

## МОДЕЛЬ ОСНАЩЕННОГО СТЕРЖНЯ С ВЯЗКОУПРУГИМИ ВНУТРЕННИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ\*

Иванова О.А.

*ЗАО «АйТи Десижн», г. Москва, Россия*

### АННОТАЦИЯ

В статье рассматриваются собственные колебания модели одномерного континуума Коссера [1], построенной подобно моделям [2,3] на основе подхода механического (конструктивного) моделирования А.А. Ильюшина [4] в виде тонкого стержня с помещенными на его упругой линии на шарнирах массивными жёсткими включениями (шквивами), связанными между собой ременной передачей. Конструкция принимается способной деформироваться (изгибаться и растягиваться) в одной плоскости и обладающей следующими свойствами: свойства модели на растяжение, изгиб несущего стержня и взаимные повороты включений считаются упругими [5,6], свойства же в отношении моментных взаимодействий между несущим стержнем и включениями при их взаимных поворотах являются вязкоупругими [7] (использована модель Кельвина-Фойгта).

Для такой модели проведена линеаризация уравнений движения для малых отклонений от прямолинейной недеформированной конфигурации и рассмотрена задача о собственных колебаниях при условии шарнирного закрепления краёв стержня и свободных крайних включений. Отмечено принципиальное отличие вида полученной системы уравнений от таковой в случае полностью упругой системы [2,8,9]. В предположении о специальном виде решения исследовано общее решение такой задачи. В качестве иллюстрации приведена конструкция описанного вида с известными механическими характеристиками. Получены численные решения задачи о собственных колебаниях такой конструкции. Установлено, что для каждой моды колебаний существует ровно две формы движения. Приведены графики, демонстрирующие различные скорости затухания собственных колебаний конструкции за счёт наличия вязкости в шарнире в зависимости от значений коэффициента вязкости и моды колебаний.

**Ключевые слова:** неоднородные структуры; механическое (конструктивное) моделирование; одномерный континуум Коссера; упругие и вязкоупругие свойства; плоскопараллельные движения; собственные колебания; затухающие колебания

## THE MODEL OF A SUPPLIED BEAM WITH VISCOELASTIC INTERNAL INTERACTIONS

Ivanova O.A.

*CJSC "IT Decision", Moscow, Russia*

---

\* Работа поддержана Российским Фондом Фундаментальных Исследований, проект №16-01-00669.

## ABSTRACT

Free oscillations of a one-dimensional Cosserat continuum model are considered. The model is built on the base of Ilyushin's mechanical modeling approach. It consists of a beam supplied by rigid massive inclusions periodically placed along the longitudinal line of the beam. Those inclusions are connected with their nearest neighbors by belt drives. We consider bending-tension motion of this construction in one plane. Model behavior in bending and tension motions of the supporting beam and relative rotation motions of the inclusions is elastic. Model behavior in the moment action of inclusions on supporting beam elements is viscoelastic (Kelvin-Voigt model is used).

The linearization of the such model motion equations is made for the case of small departures from undeformed configuration. The problem of free oscillations is considered for the linearized model with boundary conditions as follows: pinning of the beam's edges and absence of moment actions on the end inclusions. The fundamental difference between the system of equations for this model and for the one with fully elastic behavior is mentioned. The general solution of the problem of free oscillations is examined on the assumption with the special form of solution. The "antenna type" construction with known stress-strain properties is taken as an example. The computational solution of the problem of free oscillation is obtained for such construction. It is found that for each oscillation mode there exist exactly two forms of motion. The rate of decay became apparent to depend on viscosity value and oscillation mode. Some graphs are given to demonstrate the dependence.

**Keywords:** heterogeneous structures; mechanical modelling; one-dimensional Cosserat continuum; elastic and viscoelastic behavior; two-dimensional motion; free oscillations; decaying oscillations

Исходная конструкция, привлекаемая для моделирования одномерного континуума Коссера [1], представляет собой в недеформированном состоянии тонкий стержень длины  $l$  с помещёнными на его упругой линии через равные расстояния жёсткими массивными дисками (включениями), способными вращаться в плоскости изгиба стержня вокруг своих осей симметрии, жёстко закреплённых на стержне и перпендикулярных плоскости его изгиба. Повороты дисков относительно упругой линии стержня регулируются шарнирами. Диски связаны друг с другом (с ближайшими соседями с обеих сторон) одинаковыми ременными передачами, обеспечивающими сопротивление относительно повороту охваченных ими соседних дисков.

Используя предложенный А.А. Ильюшиным метод механического (конструктивного) моделирования [4], были получены осреднённые уравнения движения континуальной модели оснащённого стержня, которые после линеаризации в предположении об отсутствии внешних воздействий и малости кинематических характеристик конструкции приняли вид [2]

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial M_{ст.}}{\partial x} + Q + M_{вкл. \rightarrow ст.} &= 0, \\ \frac{\partial M_{вкл.}}{\partial x} - M_{вкл. \rightarrow ст.} - J \frac{\partial^2 \varphi_{вкл.}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

В (1) приняты следующие обозначения:  $P$  – продольная, а  $Q$  – поперечная составляющие вектора силы в поперечном сечении несущего стержня,  $M_{ст.}$  – изгибающий момент в поперечном сечении стержня,  $M_{вкл.}$  – момент взаимодействия соседних включений (передаточный момент включений),  $M_{вкл. \rightarrow ст.}$  – погонный (на единицу длины стержня в недеформированной конфигурации) момент воздействия системы включений на элемент стержня,  $\varphi_{вкл.}$  – текущее значение абсолютного угла поворота включения,  $u$  и  $w$  – перемещения точек стержня в направлении декартовых осей  $x$  и  $y$  соответственно,  $\rho$  – погонная плотность массы оснащённого стержня,  $J$  – погонный момент инерции системы включений.

Рассмотрим систему со следующими свойствами: механические свойства системы в отношении растяжения и изгиба несущего стержня, а также взаимного поворота включений примем упругими [5,6,10,11], а в отношении взаимного поворота включений и элементов несущего стержня – вязкоупругими (модель Кельвина-Фойгта) [7]. Привлекая классическую теорию растяжения и изгиба тонких стержней [5,6,11], для упругих свойств системы получаем [2]

$$P = ES_{сеч.} \frac{du}{dx}, M_{ст.} = EJ_{сеч.} \frac{d^2w}{dx^2}, M_{вкл.} = C \frac{d\varphi_{вкл.}}{dx}, \quad (2)$$

где  $E$  – модуль Юнга материала несущего стержня,  $S_{сеч.}$  и  $J_{сеч.}$  – площадь и момент инерции поперечного сечения несущего стержня соответственно, а константа  $C$  – коэффициент жёсткости системы включений.

Момент же взаимодействия системы включений и несущего стержня будет иметь вид

$$M_{вкл. \rightarrow ст.} = K_y \varphi_{отн.} + K_v \dot{\varphi}_{отн.} = K_y \left( \varphi_{вкл.} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + K_v \left( \frac{\partial \varphi_{вкл.}}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right), \quad (3)$$

где  $K_y$  – коэффициент упругости крепления включения к стержню,  $K_v$  – коэффициент его вязкости.

После подстановки определяющих соотношений (2), (3) система уравнений (1) принимает вид

$$\begin{aligned} ES_{сеч.} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0, \\ EJ_{сеч.} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + Q + K_y \varphi_{вкл.} - K_y \frac{\partial w}{\partial x} + K_v \frac{\partial \varphi_{вкл.}}{\partial t} - K_v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} &= 0, \\ C \frac{\partial^2 \varphi_{вкл.}}{\partial x^2} - K_y \varphi_{вкл.} + K_y \frac{\partial w}{\partial x} - K_v \frac{\partial \varphi_{вкл.}}{\partial t} + K_v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - J \frac{\partial^2 \varphi_{вкл.}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Первое уравнение системы (4) отделяется и представляет собой уравнение распространения продольной волны со скоростью  $c = \sqrt{S_{сеч.} \frac{E}{\rho}}$ . Остаётся система из трёх уравнений в частных производных относительно трёх неизвестных. Поперечная сила  $Q$  может быть выражена из третьего уравнения системы (4)

$$Q = K_y \frac{\partial w}{\partial x} + K_\epsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} - EJ_{сеч.} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - K_y \varphi_{вкл.} - K_\epsilon \frac{\partial \varphi_{вкл.}}{\partial t}. \quad (5)$$

Подставив  $Q$  в виде (5) во второе уравнение системы (4), получим систему из двух уравнений с двумя неизвестными ( $w$  и  $\varphi_{вкл.}$ )

$$\begin{aligned} K_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + K_\epsilon \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} - EJ_{сеч.} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - K_y \frac{\partial \varphi_{вкл.}}{\partial x} - K_\epsilon \frac{\partial^2 \varphi_{вкл.}}{\partial x \partial t} &= 0, \\ C \frac{\partial^2 \varphi_{вкл.}}{\partial x^2} - K_y \varphi_{вкл.} - K_\epsilon \frac{\partial \varphi_{вкл.}}{\partial t} - J \frac{\partial^2 \varphi_{вкл.}}{\partial t^2} + K_y \frac{\partial w}{\partial x} + K_\epsilon \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Сформулируем граничные условия для задачи о собственных колебаниях оснащённого стержня, описываемых системой (6): пусть имеется стержень длины  $l$ , оба конца которого шарнирно закреплены, а крайние правое и левое включения свободны от моментных воздействий. Тогда граничные условия могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} w(x, t) &= 0, \\ \text{при } x = 0, x = l: \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi_{вкл.}(x, t)}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Решение задачи о собственных колебаниях (6), (7) будем искать в виде

$$w(x, t) = C_w(x) e^{i\omega t}, \quad \varphi_{вкл.}(x, t) = C_\varphi(x) e^{i\omega t}, \quad (8)$$

где  $C_w(x)$  и  $C_\varphi(x)$  – амплитудные функции, а  $\omega$  – частота колебаний.

Подставив (8) в (6) и сократив оба выражения на  $e^{i\omega t}$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} EJ_{сеч.} \frac{\partial^4 C_w(x)}{\partial x^4} - K(\omega) \frac{\partial^2 C_w(x)}{\partial x^2} + K(\omega) \frac{\partial C_\varphi(x)}{\partial x} &= \rho \omega^2 C_w(x), \\ -C \frac{\partial^2 C_\varphi(x)}{\partial x^2} + K(\omega) C_\varphi(x) - K(\omega) \frac{\partial C_w(x)}{\partial x} &= J \omega^2 C_\varphi(x), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $K(\omega) = K_y + i\omega K_\epsilon$  – комплекснозначная функция частоты  $\omega$ . То есть, если сравнивать получившуюся систему с таковой для случая полностью упругих внутренних взаимодействий [2,8,9], различие заключается в том, что вместо постоянного коэффициента  $K$  здесь имеем в качестве коэффициента при соответствующих производных амплитудных функций комплекснозначную функцию  $K(\omega)$ .

Пусть теперь

$$C_w(x) = A \sin px, \quad C_\varphi(x) = B \cos px, \quad (10)$$

где  $A, B$  – произвольные действительные константы, а  $p = \frac{\pi k}{l}$  ( $k \in \mathbb{R}$ ). Заметим, что такое представление удовлетворяет граничным условиям (7).

После подстановки (10) в систему (9) она примет вид системы двух линейных уравнений относительно  $A, B$

$$\begin{aligned} (-EJ_{сеч.} p^4 - K(\omega) p^2 + \rho \omega^2) A + K(\omega) p B &= 0, \\ K(\omega) p A + (-C p^2 - K(\omega) + J \omega^2) B &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Система (11) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель матрицы её коэффициентов равен нулю. Выписав такой определитель при условии записи функции  $K(\omega)$  в явном виде, мы получим уравнение 4-й степени с комплексными коэффициентами

$$\begin{aligned} \rho J \omega^4 - i K_{\rho} (J p^2 + \rho) \omega^3 - (J E J_{сеч.} p^4 + (\rho C + K_y J) p^2 + K_y \rho) \omega^2 + \\ + i K_{\rho} (E J_{сеч.} + C) p^4 \omega + E J_{сеч.} C p^6 + K_y (E J_{сеч.} + C) p^4 = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Решения уравнения (12) имеют вид:  $\omega_j(p) = \text{Re } \omega_j(p) + i \text{Im } \omega_j(p)$ ,  $j = 1, \dots, 4$ .

При  $K(\omega) \neq 0$  для любого значения  $p$  вида  $p = \frac{\pi k}{l}$  ( $k \in \mathbb{R}$ ) и соответствующего ему произвольного (одного из четырёх) решения (12) нетривиальное решение системы (11) относительно  $A$  и  $B$  имеет вид

$$A = a(p, \omega(p)) \cdot \Phi, \quad B = \Phi, \quad (13)$$

где  $\Phi$  – произвольная (отличная от нуля) константа, причём

$$a(p, \omega(p)) = \frac{K(\omega)}{E J_{сеч.} p^4 + K(\omega) p^2 - \rho \omega^2} \equiv \frac{C p^2 + K(\omega) + J \omega^2}{K(\omega) p}. \quad (14)$$

Таким образом, всякое решение вида (10) есть пара функций

$$\begin{cases} w_j(x, t) = a(p, \omega_j) \Phi_j \sin(px) e^{i \omega_j(p)t}, \\ \varphi_{вкл. j} = \Phi_j \cos(px) e^{i \omega_j(p)t}, \end{cases} \quad (15)$$

где  $j = 1, \dots, 4$  в обоих равенствах выбрано одинаково,  $\Phi_j$  – произвольная ненулевая константа,  $p$  – любое из значений  $p = \frac{\pi k}{l}$  ( $k \in \mathbb{N}$ ),  $\omega_j(p)$  – решение (12),  $a(p, \omega_j)$  выражено формулой вида (14).

В силу линейности задачи (6), (7) любая линейная комбинация пар функций (15) с постоянными коэффициентами также является решением. Всевозможные вещественнозначные комбинации имеют вид сумм по натуральным значениям  $k$

$$\begin{aligned} w(x, t) = \sum_k \sin \frac{\pi k x}{l} \sum_{j=1}^4 \left[ a^{(k)} \left( \frac{\pi k}{l}, \omega_j \right) \Phi_j^{(k)} e^{-\text{Im}(\omega_j)t} \cos(\text{Re}(\omega_j)t + \varphi_j^{(k)}) \right], \\ \varphi_{вкл.}(x, t) = \sum_k \cos \frac{\pi k x}{l} \sum_{j=1}^4 \left[ \Phi_j^{(k)} e^{-\text{Im}(\omega_j)t} \cos(\text{Re}(\omega_j)t + \varphi_j^{(k)}) \right], \end{aligned} \quad (16)$$

где  $\Phi_j^{(k)}$ ,  $\varphi_j^{(k)}$  – произвольные константы ( $j = 1, \dots, 4$ ), и, аналогично (15), использованы соответствующие обозначения

$$\begin{aligned} p = \frac{\pi k}{l} \quad (k \in \mathbb{N}), \\ \omega_j^{(k)} \left( \frac{\pi k}{l} \right), \quad j = 1, \dots, 4 \text{ – решения (12),} \end{aligned} \quad (17)$$

$$a_j^{(k)} = \operatorname{Re} \left[ a \left( \frac{\pi k}{l}, \omega_j^{(k)} \right) \right] \text{ согласно формуле (14).}$$

Для иллюстрации полученных решений рассмотрим вариант конструкции антенного типа, использовавшейся ранее при исследованиях поведения оснащённого стержня с полностью упругими свойствами [2], с заменой упругой связи между стержнем и включениями на вязкоупругую и попытаемся на основании численных расчётов оценить характер собственных колебаний системы.

Рассмотрим плоскую конструкцию следующего вида: стальной стержень длины 1 м квадратного поперечного сечения (длина стороны сечения равна 5 мм) с закреплёнными на нём через каждые 10 см поперечными стержнями длиной 48 см квадратного сечения со стороной 3.3 мм. Поперечные стержни, играющие роль массивных включений, условно считаются жёсткими, повороту каждого поперечного стержня относительно основного стержня препятствует вязкоупругий шарнир с коэффициентом упругости 250 Н. Концы всех поперечных стержней попарно соединены резиновыми шнурами диаметра 0.5 мм (одинаково натянутыми в недеформированной конфигурации), что препятствует относительно повороту соседних поперечных стержней.

Константы для этой модели имеют следующие значения:  $E = 2 \cdot 10^{11} \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$ ,

$$\rho = 0.61 \frac{\text{кг}}{\text{м}}, J = 7.9 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}, J_{\text{сеч.}} = 5.2 \cdot 10^{-11} \text{ м}^4, C = 25 \text{ Н} \cdot \text{м}^2, K_y = 250 \text{ Н}.$$

На основании численных расчётов установлено, что для предложенной модели решение уравнения (12) относительно  $\omega$  при различных коэффициентах вязкости  $K_\epsilon$  и различных модах колебаний  $k$  имеет следующий вид

$$\omega_j = \begin{cases} -a_\omega + ib_\omega, & j = 1, \\ a_\omega + ib_\omega, & j = 2, \\ -c_\omega + id_\omega, & j = 3, \\ c_\omega + id_\omega, & j = 4, \end{cases} \quad (18)$$

где  $a_\omega, b_\omega, c_\omega, d_\omega$  – положительные действительные числа, зависящие от параметров конструкции и её движения. При этом для каждой моды колебаний существует такое критическое значение  $K_{\epsilon, \text{кр.}}$  (например, для  $k = 1$  соответствующий коэффициент  $K_{\epsilon, \text{кр.}} = 3,496$ , а для  $k = 10$   $K_{\epsilon, \text{кр.}} = 4,6$ ), по достижении которого действительная часть в одной из пар  $\omega$  становится равной нулю, а мнимые части этой пары перестают быть равными друг другу.

Рассмотрим теперь подробнее вопрос о формах движения оснащённого вязкоупругого стержня указанной конструкции при значениях частот вида (18). С учётом вида общего решения (16) можно заключить, что для каждой моды колебаний будет существовать, вообще говоря, четыре вида движений.

Для более подробного рассмотрения примем в (16) для первой моды колебаний моды ( $k = 1$ ) все  $\Phi_j^{(k)}$ , кроме  $\Phi_j^{(1)}$ , равными нулю ( $j = 1, \dots, 4$ ), а также все  $\varphi_j^{(k)} = 0$ . Тогда мы получим четыре формы движения следующего вида

$$\begin{aligned}
\text{I: } & \begin{cases} w(x,t) = \sin(\pi x) \operatorname{Re} [a(\pi, -a_\omega + ib_\omega)] \Phi_1^{(1)} \cdot e^{-b_\omega t} \cos(-a_\omega t), \\ \varphi_{\text{вкл.}}(x,t) = \cos(\pi x) \Phi_1^{(1)} \cdot e^{-b_\omega t} \cos(-a_\omega t), \end{cases} \\
\text{II: } & \begin{cases} w(x,t) = \sin(\pi x) \operatorname{Re} [a(\pi, a_\omega + ib_\omega)] \Phi_2^{(1)} \cdot e^{-b_\omega t} \cos(a_\omega t), \\ \varphi_{\text{вкл.}}(x,t) = \cos(\pi x) \Phi_2^{(1)} \cdot e^{-b_\omega t} \cos(a_\omega t), \end{cases} \\
\text{III: } & \begin{cases} w(x,t) = \sin(\pi x) \operatorname{Re} [a(\pi, -c_\omega + id_\omega)] \Phi_3^{(1)} \cdot e^{-d_\omega t} \cos(-c_\omega t), \\ \varphi_{\text{вкл.}}(x,t) = \cos(\pi x) \Phi_3^{(1)} \cdot e^{-d_\omega t} \cos(-c_\omega t), \end{cases} \\
\text{IV: } & \begin{cases} w(x,t) = \sin(\pi x) \operatorname{Re} [a(\pi, c_\omega + id_\omega)] \Phi_4^{(1)} \cdot e^{-d_\omega t} \cos(c_\omega t), \\ \varphi_{\text{вкл.}}(x,t) = \cos(\pi x) \Phi_4^{(1)} \cdot e^{-d_\omega t} \cos(c_\omega t). \end{cases}
\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь подробнее выражение для  $\operatorname{Re} [a(\pi, \omega)]$  при некотором произвольном комплексном  $\omega$ . Из (14) получим

$$a(\pi, \omega) = \frac{C\pi}{K(\omega)} + \frac{1}{\pi} + \frac{J\omega^2}{\pi K(\omega)}. \quad (19)$$

Если выразить  $\omega$  через действительную и мнимую части следующим образом:  $\omega = \lambda + i\mu$ , то для  $K(\omega)$  получим следующее выражение

$$K(\omega) = K_y + iK_g\omega = K_y - K_g\mu + iK_g\lambda, \quad (20)$$

а для  $\frac{1}{K(\omega)}$  соответственно

$$\frac{1}{K(\omega)} = \frac{K_y - K_g\mu - iK_g\lambda}{(K_y - K_g\mu)^2 + (K_g\lambda)^2}. \quad (21)$$

Учитывая, что  $\omega^2 = \lambda^2 - \mu^2 + 2i\lambda\mu$ , и, следовательно

$$\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{K(\omega)} &= \frac{(K_y - K_g\mu - iK_g\lambda)(\lambda^2 - \mu^2 + 2i\lambda\mu)}{(K_y - K_g\mu)^2 + (K_g\lambda)^2} = \\
&= \frac{[(K_y - K_g\mu)(\lambda^2 - \mu^2) + 2\lambda^2\mu] + i[2\lambda\mu(K_y - K_g\mu) - K_g\lambda(\lambda^2 - \mu^2)]}{(K_y - K_g\mu)^2 + (K_g\lambda)^2},
\end{aligned}$$

получим выражение для  $a(\pi, \omega)$

$$\begin{aligned}
a(\pi, \omega) &= \frac{C\pi(K_y - K_g\mu - iK_g\lambda)}{(K_y - K_g\mu)^2 + (K_g\lambda)^2} + \frac{1}{\pi} + \\
&+ \frac{J}{\pi} \cdot \frac{[(K_y - K_g\mu)(\lambda^2 - \mu^2) + 2\lambda^2\mu] + i[2\lambda\mu(K_y - K_g\mu) - K_g\lambda(\lambda^2 - \mu^2)]}{(K_y - K_g\mu)^2 + (K_g\lambda)^2},
\end{aligned}$$

из которого, очевидно, следует

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[a(\pi, \omega)] = & \frac{C\pi(K_y - K_g\mu)}{(K_y - K_g\mu)^2 + (K_g\lambda)^2} + \frac{1}{\pi} + \\ & + \frac{J}{\pi} \cdot \frac{[(K_y - K_g\mu)(\lambda^2 - \mu^2) + 2\lambda^2\mu]}{(K_y - K_g\mu)^2 + (K_g\lambda)^2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (22) видно, что действительная часть  $\omega$  входит в выражение для  $\operatorname{Re}[a(\pi, \omega)]$  только во второй степени, следовательно

$$\operatorname{Re}[a(\pi, \lambda + i\mu)] = \operatorname{Re}[a(\pi, -\lambda + i\mu)]. \quad (23)$$

С учётом того, что  $\cos(\lambda t) = \cos(-\lambda t)$ , получим, что движения I и II одинаковы с точностью до умножения на константу. То же касается и движений III и IV. Таким образом, если говорить о формах движения описанной конструкции антенного типа с частично вязкоупругими свойствами, то для первой моды колебаний мы будем иметь ровно две формы такого движения: одна будет соответствовать частоте с большей по модулю действительной частью, другая – частоте с меньшей по модулю действительной частью

$$\begin{cases} w(x, t) = \sin(\pi x) \operatorname{Re}[a(\pi, a_\omega + ib_\omega)] \Phi_2^{(1)} \cdot e^{-b_\omega t} \cos(a_\omega t), \\ \varphi_{\text{вкл.}}(x, t) = \cos(\pi x) \Phi_2^{(1)} \cdot e^{-b_\omega t} \cos(a_\omega t), \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} w(x, t) = \sin(\pi x) \operatorname{Re}[a(\pi, c_\omega + id_\omega)] \Phi_4^{(1)} \cdot e^{-d_\omega t} \cos(c_\omega t), \\ \varphi_{\text{вкл.}}(x, t) = \cos(\pi x) \Phi_4^{(1)} \cdot e^{-d_\omega t} \cos(c_\omega t). \end{cases}$$

Поскольку согласно (8) решения выражаются через  $\omega$  следующим образом:  $w(x, t) = C_w(x)e^{i\omega t}$ ,  $\varphi_{\text{вкл.}}(x, t) = C_\varphi(x)e^{i\omega t}$ , из вида частоты можно заключить, что наличие вязкости в шарнире, препятствующем относительному повороту включений и стержня, ведёт к постепенному затуханию собственных колебаний оснащённого стержня с течением времени.

Скорость затухания в зависимости от коэффициента вязкости шарнира  $K_g$  и от моды колебания  $k$  можно проиллюстрировать некоторыми графиками построенной для антенной конструкции, используемой в численных исследованиях задачи, функции вида

$$\Omega_j(t) = e^{-\operatorname{Im}(\omega_j)t} \cdot \cos[\operatorname{Re}(\omega_j)t], \quad j = 1, 2, \quad (25)$$

где  $\omega_1$  – частота с большей по модулю действительной частью,  $\omega_2$  – частота с меньшей по модулю действительной частью.

Рис.1-4 демонстрируют ускорение затухания колебаний при увеличении  $K_g$  для одной и той же моды  $k=1$ . Можно заметить при этом, что из колебаний одной и той же моды при одинаковом коэффициенте вязкости шарнира быстрее затухают те, действительная часть частоты которых больше по модулю. Для получения представления об изменении поведения функции при различных  $k$  на рис.5 приведены графики затухания для  $k=10$  и  $K_g=0.1$ , которые (в сравнении с рис.3) демонстрируют существенное ускорение затухания для одинаковых частот и одинаковых коэффициентов вязкости при увеличении  $k$ .

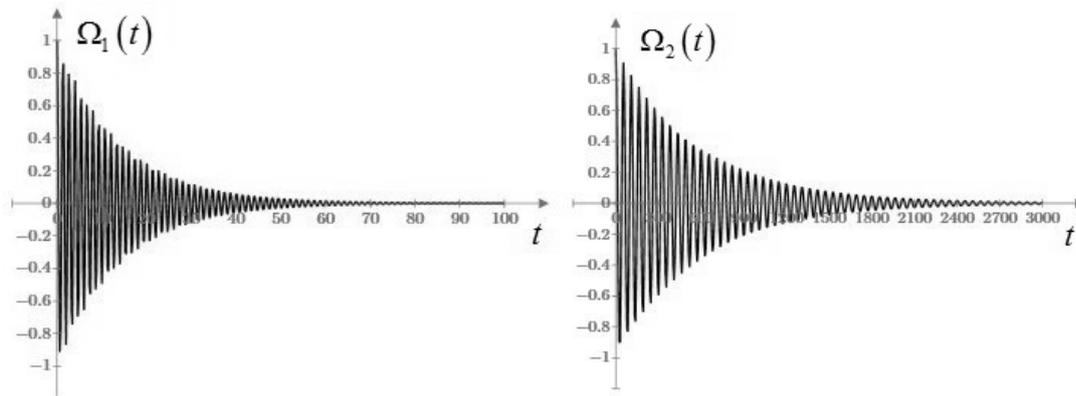


Рис.1. Затухание колебаний при  $k = 1$ ,  $K_g = 10^{-3}$ .

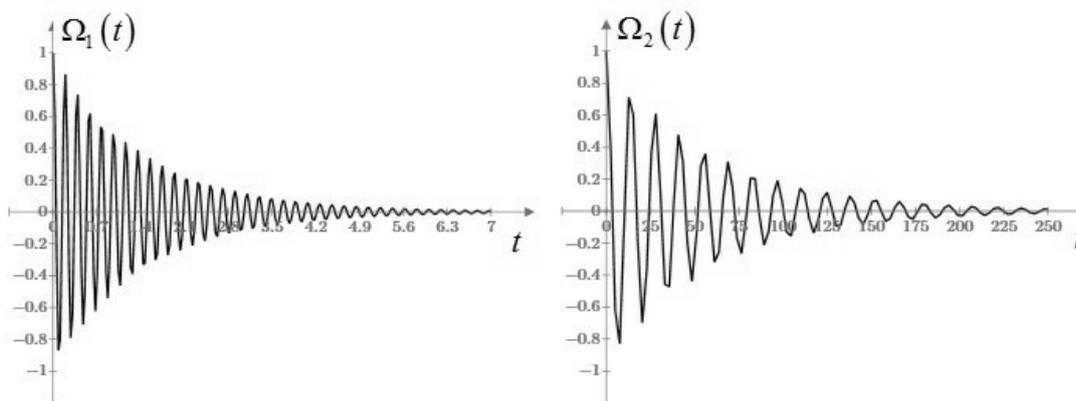


Рис.2. Затухание колебаний при  $k = 1$ ,  $K_g = 10^{-2}$ .

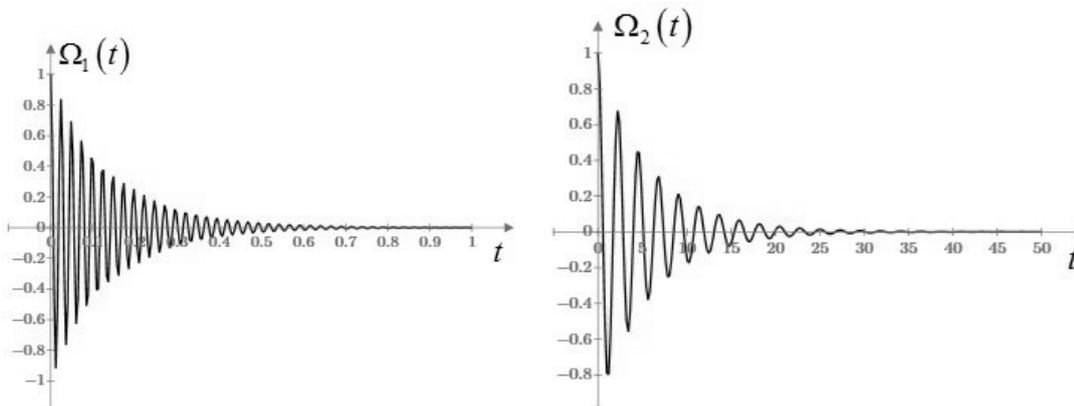
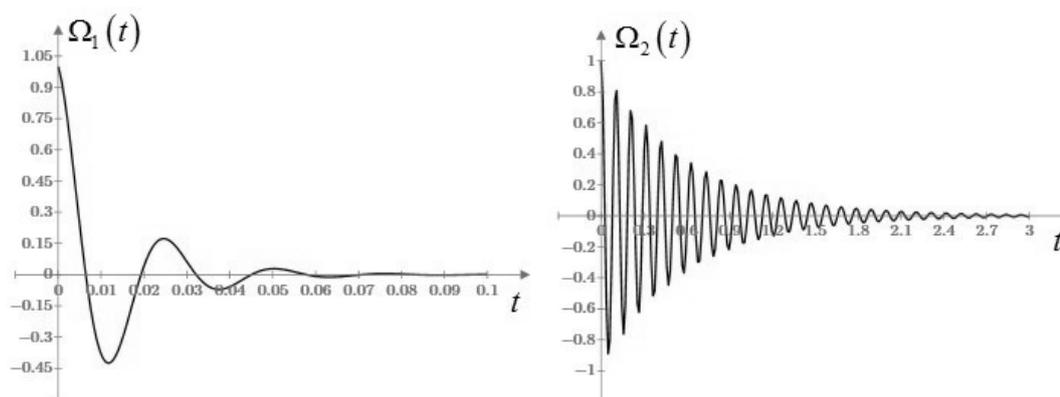
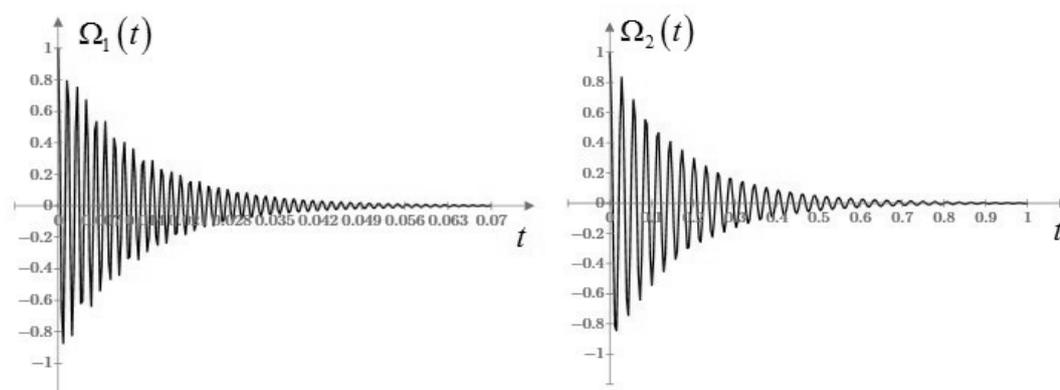


Рис.3. Затухание колебаний при  $k = 1$ ,  $K_g = 0.1$ .

Рис.4. Затухание колебаний при  $k = 1$ ,  $K_g = 1$ .Рис.5. Затухание колебаний при  $k = 10$ ,  $K_g = 0.1$ .

Таким образом, найдено общее решение задачи о собственных движениях рассматриваемого оснащённого стержня типа Коссера с частично вязкоупругими свойствами при шарнирном закреплении концов несущего стержня и свободных крайних включениях в предположении о простом периодическом виде амплитуд колебаний. Численно-аналитическим методом получено решение такой задачи для конструкции антенного вида с известными константами, а также отмечены следующие свойства собственных движений такой конструкции: для каждой моды существует ровно две формы движения, движения представляют собой затухающие колебания, скорость затухания которых возрастает с увеличением коэффициента вязкости шарнира, при этом быстрее затухают колебания, действительная часть частоты которых выше.

Настоящее исследование продолжает изучение свойств и движений модели одномерного континуума Коссера, начатое в [2,8,9] с построения модели и рассмотрения её движений при условии линеаризации и полностью упругих внутренних взаимодействий, а затем продолженное в [12] изучением предельных форм равновесий оснащённого стержня с частично идеальнопластическими свойствами. На основании результатов проделанной в данном направлении работы можно сделать вывод о перспективности дальнейшего изучения моделей континуума Коссера с различными видами внутренних взаимодействий в целях получения сред и конструкций, обладающих наперёд заданными неординарными свойствами.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des corps deformables*. – Paris: Hermann, 1909. – 226 p.
2. Бровко Г.Л., Иванова О.А. *Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера* // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 2008. – №1. – С.22-36.
3. Бровко Г.Л. *Об одной конструкционной модели среды Коссера* // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. – 2002. – №1. – С.75-91.
4. Бровко Г.Л., Ильющин А.А. *Об одной плоской модели перфорированных плит* // Вестн. МГУ. Сер.1. Математика, механика. – 1993. – №2. – С.83-91.
5. Ляв А. *Математическая теория упругости*. – М. – Л.: ОНТИ, 1953. – 674 с.
6. Попов Е.П. *Теория и расчет гибких упругих стержней*. – М.: Наука, 1986. – 296 с.
7. Ильющин А.А., Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
8. Brovko G.L., Ivanova O.A., Finoshkina A.S. *On Geometrical and Analytical Aspects in Formulations of Problems of Classic and Non-classic Continuum Mechanics* // Operator Theory: Advances and Applications. – 2009. – Vol.191. – Pp.51-79.
9. Brovko G.L., Grishaev A.G., Ivanova O.A. *Continuum Models of Discrete Heterogeneous Structures and Saturated Porous Media: Constitutive Relations and Invariance of Internal Interactions* // Journal of Physics: Conference Series. – 2007. – Vol.62. – Pp.1-22.
10. Ильющин А.А. *Механика сплошной среды*. – М.: МГУ, 1990. – 310 с.
11. Ильющин А.А., Ленский В.С. *Сопротивление материалов*. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 373 с.
12. Иванова О.А. *О предельных формах равновесия модели одномерного континуума Коссера с пластическими свойствами* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №1. – С.52-68.

## REFERENCES

1. Cosserat E., Cosserat F. *Theorie des corps deformables*. Paris, Hermann, 1909, 226 p.
2. Brovko G.L., Ivanova O.A. *Modelirovanie svoistv i dvizhenii neodnorodnogo odnomernogo kontinuumu slozhnoi mikrostruktury tipa Kossera [The modeling of one-dimensional Cosserat continuum with complex microstructure]*. Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk, Mekhanika tverdogo tela, 2008, No.1, Pp.22-36.
3. Brovko G.L. *Ob odnoi konstruktсионnoi modeli sredy Kossera [About one mechanical model of Cosserat continuum]*. Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk, Mekhanika tverdogo tela, 2002, No.1, Pp.75-91.
4. Brovko G.L., Il'iushein A.A. *Ob odnoi ploskoi modeli perforirovannykh plit [About one plane model of perforated plates]*. Vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta, Vol.1, Matematika, mekhanika, 1993, No.2, Pp.83-91.
5. Love A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Mineola, N.Y., Dover, 1944, 652 p.
6. Popov E.P. *Teoriia i raschet gibkikh uprugikh stержней [Theory and engineering analysis of elasticas]*. Moskva, Nauka, 1986, 296 p.

7. Il'ushin A.A., Pobedria B.E. *Osnovy matematicheskoi teorii termoviazko-uprugosti [Fundamentals of mathematical theory of thermo-viscoelasticity]*. Moskva, Nauka, 1970, 280 p.
8. Brovko G.L., Ivanova O.A., Finoshkina A.S. *On Geometrical and Analytical Aspects in Formulations of Problems of Classic and Non-classic Continuum Mechanics*. Operator Theory: Advances and Applications, 2009, Vol.191, Pp.51-79.
9. Brovko G.L., Grishaev A.G., Ivanova O.A. *Continuum Models of Discrete Heterogeneous Structures and Saturated Porous Media: Constitutive Relations and Invariance of Internal Interactions*. Journal of Physics, Conference Series, 2007, Vol.62, Pp.1-22.
10. Il'ushin A.A. *Mekhanika sploshnoi sredy [Continuum mechanics]*. Moskva, Moskovskii gosudarstvennyi universitet, 1990, 310 p.
11. Il'ushin A.A., Lenskii V.S. *Soprotivlenie materialov [Strength of materials]*. Moskva, Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoi literatury, 1959, 373 p.
12. Ivanova O.A. *O predel'nykh formakh ravnovesiia modeli odnomernogo kontinuumna Kossera s plasticheskimi svoistvami [Some limiting forms of equilibrium of one-dimensional Cosserat continuum model with plastic properties]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2017, Vol.23, No.1, Pp.52-68.

Поступила в редакцию 19 декабря 2017 года.

---

Сведения об авторе:

Иванова Ольга Алексеевна – к.ф.-м.н., исполнительный директор, ЗАО «АйТи Десижн», г. Москва, Россия; e-mail: [O.Ivanova.88@bk.ru](mailto:O.Ivanova.88@bk.ru)