

УЧЕТ НЕОДНОРОДНОСТИ УПРОЧНЕНИЯ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ В ЗАДАЧЕ О ПРЯМОМ МАРТЕНСИТНОМ ПРЕВРАЩЕНИИ В СТЕРЖНЕ КРУГЛОГО ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ ПРИ КРУЧЕНИИ*

Саганов Е.Б.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена изучению влияния неоднородного упрочнения представительного объема сплава с памятью формы (СПФ) на результаты моделирования явления прямого мартенситного превращения в стержне круглого поперечного сечения из СПФ, протекающего при постоянном крутящем моменте. Рассмотрение задачи ведется в рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. При решении задачи справедлива гипотеза плоских сечений для полных деформаций. Распределение температуры по сечению стержня из СПФ в процессе его охлаждения считается однородным. В ходе работы выполнено сравнение получаемых результатов для различных моделей учета доли мартенсита представительного объема СПФ, участвующего в структурном переходе. Процесс развития мартенситных элементов при охлаждении стержня из СПФ в данной работе не рассматривается. Задача решается в однократно связанной термомеханической постановке. Считается, что процесс охлаждения происходит достаточно медленно. Выделение латентного тепла фазового перехода и диссипативные эффекты компенсируются теплообменом с окружающей средой. Рассматриваемая задача сводится к системе дифференциальных уравнений, по-разному формулируемых в различных частях рассматриваемой области, подвижные границы между которыми заранее не известны и находятся в процессе решения задачи. Поэтому данная система не может быть проинтегрирована стандартными методами. Исходя из упругого решения задачи кручения стержней круглого поперечного сечения, максимальный уровень напряжений отмечается на внешней поверхности стержня. Соответственно фазовый переход начнется именно с внешних слоев. В общем случае в процессе охлаждения в сечении стержня из СПФ можно выделить три области. Вблизи внешних слоев фазовый переход уже завершился. Материал находится в мартенситном состоянии и деформируется либо упруго, либо по механизму структурного превращения. Вблизи оси вращения фазовый переход еще не начался. Материал стержня находится в аустенитном фазовом состоянии и деформируется упруго. В промежуточной зоне стержня происходит фазовый, а при выполнении определенных условий и структурный переходы. В качестве параметра процесса используется безразмерный параметр температуры. В ходе решения задачи получены зависимости безразмерной крутки от безразмерного параметра температуры, а также эпюры напряжений по сечению стержня для различных этапов охлаждения.

Ключевые слова: сплавы с памятью формы; прямое мартенситное превращение; неоднородное упрочнение; кручение; стержни

* Работа выполнена в рамках государственного задания (номер гос. регистрации темы АААА-А17-117032010136-3) и при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 17-01-00216_а).

ACCOUNT OF HETEROGENEOUS HARDENING OF SHAPE MEMORY ALLOY IN THE PROBLEM OF DIRECT MARTENSITE TRANSFORMATION IN TORQUE ROD WITH CIRCULAR CROSS SECTION

Saganov E.B.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

ABSTRACT

The work is devoted to the study of the effect of non-uniform hardening of a representative volume of a shape memory alloy (SMA) on the results of modeling the phenomenon of direct martensitic transformation in a rod of circular cross section from SMA, which proceeds at a constant torque. The problem is considered in the framework of the model of non-linear of straining of SMA in phase and structure transitions. When solving the problem, the hypothesis of flat sections for full deformations is valid. The temperature distribution over the cross-section of the rod from SMA during its cooling is considered homogeneous. In the course of the work, a comparison was made between the results obtained for different models of accounting for the martensite fraction of the representative volume of the SMA participating in the structural transition. The process of development of martensitic elements when cooling the rod from SMA is not considered in this paper. The problem is considered in a single-coupled thermomechanical formulation. It is believed that the cooling process is slow enough. The isolation of the latent heat of the phase transition and the dissipative effects are compensated by heat exchange with the surrounding medium. The problem under consideration is reduced to a system of differential equations, differently formulated in different parts of the region under consideration, the moving boundaries between which are not known in advance and are in the process of solving the problem. Therefore, this system cannot be integrated by standard methods. Proceeding from the elastic solution of the problem of torsion of rods of circular cross section, the maximum stress level is noted on the outer surface of the rod. Accordingly, the phase transition starts from the outer layers. In the general case, in the process of cooling, three regions can be distinguished in the cross section of the SMA rod. Near the outer layers, the phase transition has already been completed. The material is in the martensite state and deforms either elastically or by the mechanism of structural transformation. Near the axis of rotation, the phase transition has not yet begun. The material of the rod is in the austenitic phase state and deforms elastically. In the intermediate zone of the rod, a phase occurs, and under certain conditions, structural transitions occur. A dimensionless temperature parameter is used as the process parameter. In the course of the solution of the problem, the dependences of the dimensionless twist from the dimensionless temperature parameter, as well as the stresses over the cross-section of the rod for different cooling stages are obtained.

Key words: shape memory alloys; direct phase transformation; heterogeneous hardening; torsion; rods

ВВЕДЕНИЕ

Сплавы с памятью формы [1] обладают рядом уникальных свойств. Примером может служить явление накопления деформаций прямого термоупругого мартенситного превращения при действии внешних напряжений [1]. Деформация, накапливаемая за этот процесс, возвращается при обратном превращении и в значительной степени превышает величину упругой деформации традиционных конструкционных материалов. Перспективным направлением является использование СПФ в составе актуаторов [2], силовозбудителей

крутящего момента [3] и приводов [4], работающих на кручение. Однако широкое внедрение СПФ сдерживается отсутствием достоверных решений краевых задач, в виду объективной сложности систем определяющих соотношений для этих сплавов, а также необходимости проведения связанного термомеханического анализа.

Среди моделей, описывающих поведение СПФ при различных термосиловых режимах, можно выделить модель нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [5-11]. Отмеченная модель позволяет проводить достоверный анализ наиболее широкого круга явлений, характерных для СПФ. Труды [12,13] посвящены анализу работы пружин и стержней из СПФ при растяжении и кручении соответственно. Рассмотрение задач ведется в рамках модели [5-11]. В работах [14,15] изучено поведение стержней из СПФ при кручении в режиме сверхупругости в рамках модели [16]. Труды [17-20] посвящены экспериментальному изучению поведения СПФ при кручении. В отмеченных исследованиях не учитывается неоднородность упрочнения представительного объема СПФ, а используется понятие единого предела текучести. Как следствие это может привести к тому, что накопленная за процесс охлаждения фазово-структурная деформация будет превышать значение кристаллографической деформации фазового превращения. Решение, приведенное в данной работе, подобного недостатка лишено.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ КРУЧЕНИЯ ДЛЯ СТЕРЖНЯ ИЗ СПФ

Рассмотрение задачи ведется в цилиндрической системе координат r, z, φ . При кручении отличны от нуля только касательные напряжения $\tau_{z\varphi}$, в дальнейшем индекс $z\varphi$ будет для краткости опущен. Крутящий момент $M_{кр}$ вычисляется согласно следующему соотношению

$$M_{кр} = 2\pi \int_0^R \tau(r) r^2 dr$$

Здесь $M_{кр}$ – внешний крутящий момент, r, R – текущий и внешний радиус стержня.

Полные сдвиговые деформации $\gamma(r)$ определяются на основе гипотезы плоских сечений

$$\gamma(r) = \theta r$$

Здесь θ – крутка (относительный угол закручивания на единицу длины). В рамках модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [5-11] предполагается аддитивное представление деформаций. На случай кручения $\gamma(r)$ представляется следующим образом

$$\gamma(r) = \gamma^e(r) + \gamma^{ph}(r) + \gamma^{st}(r)$$

Здесь $\gamma^e(r), \gamma^{ph}(r), \gamma^{st}(r)$ – упругие, фазовые и структурные деформации соответственно. Упругие деформации определяются на основе ниже приведенного соотношения

$$\gamma^e(r) = \frac{\tau(r)}{G(q(r))}, \quad \frac{1}{G(q)} = \frac{q(r)}{G_M} + \frac{1-q(r)}{G_A}$$

Здесь G_A, G_M – модуль сдвига СПФ в аустенитном и мартенситном фазовом состоянии, q – параметр фазового состава, в качестве которого выступает объемная доля мартенситной фазы.

Для фазовых и структурных деформаций в общем случае справедливы дифференциальные соотношения

$$\frac{d\gamma^{ph}(r)}{dq(r)} = \left[\sqrt{3}\rho_D (1 - q(r)f(q)) F_1(\sqrt{3}\tau(r)) + f(q)\gamma^{ph}(r) \right]$$

Здесь ρ_d – интенсивность кристаллографической деформации фазового превращения, $f(q)$ – материальная функция, отвечающая за вклад в фазовую деформацию процессов зарождения и развития мартенситных элементов, F_1 – интегральная функция распределения интенсивности микронапряжений в аустенитном фазовом состоянии СПФ.

$$\frac{d\gamma^{st}(r)}{d\tau(r)} = 3\rho_d q(r) F_2'(\sqrt{3}\tau(r))$$

Здесь F_2' – производная интегральной функции распределения интенсивности микронапряжений в мартенситном фазовом состоянии СПФ.

2. ОПИСАНИЕ ПРОЦЕССА СТРУКТУРНОГО ПЕРЕХОДА

В рамках рассматриваемого термомеханического процесса прямого превращения, возможно одновременное и/или последовательное протекание фазовых и структурных изменений. В ранних вариантах модели [5-11] наличие структурного превращения регламентировалось следующими положениями:

1. Приращение касательных напряжений в представительном объеме должно быть больше нуля $d\tau(r) > 0$ при отсутствии разгрузки.
2. Величина касательных напряжений максимальна по модулю за всю историю процесса $\tau(r) = |\tau(r)_{\max}|$.

В рамках данных положений считается, что существует единое значение напряжения («предела текучести») начала неупругого деформирования всех мартенситных элементов представительного объема СПФ. Применение данной модели к процессам фазовых и структурных переходов при меняющихся напряжениях приводит к следующим противоречиям. Пусть прямое превращение происходит при монотонно уменьшающихся напряжениях. Согласно рассматриваемой модели все мартенситные элементы представительного объема СПФ будут иметь единый предел текучести равный максимальному значению напряжений на момент начала прямого превращения. Это положение не вызывает возражений для мартенситных элементов, зародившихся в начальный момент охлаждения, но неверно для остальных мартенситных элементов, зародившихся на поздних этапах прямого превращения. В случае последующего нагружения данного СПФ в режиме мартенситной неупругости [17] все мартенситные элементы будут деформироваться упруго вплоть до достижения напряжениями значения «единого предела текучести».

В работах [8,9] предложен альтернативный вариант описания механизма структурного превращения. Верным остается положение №1. Предполагается возможность различных значений предела текучести для различных

мартенситных элементов представительного объема. В рамках данной постановки необходимо определение той доли мартенситных элементов q_{st} , которые претерпевают в данной точке процесса структурный переход. Согласно [7] мартенситный элемент, образовавшийся при прямом мартенситном превращении под действием касательного напряжения τ_1 и накопивший фазовую деформацию γ^{ph1} будет иметь такое значение напряжения начала неупругого деформирования τ_2 при наличии структурного превращения, которое соответствует на диаграмме мартенситной неупругости той же величине деформации γ^{ph1} . Тогда величина напряжений τ_2 , при котором начнется неупругое деформирование представительного объема СПФ по механизму структурного перехода определяется по формуле

$$\sqrt{3}\tau_2 = \sigma_{02} \left\{ -\ln \left[1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{3}\tau_1 / \sqrt{2}\sigma_{01} \right) \right] \right\}^{1/\alpha} \quad (2.1)$$

Здесь принято, что $F_1(\sqrt{3}\tau(r)) = \Phi_1(\sqrt{3}\tau(r) / \sigma_{01})$, $\Phi_1(x) = \operatorname{erf}(x / \sqrt{2})$, $F_2(\sqrt{3}\tau(r)) = \Phi_2(\sqrt{3}\tau(r) / \sigma_{02})$, $\Phi_2(x) = 1 - \exp(-x)^\alpha$, $\alpha, \sigma_{01}, \sigma_{02}$ – параметры материала. Данная модель не противоречит экспериментальным данным [18], согласно которым интенсивность суммарных фазово-структурных деформаций в процессе прямого превращения не может превышать интенсивность кристаллографической деформации фазового превращения рассматриваемого СПФ. При этом соотношение (2.1) принимает следующий вид:

$$\frac{d\gamma^{st}(r)}{d\tau(r)} = 3\rho_d q_{st}(r) F_2'(\sqrt{3}\tau(r)) \quad (2.2)$$

Алгоритм определения величины q_{st} имеет следующий вид. На рис.2.1 приведена история изменения касательных напряжений τ (сплошная кривая) в представительном объеме СПФ. Текущая точка процесса отмечена звездочкой. Согласно (2.2) для каждой точки кривой $\tau - q$ вычисляется значение «порога» начала неупругого деформирования мартенситных элементов представительного объема СПФ (штриховая кривая). Суммарная длина горизонтальных отрезков представляет собой искомую величину q_{st} .

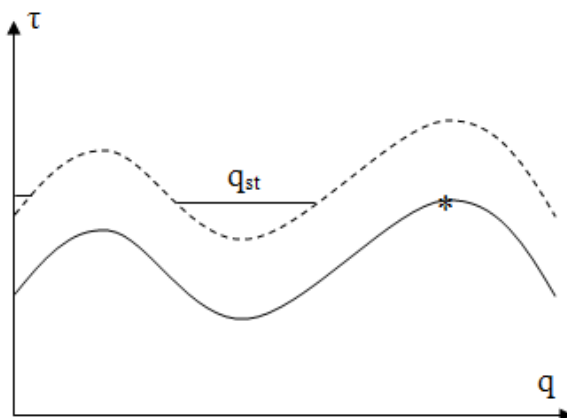


Рис.2.1. История изменения $\tau - q$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Рассмотрение задачи ведется в однократно связанной термомеханической постановке. Считается, что процесс охлаждения происходит достаточно медленно, так что поле температуры однородно по сечению стержня из СПФ. Общий алгоритм решения задачи о прямом превращении в стержне из СПФ, находящегося под действием постоянного крутящего момента изложен в работе [12].

В работе [12] соотношение для определения параметра фазового состава имеет следующий вид

$$q = \varphi(t_\sigma), \varphi(t_\sigma) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t_\sigma\right)$$

$$t_\sigma = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}$$

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\omega_{ij}^+ \sigma'_{ij}}{\Delta S_0}$$

$$\omega_{ij}^+ = \frac{3}{2} \rho_d \frac{\sigma'_{ij}}{\sigma_i} (1 - qf(q)) F_1(\sigma_i) + f(q) \varepsilon_{ij}^{phst'}$$

Здесь M_s, M_f – температуры начала и окончания прямого мартенситного превращения в отсутствие напряжений, верхний индекс 0, верхний индекс σ при наличии напряжений, T – текущая температура стержня из СПФ, ΔS_0 – скачок объемной плотности энтропии при переходе от мартенситного к аустенитному состоянию для отсчетной температуры T , σ'_{ij} , σ_i – девиатор и интенсивность напряжений, $\varepsilon_{ij}^{phst'}$ – девиатор фазово-структурной деформации. В данной работе для параметра фазового состава использовано ниже приведенное соотношение

$$q = \varphi(t_\sigma), \varphi(t_\sigma) = 0.5(1 - \cos(\pi t_\sigma)) \quad (3.1)$$

Учитывая это, результаты, приведенные в [12] получены вновь с учетом соотношения (3.1).

В ходе работы использованы следующие безразмерные переменные и параметры материала: $s(\xi) = \sqrt{3}\tau(r)/\sigma_{01}$ – безразмерные напряжения, $\xi = r/R$

– безразмерная радиальная координата, $\mu = \frac{2M_{kp}}{G_A \pi R^4} r$ – безразмерный крутящий

момент, $t_0 = \frac{M_s^0 - T}{M_s^0 - M_f^0}$ – безразмерный параметр температуры,

$\delta S_0 = \frac{(M_s^0 - M_f^0) \Delta S_0}{\sigma_{01}}$ – безразмерный скачок объемной плотности энтропии при

переходе от мартенситного к аустенитному состоянию для отсчетной температуры T , $\lambda = E_A/E_M = 3$, $s_{0A} = \sigma_{01}/G_A = 0.0046$, $s_{0M} = \sigma_{01}/G_M = 0.0139$, $f(q) = 0$, $\alpha = 2$, $\sigma_{01}/\sigma_{02} = 0.7$, $\delta S_0 = 0.1288$.

Ниже представлены эпюры безразмерных напряжений s по сечению стержня из СПФ на момент окончания прямого превращения.

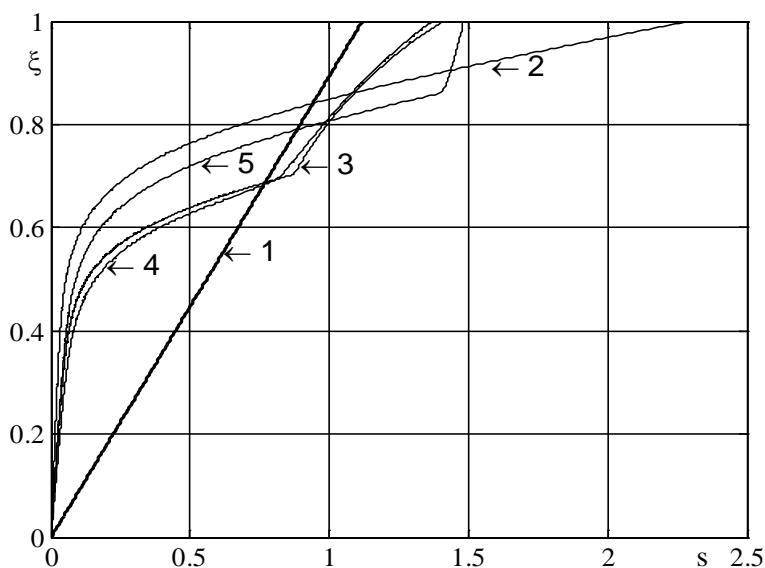


Рис.3.1. Эпюры $s - \xi$, $\mu = 0.003$.

На рис.3.1 кривая 1 – решение упругой задачи кручения стержня из СПФ, находящегося в аустенитном фазовом состоянии. Кривая 2 – решение, полученное без учета структурного перехода (модель №1). Кривая 3 – решение, в котором не учитывается неоднородность упрочнения мартенситных элементов представительного объема СПФ (весь мартенсит участвует в структурном переходе, модель №2). Кривая 4 – решение учитывающее неоднородность упрочнения мартенситных элементов представительного объема, но без учета различия диаграмм мартенситной неупругости и прямого мартенситного превращения (модель №3). Кривая 5 – решение, учитывающее неоднородность упрочнения мартенситных элементов представительного объема и различие диаграмм (модель №4).

Как видно из приведенного рисунка результаты решения по модели №2 и модели №3 дают достаточно близкие результаты. Решение по модели №1 приводится исключительно для сравнения и понимания того насколько не учет структурного перехода приведет к завышенным значениям напряжений на внешнем радиусе стержня. Решение по модели №4 является наиболее полным и значительно отличается в количественном плане от остальных. Как и в работе [12] на момент окончания прямого превращения отмечается разгрузка внутренних слоев стержня и перегрузка внешних. Данное явление тем интенсивнее, чем больше величина крутящего момента, под действием которого протекает прямое превращение.

На рис.3.2 представлена зависимость безразмерной крутки θ^I от безразмерного параметра температуры t_0 , представляющее собой решение задачи. Сплошная линия соответствует модели №1, штриховая – модели №4. Пары кривых приведены для значений $\mu = 0.01, 0.008, 0.005, 0.003, 0.002$ соответственно. Установлено, что для малых значений крутящего момента деформация, накапливаемая за процесс прямого термоупругого мартенситного превращения больше для решения, в котором весь мартенсит представительного объема СПФ участвует в структурном превращении. Для средних и больших значений крутящего момента, напротив решение учитывающие неоднородность упрочнения представительного объема СПФ и различия в диаграммах

мартенситной неупругости и прямого мартенситного превращения дает большее значение величины накапливаемой деформации.

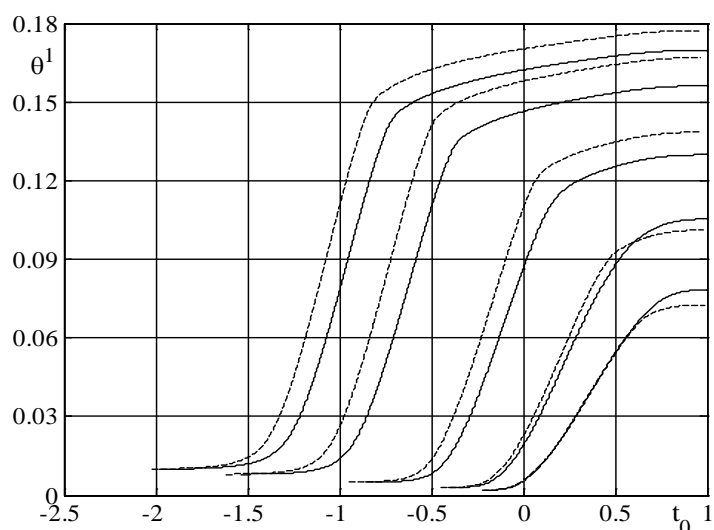


Рис.3.2. Зависимость $\theta^1 - t_0$.

ВЫВОДЫ

В ходе работы получено решение задачи о прямом термоупругом мартенситном фазовом превращении в стержне из СПФ, находящегося под действием постоянного крутящего момента с учетом неоднородного упрочнения мартенситных элементов представительного объема СПФ. Установлено, что, как и при решении, не учитывающем неоднородность упрочнения, на момент окончания прямого мартенситного превращения наблюдается разгрузка внутренних слоев при перегрузке внешних. Учет неоднородности упрочнения в совокупности с учетом структурного перехода в значительной степени разгружает внешние слои стержня. Учет неоднородности упрочнения наиболее актуален для средних значений моментов. Для малых значений крутящего момента деформация, накапливаемая за процесс прямого термоупругого мартенситного превращения выше для модели №1, для больших моментов – напротив, для модели №4.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихачев В.А., Кузьмин С.Л., Каменцева З.П. *Эффект памяти формы*. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 216 с.
2. Мовчан А.А., Ньюнт С., Семенов В.Н. *Проектирование силовозбудителя крутящего момента из сплава с памятью формы* // Труды ЦАГИ. – 2004. – В.2664. – С.220-230.
3. Icardi U., Ferrero L. *Preliminary study of an adaptive wing with shape memory alloy torsion actuators* // Materials and Design. – 2009. – Vol.30. – No.10. – Pp.4200-4210.
4. Aguiar R., Savi M., Pacheco P. *Experimental and numerical investigations of shape memory alloy helical springs* // Smart Materials and Structures. – 2010. – No.19. – 9 p.

5. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. *Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Известия РАН. МТТ. – 2010. – №3. – С.118-130.
6. Мовчан А.А., Казарина С.А., Мишустин И.В., Мовчан И.А. *Термодинамическое обоснование модели нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях* // Деформация и разрушение материалов. – 2009. – №8. – С.2-9.
7. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. МТТ. – 2011. – №2. – С.44-56.
8. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений* // Известия РАН. МТТ. – 2014. – №1. – С.37-53.
9. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы* // Известия РАН. МТТ. – 2015. – №2. – С.78-95.
10. Мовчан А.А. *Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы* // Прикладная механика и техническая физика. – 1998. – Т.39. – №1. – С.87-97.
11. Мовчан А. А., Мишустин И. В., Казарина С. А. *Вариант микроструктурной модели деформирования сплавов с памятью формы* // Деформация и разрушение материалов. – 2017. – №5. – С.6-11.
12. Саганов Е.Б. *Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №3. – С.454-468.
13. Мовчан А.А., Тант Зин Аунг. *Анализ работы пружин из сплава с памятью формы в рамках модели нелинейного деформирования этих материалов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т.15. – №4. – С.591-600.
14. Mirzaeifar R., DesRoches R., Yavari A. *Exact solutions for pure torsion of shape memory alloy circular bars* // Mechanics of Materials. – 2010. – Vol.42 – No.8. – Pp.797-806.
15. Mirzaeifar R., DesRoches R., Yavari A, Gall K. *Coupled thermo-mechanical analysis of shape memory alloy circular bars in pure torsion* // International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2012. – Vol.47. – No.3. – Pp.118-128.
16. Lagoudas D., Hartl D., Chemisky Y., Machado L., Popov P. *Constitutive model for the numerical analysis of phase transformation in polycrystalline shape memory alloys* // International Journal of Plasticity. – 2012. – Vol.32-33. – Pp.155-183.
17. Wu D., Sun G., Wu J. *The nonlinear relationship between transformation strain and applied stress for nitinol* // Materials Letters. – 2003. – Vol.57. – No.7. – Pp.1334-1338.
18. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.

REFERENCES

1. Likhachev V.A., Kuz'min S.L., Kamentseva Z.P. *Effekt pamiati formy [Shape memory effect]*. Leningrad, Izd-vo Leningr. Univ., 1987, 216 p.
2. Movchan A.A., N'iunt S., Semenov V.N. *Proektirovanie silovozbuditel'ia krutiashchego momenta iz splava s pamiat'iu formy [Design of the torque exciter force generator from the shape memory alloy]*. Trudy TsAGI, 2004, Vol.2664, Pp.220-230.
3. Icardi U., Ferrero L. *Preliminary study of an adaptive wing with shape memory alloy torsion actuators*. Materials and Design, 2009, Vol.30, No.10, Pp.4200-4210.
4. Aguiar R., Savi M., Pacheco P. *Experimental and numerical investigations of shape memory alloy helical springs*. Smart Materials and Structures, 2010, No.19, 9 p.
5. Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L.G. *Micromechanical model of nonlinear deformation of shape memory alloys under phase and structure transitions*. Mechanics of Solids, 2010, Vol.45, No.3, Pp.406-416.
6. Movchan A.A., Kazarina S.A., Mishustin I.V., Movchan I.A. *Tepmodinamicheskoye obosnovaniye modeli nelineynogo defopmipovaniya splavov s pamyatyu fopmy ppi fazovykh i stpuktupnykh ppevpashcheniyakh [Thermodynamic justification of non-linear shape memory alloys straining model in phase and structural transformation]*. Deformatsiya i razrusheniye materialov, 2009, No.8, Pp.2-9.
7. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. *Taking account of the martensite inelasticity in the reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
8. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids, 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.
9. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.
10. Movchan A.A. *Coupling effects in bending problems for beams of a shape memory alloy*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1998, Vol.39, No.1, Pp.143-151.
11. Movchan A. A., Mishustin I. V., Kazarina S. A. *Variant mikrostrukturnoy modeli deformirovaniya splavov s pamyatyu formy [Variant micro-structural model of shape memory alloys straining]*. Deformatsiya i razrusheniye materialov, 2017, No.5, Pp.6-11.
12. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o priamom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamiat'iu formy, nakhodiashchetsia pod deistviem postoiannogo krutiashchego momenta [Solution the problem of direct martensitic transition in rods from shape memory alloy under constant torque]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2014, Vol.20, No.3, Pp.454-468.
13. Movchan A.A., Tant Zin Aung. *Analiz raboty pruzhin iz splava s pamiat'iu formy v ramkakh modeli nelineinogo deformirovaniia etikh materialov [Analysis of the behavior of springs from shape memory alloy in framework of non-linear straining model for these materials]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2011, Vol.15, No.4, Pp.591-600.
14. Mirzaeifar R., DesRoches R., Yavari A. *Exact solutions for pure torsion of shape memory alloy circular bars*. Mechanics of Materials, 2010, Vol.42, No.8, Pp.797-806.

15. Mirzaeifar R., DesRoches R., Yavari A, Gall K. *Coupled thermo-mechanical analysis of shape memory alloy circular bars in pure torsion*. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2012, Vol.47, No.3, Pp.118-128.
16. Lagoudas D., Hartl D., Chemisky Y., Machado L., Popov P. *Constitutive model for the numerical analysis of phase transformation in polycrystalline shape memory alloys*. International Journal of Plasticity, 2012, Vol.32-33, Pp.155-183.
17. Wu D., Sun G., Wu J. *The nonlinear relationship between transformation strain and applied stress for nitinol*. Materials Letters, 2003, Vol.57, No.7, Pp.1334-1338.
18. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid mechanics: Experimental study, constitutive relations, solution of boundary-value problems*. Physical Mesomechanics, 2012, Vol.15, No.1, Pp.105-116.

Поступила в редакцию 11 января 2018 года.

Сведения об авторе:

Саганов Евгений Борисович – с.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: saganoff@yandex.ru