*. Oxford – New York – Toronto – Sydney – Paris – Frankfurt, Pergamon Press, 1982.
13. Vasil'ev V.V. *Mekhanika konstruktiv iz kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite structures]*. Moskva, Mashinostroenie, 1988, 272 p.
14. Mindlin R.D. *Thickness-shear and flexural vibrations of crystal plates*. Journal of Applied Physics, 1951, Vol.23, No.3, Pp.316-323.
15. Malmeister A.K., Tamuzh V.P., Teters G.A. *Soprotivlenie polimernykh i kompozitnykh materialov [Resistance polymeric and composite materials]*. Riga, Zinante, 1980, 571 p.
16. Nemirovskii Yu.V., Reznikov B.S. *Prochnost' elementov konstrukcii iz kompozitnykh materialov [Strength of elements of designs from composites materials]*. Novosibirsk, Nauka, 1986, 168 p.
17. Ambarcumian S.A. *Teoria anizotropnykh plastin. Prochnost', ustoychivost' i kolebaniya [The theory of anisotropic plates. Strength, stability and fluctuations]*. Moskva, Nauka, 1987, 360 p.
18. Yankovskii A.P. *Modelirovanie mekhanicheskogo povedeniya perekrestno armirovannykh metallocompositov v usloviyakh ustanovivshejsia polzuchesti [Modelling of mechanical behaviour of cross reinforced metal-composites in conditions of the steady creeping]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktiv, 2011, Vol.17, No.3, Pp.362-384.
19. Biderman V.L. *Mekhanika tonkostennykh konstrukcij. Statika [Mechanics of thin-walled designs. Statics]*. Moskva, Mashinostroenie, 1977, 488 p.
20. Demidov S.P. *Teoriya uprugosti [Theory of elasticity]*. Moskva, Vysshaya shkola, 1979, 432 p.
21. Yankovskii A.P. *Analysis the secondary anisotropic creep of layered metal-composite plates with account of their weakened resistance to the transverse shear. 2. Model of deformation*. Mechanics of Composite Materials, 2012, Vol.48, No.2, Pp.193-208.
22. *Modern Numerical Methods for Ordinary Differential Equations*. Ed. by G. Hall and J.M. Watt, Oxford, Clarendon Press, 1976.
23. Dekker K., Verwer J.G. *Ustoichivost' metodov Runge–Kutty dlya zhestkikh nelinejnykh differentsial'nykh uravnenij [Stability of Runge–Kutta methods for stiff nonlinear differential equation]*. Moskva, Mir, 1988, 334 p.
24. Pisarenko G.S., Mozharovskii N.S. *Uravneniya i kraevye zadachi teorii plastichnosti i polzuchesti [Equations and boundary value problems of the theory of plasticity and creep. Reference Guide]*. Kiev, Naukova dumka, 1981, 496 p.

Поступила в редакцию 11 сентября 2017 года.

---

Сведения об авторе:

Янковский Андрей Петрович – д.ф.-м.н., в.н.с., ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: [lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru), [yankovsky\\_ap@rambler.ru](mailto:yankovsky_ap@rambler.ru)