УДК 539.3

ПРИНЦИПЫ ЛАГРАНЖА И КАСТИЛЬЯНО В ТЕОРИИ ПЛОСКОЙ РЕГУЛЯРНОЙ ФЕРМЫ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

Рыбаков Л.С.

ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Линейная теория плоской регулярной фермы ортогональной структуры построена с помощью вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно.

В соответствии с методом склейки ферма расчленялась на узлы и стержни. Упругий анализ последних и геометрические условия сопряжения их с узлами показали, что напряженно-деформированное состояние фермы описывается узловыми смещениями, полными удлинениями стержней и начальными усилиями в них. Все эти искомые величины являются функциями двух целочисленных параметров, использованных для нумерации узлов и стержней. Результатом поэлементного упругого анализа явились соотношения, связывающие полные удлинения стержней с узловыми смещениями и начальными усилиями.

Остальные определяющие уравнения теории выведены из вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно, базирующихся на дискретном аналоге вариационного исчисления. В нем функционалы формируются суммами и зависят от функций дискретных аргументов.

Из вариационного принципа Лагранжа получены статические уравнения и дана постановка краевой задачи в узловых смещениях. Общее решение статических уравнений представлено с точностью до двух функций целочисленных параметров, названных силовыми функциями. Указывая на статическую неопределимость упругой систем, они играют ту же роль, что и функции напряжений в механике упругих тел. С помощью силовых функций из вариационного принципа Кастильяно выведены уравнения совместности полных удлинений стержней и дана постановка краевой задачи в начальных усилиях и в силовых функциях.

Ключевые слова: плоская регулярная ферма ортогональной структуры; линейный упругий анализ; метод склейки; вариационные принципы Лагранжа и Кастильяно

VARIATIONAL PRINCIPLES OF LAGRANGE AND CASTIGLIANO IN THEORY OF A PLANE REGULAR TRUSS WITH ORTHOGONAL STRUCTURE

Rybakov L.S.

Moscow Aviation Institute (*National Research University*), *Moscow, Russia*

ABSTRACT

The linear theory of a plane regular truss built by means of the variational principles of Lagrange and Castigliano.

According to glueing method, the truss was split into nodes and rods. Elastic analysis of rods and geometric conditions of the conjugation of their with the nodes showed that the stress-strain state of the truss is described by the nodal displacements, the total elongations of the rods and internal initial forces in them. All these unknown values are functions of two integer parameters, used for numbering the nodes and rods. The result of element-wise elastic analysis was the relationships connecting the total elongation of the rods with nodal displacements and initial forces.

The remaining defining equations of the theory are derived from the variational principles of Lagrange and Castigliano, based on the discrete analogue of the calculus of variations. Its functionals are formed by sums and depend on functions of discrete arguments

From the variational principle of Lagrange the static equations are obtained and a formulation of the boundary value problem in nodal displacements is given. The general solution of the static equations is represented to within two functions of integer parameters called force functions. Pointing to the redundancy of elastic systems, they play the same role as stress functions in the mechanics of elastic bodies. Using force functions, the compatibility equations for the total elongation of the rods are derived from the Castigliano variational principle and formulations of the boundary value problem in the initial forces and in the force functions is given.

Keywords: plane regular truss with orthogonal structure; linear elastic analysis; gluing method; Lagrange and Castigliano's variational principles

ВВЕДЕНИЕ

Обширная литература по линейному упругому анализу ферм и других стержневых систем позволяет все известные методы такого анализа подразделить на континуальные и дискретно-континуальные [1].

Континуальные методы [2-10] ориентированы на регулярные системы с большим количеством периодически повторяющихся элементов. Суть их в замене реальной системы конструктивно-анизотропным телом, а различие в выбранном континуальном эквиваленте системы и в процедуре континуализации. Пример континуальных методов дают теории сетчатых пластин и оболочек [4,6]. Следует подчеркнуть, что континуальные методы не учитывают индивидуальные свойства деформирования и взаимодействия элементов системы.

Этого недостатка лишены дискретно-континуальные методы, опирающиеся на дискретно-континуальную природу стержневых систем [11-24]. К ним в первую очередь следует отнести ставшие классическими метод сил, метод перемещений и различные их модификации. Все они носят алгоритмический характер и развивались с появлением вычислительной техники по пути применения матричного аппарата и разработки эффективных методов решения больших систем линейных алгебраических уравнений [21-24].

Значительную популярность среди дискретно-континуальных методов завоевал метод конечных элементов [25-28]. Обладая возможностями классических методов, он получил широкое распространение благодаря известным программным комплексам, реализующим его универсальный алгоритм.

Среди других методов дискретно-континуального анализа регулярных стержневых систем выделим метод склейки, предполагающий членение системы на элементы и проведение поэлементного анализа с учетом геометрических условий сопряжения смежных элементов.

Поэлементный аналитический упругий анализ позволяет выявить искомые обобщенные перемещения, деформации и внутренние силы, всецело описывающие напряженно-деформированное состояние стержневой системы. Эти переменные оказываются функциями лишь целочисленных параметров, использованных для нумерации элементов системы, и свидетельствуют о строгом сведении исходной дискретно-континуальной проблемы к дискретной.

Дальнейшая реализация метода склейки направлена на построение строгой дискретной теории упругости, присущей изучаемой стержневой системе. Общность подобных теорий в наличии полной замкнутой системы определяющих уравнений, включающей геометрические и физические зависимости, статические соотношения и уравнения совместности деформаций. Во всем этом усматривается дискретная аналогия с соответствующими континуальными теориями упругих тел. Линейная теория плоских регулярных упругих ферм ортогональной структуры изучалась в работах [29-31].

Настоящее исследование посвящено построению полной замкнутой системы уравнений теории плоской регулярной фермы ортогональной структуры с помощью вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно.

Известно [32-35], что статические соотношения теории упругости, включающие дифференциальные уравнения равновесия и статические граничные условия, вытекают из принципа Лагранжа. Что же касается принципа Кастильяно, то его следствием после введения функций напряжения являются уравнения совместности деформаций. Ниже эти известные факты реализуются для плоской регулярной фермы ортогональной структуры.

Особенность приводимых ниже исследований в применении принципов Лагранжа и Кастильяно к упругой системе с использованием неклассического вариационного исчисления. В классическом вариационном исчислении используются континуальные операции интегрирования и дифференцирования. Функционалы задаются в нем, как правило, интегралами и зависят от функций непрерывных аргументов.

В упругих системах функционалы Лагранжа и Кастильяно, формируемые интегрированием на уровне отдельных элементов и суммированием по элементам, зависят от функций непрерывных и(или) целочисленных аргументов, с помощью которых нумеруются элементы системы. Поэтому в таких случаях резонно говорить о дискретно-континуальной природе функционалов и изучающего их вариационного исчисления.

В случае стержневых систем поэлементный упругий анализ в аналитическом виде освобождает дискретно-континуальные функционалы от интегралов, превращая их в дискретные, формирующиеся суммами и зависящие от функций целочисленных аргументов. Дискретное вариационное исчисление как раз и предназначено для изучения экстремальных свойств таких функционалов.

Дискретные операции над функциями целочисленных аргументов делают формулы и уравнения трудно обозримыми из-за присутствия в них функций со смещенными и несмещенными текущими значениями целочисленных аргументов. Избавиться от этого можно путем введения дискретных операторов, позволяющим отказаться от смещенных значений дискретных аргументов.

Пусть $\psi\left[i_1,i_2\right]$ – функция дискретных аргументов i_1, i_2 (кратко $\psi\left[i_\sigma\right]$ и i_σ; здесь и далее греческие индексы принимают значения 1,2). Введем линейные операторы сдвига $\nabla_\alpha^{\pm}$, $\nabla_{12}^{\pm\pm}$, $\nabla_{12}^{\pm\mp}$, смысл которых поясняют равенства ($\delta_{\alpha\sigma}$ – символ Кронекера)

$$\begin{gathered}\nabla_\alpha^{\pm}\psi=\psi\left[i_\sigma\pm\delta_{\alpha\sigma}\right],\quad \nabla_{12}^{\pm\pm}\psi=\psi\left[i_\sigma\pm 1\right],\quad \nabla_{12}^{\pm\mp}\psi=\psi\left[i_\sigma\mp(-1)^\sigma\right],\\ \nabla_\alpha^{+}\nabla_\alpha^{-}=\nabla_\alpha^{-}\nabla_\alpha^{+}=1,\quad \nabla_{12}^{\pm\pm}=\nabla_{21}^{\pm\pm}=\nabla_1^{\pm}\nabla_2^{\pm},\quad \nabla_{12}^{\pm\mp}=\nabla_{21}^{\mp\pm}=\nabla_1^{\pm}\nabla_2^{\mp}.\end{gathered}\tag{1}$$

С помощью этих операторов формируются разностные операторы первого порядка

$$\Delta_\alpha^\pm \psi[i_\sigma] = \pm\psi[i_\sigma \pm \delta_{\alpha\sigma}] \mp \psi[i_\sigma], \qquad \Delta_\alpha^\pm = \pm\nabla_\alpha^\pm \mp 1,$$
$$\Delta_{12}^\pm \psi[i_\sigma] = \pm\psi[i_\sigma \pm 1] \mp \psi[i_\sigma], \qquad \Delta_{12}^\pm = \pm\nabla_{12}^{\pm\pm} \mp 1, \tag{2}$$
$$\Delta_{21}^\pm \psi[i_\sigma] = \pm\psi\left[i_\sigma \mp (-1)^\sigma\right] \mp \psi[i_\sigma], \quad \Delta_{21}^\pm = \pm\nabla_{12}^{\pm\mp} \mp 1,$$

а затем и разностные операторы более высокого порядка. Так для разностных операторов второго порядка, определяемых равенствами

$$\Delta_\alpha^2 \psi[i_\sigma] = \psi[i_\sigma + \delta_{\alpha\sigma}] - 2\psi[i_\sigma] + \psi[i_\sigma - \delta_{\alpha\sigma}],$$
$$\Delta_{12}^2 \psi[i_\sigma] = \psi[i_\sigma + 1] - 2\psi[i_\sigma] + \psi[i_\sigma - 1], \tag{3}$$
$$\Delta_{21}^2 \psi[i_\sigma] = \psi\left[i_\sigma - (-1)^\sigma\right] - 2\psi[i_\sigma] + \psi\left[i_\sigma + (-1)^\sigma\right],$$

справедливы выражения (см. (1)-(3))

$$\Delta_\alpha^2 = \Delta_\alpha^+ \Delta_\alpha^- = \Delta_\alpha^+ - \Delta_\alpha^- = \nabla_\alpha^+ - 2 + \nabla_\alpha^-,$$
$$\Delta_{12}^2 = \Delta_{12}^+ \Delta_{12}^- = \Delta_{12}^+ - \Delta_{12}^- = \nabla_{12}^{++} - 2 + \nabla_{12}^{--}, \tag{4}$$
$$\Delta_{21}^2 = \Delta_{21}^+ \Delta_{21}^- = \Delta_{21}^+ - \Delta_{21}^- = \nabla_{21}^{+-} - 2 + \nabla_{21}^{-+}.$$

Введенные операторы и позволяют записывать формулы и уравнения в переменных с несмещенными текущими значениями дискретных аргументов и опускать такие аргументы ради краткости записи при символах зависимых переменных.

Ниже используются дискретные операции, называемые суммированием по частям. Чтобы пояснить их смысл, рассмотрим две функции $\varphi[i_\sigma]$ и $\psi[i_\sigma]$ дискретных аргументов i_σ, определенные при $i_\sigma \in [0, I_\sigma]$, где $I_\sigma > 0$ – заданные целые числа, а $[0, I_\sigma]$ – замкнутый целочисленный отрезок, начинающийся с 0 и заканчивающийся I_σ. Будем считать, что $\varphi[i_\sigma] = \psi[i_\sigma] \equiv 0$ при $i_\sigma \notin [0, I_\sigma]$. Тогда операции суммирования по частям можно выразить формулами

$$\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \varphi\nabla_\alpha^\pm\psi = \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \nabla_\alpha^\mp\varphi\cdot\psi, \quad \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \varphi\nabla_{12}^{\pm\pm}\psi = \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \nabla_{12}^{\mp\mp}\varphi\cdot\psi,$$
$$\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \varphi\Delta_\alpha^\pm\psi = -\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \Delta_\alpha^\mp\varphi\cdot\psi, \quad \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \varphi\Delta_{\alpha,3-\alpha}^\pm\psi = -\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \Delta_{\alpha,3-\alpha}^\mp\varphi\cdot\psi, \tag{5}$$
$$\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \varphi\Delta_\alpha^2\psi = \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \Delta_\alpha^2\varphi\cdot\psi, \quad \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \varphi\Delta_{\alpha,3-\alpha}^2\psi = \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma} \Delta_{\alpha,3-\alpha}^2\varphi\cdot\psi.$$

Здесь и далее под суммой с индексом суммирования i_σ понимается две суммы. Одна из них означает суммирование по индексу i_1 в пределах, отвечающих $\sigma = 1$, а другая – суммирование по i_2 в пределах, соответствующих $\sigma = 2$. Например,

$$\sum_{i_\sigma=\delta_{2\sigma}}^{I_\sigma-\delta_{1\sigma}} = \sum_{i_1=0}^{I_1-1}\sum_{i_2=1}^{I_2}.$$

Кроме того, в формулах (5) предполагается, что слагаемые, содержащие значения функций за пределами области их определения, следует опустить, знак умножения в виде точки ограничивает справа область действия предшествующих разностных операторов, а запятая в сложном индексе играет роль разделителя.

1. ПОЭЛЕМЕНТНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ УПРУГИЙ АНАЛИЗ ФЕРМЫ

Рассмотрим плоскую свободную ферму (рис.1), представляющую собой периодическое повторение вдоль декартовых осей x_σ элементарной ячейки из стержней в форме прямоугольника с двумя несвязанными между собой диагональными стержнями. Назовём горизонтальные, вертикальные и нисходящие и восходящие диагональные стержни соответственно 11–, 22–, 21– и 12–стержнями (совокупно $\alpha\beta-$стержни). Смежные стержни жестко связаны между собой в узлах решётки – местах пересечения упругих линий $\alpha\alpha-$стержней. По предположению все $\alpha\beta-$стержни упругие и однородные, а стержни одного семейства одинаковые и расположены с постоянным шагом.

В силу дискретной двухмерности фермы для нумерации ее элементов (узлов и стержней) требуются два целочисленных параметра, выступающих для переменных величин в роли дискретных аргументов. Обозначим их символом i_σ и будем считать, что они растут в направлении осей x_σ соответственно.

Условимся текущему узлу и исходящим из него текущим $\alpha\beta-$стержням присваивать один и тот же номер $\left(i_\sigma\right)$. Области изменения параметров i_σ для элементов фермы зависят от ее внешней формы. В случае ферм с прямоугольной границей (рис.1) для узлов $i_\sigma\in\left[0,I_\sigma\right]$, для $\alpha\alpha-$стержней $i_\sigma\in\left[0,I_\sigma-\delta_{\alpha\sigma}\right]$, для $12-$стержней $i_\sigma\in\left[0,I_\sigma-1\right]$, а для $21-$стержней $i_\sigma\in\left[\delta_{\sigma 2},I_\sigma-\delta_{\sigma 1}\right]$. При иных конфигурациях фермы граничные значения параметров i_σ будут другими. Более того, граничные значения одного параметра могут оказаться функциями другого параметра.

Геометрические и упругие свойства фермы описываются длинами $l_{\alpha\alpha}$ $\alpha\alpha-$стержней (здесь и далее суммирование по повторяющимся индексам не предполагается) и жесткостями $g_{\alpha\beta}$ на растяжение-сжатие $\alpha\beta-$стержней. Регулярность фермы предполагает неизменность этих параметров в пределах фиксированного семейства стержней. Что касается внешних воздействий на ферму, то они в общем случае слагаются из узловых сил и погонных осевых сил стержней (на рис.1 они не показаны).

Пусть $x\in\left[0,l_{\alpha\beta}\right]$ – локальная осевая координата $\alpha\beta-$стержня, а $u_{\alpha\beta}$, $n_{\alpha\beta}$ и $p_{\alpha\beta}$ — осевое смещение, внутреннее осевое усилие и погонная осевая сила в произвольной точке упругой оси $\alpha\beta-$стержня; U_α и P_α – смещение узла и действующая на него внешняя сила в направлении оси x_α.

Зависимые переменные, относящиеся к стержням, являются функциями континуального аргумента x и дискретных аргументов i_σ, а узловые переменные – функциями только дискретных аргументов i_σ. Поэтому следовало бы, например, писать $u_{\alpha\beta}\left(x;i_1,i_2\right)$, $U_\alpha\left[i_1,i_2\right]$ или кратко $u_{\alpha\beta}\left(x;i_\sigma\right)$, $U_\alpha\left[i_\sigma\right]$. Ради еще большей краткости записи условимся текущие значения дискретных аргументов при символах зависимых переменных опускать вообще.

Заметим еще, что область определения дискретных аргументов i_σ зависимых переменных, формул и уравнений, связанных с элементами фермы фиксированного семейства, совпадает со значениями i_σ, участвующими в нумерации этих элементов, и повторно при названных математических объектах не указывается.

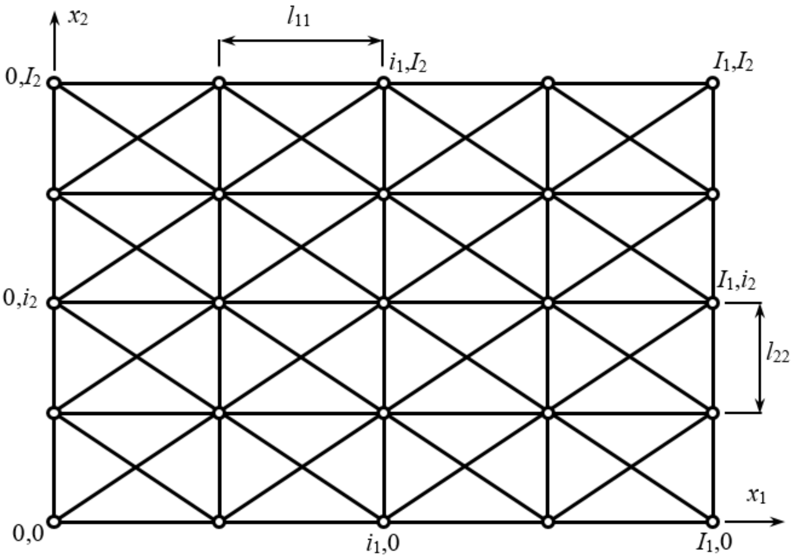

Рис.1.

Следуя методу склейки, расчленим ферму на изолированные элементы – узлы и $\alpha\beta-$стержни. Затем приложим к ним их собственные внешние воздействия и силы взаимодействия с ближайшими элементами. После этого проведем упругий анализ стержней с учетом геометрических условий сопряжения стержней с узлами фермы.

Деформирование изолированных $\alpha\beta-$стержней описывают уравнения

$$n'_{\alpha\beta}\left(x\right)+p_{\alpha\beta}\left(x\right)=0,\quad n_{\alpha\beta}\left(x\right)=g_{\alpha\beta}u'_{\alpha\beta}\left(x\right), \tag{6}$$

общее решение которых с точностью до начальных смещений $u_{\alpha\beta}\left(0\right)$ и начальных усилий $N_{\alpha\beta}=n_{\alpha\beta}\left(0\right)$ стержней дается формулами

$$u_{\alpha\beta}\left(x\right)=u_{\alpha\beta}\left(0\right)+g_{\alpha\beta}^{-1}N_{\alpha\beta}x+u_{\alpha\beta}^{*}\left(x\right),\quad n_{\alpha\beta}\left(x\right)=N_{\alpha\beta}+n_{\alpha\beta}^{*}\left(x\right), \tag{7}$$

$$u_{\alpha\beta}^{*}\left(x\right)=-g_{\alpha\beta}^{-1}\int_0^x\left(x-\tau\right)p_{\alpha\beta}\left(\tau\right)d\tau,\quad n_{\alpha\beta}^{*}\left(x\right)=-\int_0^x p_{\alpha\beta}\left(\tau\right)d\tau.$$

Полагая в первом равенстве (7) $x=l_{\alpha\beta}$ и вводя полные удлинения стержней

$$U_{\alpha\beta}=l_{\alpha\beta}^{-1}\left[u_{\alpha\beta}\left(l_{\alpha\beta}\right)-u_{\alpha\beta}\left(0\right)\right], \tag{8}$$

приходим к выражениям

$$N_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}U_{\alpha\beta}-N_{\alpha\beta}^{*} \tag{9}$$

и обратным им зависимостям

$$U_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}^{-1}N_{\alpha\beta}+U_{\alpha\beta}^{*},\qquad \text{Ё} \tag{10}$$

в которых использованы обозначения

$$U_{\alpha\beta}^{*}=l_{\alpha\beta}^{-1}u_{\alpha\beta}^{*}\left(l_{\alpha\beta}\right),\quad N_{\alpha\beta}^{*}=g_{\alpha\beta}U_{\alpha\beta}^{*}.$$

Геометрические условия сопряжения $\alpha\beta-$стержня с соседними узлами имеют вид

$$
\begin{aligned}
&u_{\alpha\alpha}(0)=U_{\alpha}, && u_{\alpha\alpha}(l_{\alpha\alpha})=\nabla_{\alpha}^{+}U_{\alpha},\\
&u_{12}(0)=c_1U_1+c_2U_2, && u_{12}(l_{12})=\nabla_{12}^{++}(c_1U_1+c_2U_2),\\
&u_{21}(0)=c_1U_1-c_2U_2, && u_{21}(l_{21})=\nabla_{12}^{+-}(c_1U_1-c_2U_2),
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где $c_{\alpha}=l_{\alpha\alpha}/l_{12}$. Подставляя выражения (11) в формулу (8), получаем

$$
\begin{aligned}
&U_{11}=l_{11}^{-1}\Delta_1^{+}U_1, \quad U_{12}=l_{12}^{-1}\Delta_{12}^{+}(c_1U_1+c_2U_2),\\
&U_{22}=l_{22}^{-1}\Delta_2^{+}U_2, \quad U_{21}=l_{12}^{-1}\Delta_{21}^{+}(c_1U_1-c_2U_2).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Эти формулы выражают полные удлинения $U_{\alpha\beta}$ стержней через узловые смещения U_{α}, а соотношения (9), (10) связывают начальные усилия $N_{\alpha\beta}$ и полные удлинения $U_{\alpha\beta}$ стержней. По смыслу первые напоминают геометрические, а вторые – физические соотношения механики упругого тела. Поэтому назовем формулы (12) геометрическими, а зависимости (9), (10) – физическими соотношениями изучаемой теории.

2. ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА ЛАГРАНЖА

С целью вывода уравнений равновесия узлов фермы обратимся к вариационному принципу Лагранжа. Пусть $L\left[u_{\alpha\beta}(x),U_{\sigma}\right]$ – функционал полной энергии фермы, аргументами которого являются осевые перемещения стержней фермы и узловые перемещения. Он слагается из таких же энергий стержней фермы за вычетом работы узловых внешних сил, т.е.

$$
L\left[u_{\alpha\beta}(x),U_{\sigma}\right]=\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{i_{\sigma}=0}^{I_{\sigma}-\delta_{\alpha\sigma}}L_{\alpha\alpha}+\sum_{i_{\sigma}=0}^{I_{\sigma}-1}L_{12}+\sum_{i_{\sigma}=\delta_{2\sigma}}^{I_{\sigma}-\delta_{1\sigma}}L_{21}-\sum_{i_{\sigma}=0}^{I_{\sigma}}\sum_{\alpha=1}^{2}P_{\alpha}U_{\alpha}.
$$

Здесь $L_{\alpha\beta}\left[u_{\alpha\beta}(x)\right]=V_{\alpha\beta}\left[u_{\alpha\beta}(x)\right]-A_{\alpha\beta}\left[u_{\alpha\beta}(x)\right]$ – функционал полной энергии $\alpha\beta-$ стержня, а $V_{\alpha\beta}\left[u_{\alpha\beta}(x)\right]$ и $A\left[u_{\alpha\beta}(x)\right]$ – функционалы его потенциальной энергии и работы погонной внешней силы $p_{\alpha\beta}$. Если δL, $\delta L_{\alpha\beta}$, $\delta V_{\alpha\beta}$ и $\delta A_{\alpha\beta}$ – первые вариации только что введенных функционалов, то согласно принципу Лагранжа

$$
\delta L=\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{i_{\sigma}=0}^{I_{\sigma}-\delta_{\alpha\sigma}}\delta L_{\alpha\alpha}+\sum_{i_{\sigma}=0}^{I_{\sigma}-1}\delta L_{12}+\sum_{i_{\sigma}=\delta_{2\sigma}}^{I_{\sigma}-\delta_{1\sigma}}\delta L_{21}-\sum_{i_{\sigma}=0}^{I_{\sigma}}\sum_{\alpha=1}^{2}P_{\alpha}\delta U_{\alpha}=0.
\tag{13}
$$

Замечая, что (см. (6))

$$
\delta L_{\alpha\beta}=\delta V_{\alpha\beta}-\delta A_{\alpha\beta}, \quad \delta A_{\alpha\beta}=\int_{0}^{l_{\alpha\beta}}p_{\alpha\beta}\delta u_{\alpha\beta}dx,
$$

$$
\delta V_{\alpha\beta}=\int_{0}^{l_{\alpha\beta}}n_{\alpha\beta}\delta u'_{\alpha\beta}dx=\left(n_{\alpha\beta}\delta u_{\alpha\beta}\right)\Big|_{0}^{l_{\alpha\beta}}+\delta A_{\alpha\beta},
$$

с учетом формул (7), (8) находим

$$
\delta L_{\alpha\beta}=l_{\alpha\beta}N_{\alpha\beta}\delta U_{\alpha\beta}+n_{\alpha\beta}^{*}\left(l_{\alpha\beta}\right)\delta u_{\alpha\beta}\left(l_{\alpha\beta}\right).
\tag{14}
$$

Результаты (7), (8) упругого анализа $\alpha\beta-$стержня позволили превратить дискретно-континуальный функционал $L_{\alpha\beta}\left[u_{\alpha\beta}(x)\right]$ в дискретный $L_{\alpha\beta}\left[U_{\sigma}\right]$. Тоже происходит и с функционалом $L\left[u_{\alpha\beta}(x),U_{\sigma}\right]$, который становится дискретным функционалом $L[U_\alpha]$. Подставим теперь нужные зависимости (11), (12) в формулу (14) и воспользуемся полученными результатами для раскрытия трех первых слагаемых в выражении (13). В итоге получим

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-\delta_{\alpha\sigma}}\delta L_{\alpha\alpha}=\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-\delta_{\alpha\sigma}}\left[N_{\alpha\alpha}\Delta_\alpha^+\delta U_\alpha+n_{\alpha\alpha}^*\left(l_{\alpha\alpha}\right)\nabla_\alpha^+\delta U_\alpha\right],$$

$$\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1}\delta L_{12}=\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1}\sum_{\alpha=1}^{2}c_\alpha\left[N_{12}\Delta_{12}^++n_{12}^*\left(l_{12}\right)\nabla_{12}^{++}\right]\delta U_\alpha,$$

$$\sum_{i_\sigma=\delta_{2\sigma}}^{I_\sigma-\delta_{1\sigma}}\delta L_{21}=\sum_{i_\sigma=\delta_{2\sigma}}^{I_\sigma-\delta_{1\sigma}}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(-1\right)^{\alpha+1}c_\alpha\left[N_{21}\Delta_{21}^++n_{21}^*\left(l_{12}\right)\nabla_{12}^{+-}\right]\delta U_\alpha.$$

Проводя здесь суммирование по частям (см. (5)), найдем

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-\delta_{\alpha\sigma}}\delta L_{\alpha\alpha}=\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\nabla_\alpha^-n_{\alpha\alpha}^*\left(l_{\alpha\alpha}\right)-\Delta_\alpha^-N_{\alpha\alpha}\right]\cdot\delta U_\alpha,$$

$$\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1}\delta L_{12}=\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma}\sum_{\alpha=1}^{2}c_\alpha\left[\nabla_{12}^{--}n_{12}^*\left(l_{12}\right)-\Delta_{12}^-N_{12}\right]\cdot\delta U_\alpha,$$

$$\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1}\delta L_{21}=\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{-\left(-1\right)^\alpha c_\alpha\left[\nabla_{12}^{-+}n_{12}^*\left(l_{12}\right)-\Delta_{21}^-N_{21}\right]\cdot\delta U_\alpha\right\}.$$

Напомним, что здесь величины, указывающие непосредственно или же после раскрытия предшествующих разностных операторов на несуществующие элементы фермы, следует положить равными нулю. Подстановка последних выражений в равенство (13) приводит к условию стационарности

$$\delta L=-\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma}\sum_{\alpha=1}^{2}\left\{\Delta_\alpha^-N_{\alpha\alpha}+c_\alpha\left[\Delta_{12}^-N_{12}-\left(-1\right)^\alpha\Delta_{21}^-N_{21}\right]+P_\alpha^*\right\}\cdot\delta U_\alpha=0,\qquad(15)$$

в котором внешние силовые воздействия представлены величинами

$$P_\alpha^*=P_\alpha-\nabla_\alpha^-n_{\alpha\alpha}^*\left(l_{\alpha\alpha}\right)-c_\alpha\left[\nabla_{12}^{--}n_{12}^*\left(l_{12}\right)-\left(-1\right)^\alpha\nabla_{12}^{-+}n_{21}^*\left(l_{12}\right)\right].$$

Из условия (15) вытекают искомые статические соотношения

$$\Delta_\alpha^-N_{\alpha\alpha}+c_\alpha\left[\Delta_{12}^-N_{12}-\left(-1\right)^\alpha\Delta_{21}^-N_{21}\right]+P_\alpha^*=0.\qquad(16)$$

Именно так выглядят уравнения равновесия внутренних узлов. Статические граничные условия образуют уравнения равновесия свободных граничных узлов фермы. Они получаются из уравнений (16) путем отбрасывания членов, указывающих на несуществующие стержни.

Примем за основные неизвестные узловые смещения U_α. С помощью зависимостей (9), (12) начальные усилия $N_{\alpha\beta}$ выражаются через них формулами

$$\begin{aligned}&N_{\alpha\alpha}=g_{\alpha\alpha}^*\Delta_\alpha^+U_\alpha-N_{\alpha\alpha}^*,\\&N_{12}=g_{12}^*\Delta_{12}^+\left(c_1U_1+c_2U_2\right)-N_{12}^*,\\&N_{21}=g_{21}^*\Delta_{21}^+\left(c_1U_1-c_2U_2\right)-N_{21}^*,\quad g_{\alpha\beta}^*=g_{\alpha\beta}l_{\alpha\beta}^{-1}.\end{aligned}\qquad(17)$$

Подставляя их в равенства (16), приходим к системе уравнений

$$\mathrm{L}_\alpha U_\alpha+c_1c_2\mathrm{L}_-U_{3-\alpha}+F_\alpha=0\qquad(18)$$

с разностными операторами

$$\mathrm{L}_\alpha=g_{\alpha\alpha}^*\Delta_\alpha^2+c_\alpha^2\mathrm{L}_+,\quad\mathrm{L}_\pm=g_{12}^*\Delta_{12}^2\pm g_{21}^*\Delta_{21}^2\qquad(19)$$

и обусловленными внешними воздействиями на ферму свободными членами

$$F_\alpha = P_\alpha^* - \Delta_\alpha^- N_{\alpha\alpha}^* - c_\alpha \left[\Delta_{12}^- N_{12}^* - (-1)^\alpha \Delta_{21}^- N_{21}^* \right]. \quad (20)$$

Система (18) уравнений в частных разностях четвертого совокупного порядка предназначена для отыскания узловых смещений. Если на граничные узлы наложены геометрические связи, предписывающие узлам заданные смещения U_α^*, то соответствующие уравнения равновесия заменяются геометрическими краевыми условиями вида

$$U_\alpha = U_\alpha^* \quad \left(i_1 = 0, I_1 \text{ и (или) } i_2 = 0, I_2 \right).$$

Чтобы записать статические граничные условия в основных неизвестных, необходимо сначала расписать уравнения равновесия свободных граничных узлов в усилиях $N_{\alpha\beta}$, после чего заменить в них эти усилия выражениями (17). Однако, более предпочтителен иной путь. Если при выводе уравнений (18) принять, что ферма дискретно неоднородная в отношении упругих свойств $\left(g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}[i_\sigma] \right)$, то вместо равенств (19) получим

$$\mathrm{L}_\alpha = \Delta_\alpha^- g_{\alpha\alpha}^* \Delta_\alpha^+ + c_\alpha^2 \mathrm{L}_+, \quad \mathrm{L}_\pm = \Delta_{12}^- g_{12}^* \Delta_{12}^+ \pm \Delta_{21}^- g_{21}^* \Delta_{21}^+. \quad (21)$$

И теперь уравнения (18) можно применять для всех свободных узлов, если считать, что фактическое начертание формул (20), (21) для любого свободного, в том числе и граничного, узла получается путем отбрасывания в них после раскрытия разностных операторов членов, содержащих жесткости несуществующих стержней, и возврата прежних значений жесткостям существующих стержней. Изложенная процедура дает возможность записывать уравнения равновесия узлов в перемещениях и для нерегулярных ферм, вписываемых в структуру изучаемой фермы.

Заметим, что двух уравнений равновесия (16) явно недостаточно для отыскания четырех начальных усилий $N_{\alpha\beta}$. С одной стороны, это говорит о статической неопределимости изучаемой упругой системы, а с другой стороны, указывает на возможность построения общего решения уравнений (16) с точностью до двух функций дискретных аргументов i_σ. Эти функции играют здесь ту же роль, что и функции напряжений в механике упругих тел. Условимся называть их силовыми функциями, и представим общее решение уравнений равновесия (16) в виде суммы

$$N_{\alpha\beta} = N_{\alpha\beta}^0 + N_{\alpha\beta}^p \quad (22)$$

общего решения $N_{\alpha\beta}^0$ соответствующих однородных уравнений равновесия (16), а именно,

$$\Delta_\alpha^- N_{\alpha\alpha}^0 + c_\alpha \left[\Delta_{12}^- N_{12}^0 - (-1)^\alpha \Delta_{21}^- N_{21}^0 \right] = 0 \quad (23)$$

и какого-либо частного решения $N_{\alpha\beta}^p$ неоднородных уравнений (16), т.е.

$$\Delta_\alpha^- N_{\alpha\alpha}^p + c_\alpha \left[\Delta_{12}^- N_{12}^p - (-1)^\alpha \Delta_{21}^- N_{21}^p \right] + P_\alpha^* = 0.$$

За $N_{\alpha\beta}^p$ можно принять, например, усилия в стержнях какой-либо основной системы метода сил или же отредактированное должным образом решение

$$N_{11}^p[i_1, i_2] = -\sum_{j=0}^{i_1} P_1^*[j, i_2], \quad N_{22}^p[i_1, i_2] = -\sum_{j=0}^{i_2} P_2^*[i_1, j], \quad N_{12}^p = N_{21}^p \equiv 0.$$

Однако, в конкретных случаях нагружения проще воспользоваться эвристическими соображениями, согласно которым за нетривиальные значения $N^p_{\alpha\beta}$ в исходной ферме принимаются усилия в любой ее подсистеме, способной нести заданную нагрузку.

Приступая к отысканию общего решения $N^0_{\alpha\beta}$ однородных уравнений равновесия (23), заметим, что с помощью соотношений (см. (1)-(4))

$$\Delta^{\pm}_{12} = \Delta^{\pm}_{\alpha} + \nabla^{\pm}_{\alpha}\Delta^{\pm}_{3-\alpha} = \Delta^{\pm}_{3-\alpha} + \Delta^{\pm}_{\alpha}\nabla^{\pm}_{3-\alpha},$$

$$-(-1)^{\alpha}\,\Delta^{\pm}_{21} = \nabla^{\pm}_{1}\left(\Delta^{\mp}_{\alpha} - \Delta^{\mp}_{3-\alpha}\right) = \nabla^{\mp}_{2}\left(\Delta^{\pm}_{\alpha} - \Delta^{\pm}_{3-\alpha}\right)$$

они преобразуются к виду

$$\Delta^{-}_{\alpha}\left[N^0_{\alpha\alpha} + c_{\alpha}\left(\nabla^{-}_{3-\alpha}N^0_{12} + \nabla^{+}_{2}N^0_{21}\right)\right] + c_{\alpha}\Delta^{-}_{3-\alpha}\left(N^0_{12} - \nabla^{+}_{2}N^0_{21}\right) = 0$$

и будут выполнены, если положить

$$N^0_{\alpha\alpha} + c_{\alpha}\left(\nabla^{-}_{3-\alpha}N^0_{12} + \nabla^{+}_{2}N^0_{21}\right) = c_{\alpha}\Delta^{-}_{3-\alpha}\Omega_{\alpha}, \quad N^0_{12} - \nabla^{+}_{2}N^0_{21} = -\Delta^{-}_{\alpha}\Omega_{\alpha}. \tag{24}$$

Здесь $\Omega_{\alpha} = \Omega_{\alpha}[i_{\sigma}]$ – вспомогательные произвольные функции дискретных аргументов i_{σ}. Левая часть последнего равенства (24) не зависит от индекса α. Правая часть его будет обладать таким же свойством, если положить $\Omega_{\alpha} = 2\nabla^{+}_{\alpha}\Delta^{+}_{3-\alpha}\Phi$, где $\Phi = \Phi[i_{\sigma}]$ — первая силовая функция. Равенства (24) теперь принимают вид

$$N^0_{\alpha\alpha} + c_{\alpha}\left(\nabla^{-}_{3-\alpha}N^0_{12} + \nabla^{+}_{2}N^0_{21}\right) = 2c_{\alpha}\nabla^{+}_{\alpha}\Delta^{2}_{3-\alpha}\Phi,$$

$$N^0_{12} - \nabla^{+}_{2}N^0_{21} = -2\Delta^{+}_{\alpha}\Delta^{+}_{3-\alpha}\Phi = -2\Delta^{+}_{1}\Delta^{+}_{2}\Phi.$$

Вторую силовую функцию $\Psi = \Psi\left[i_{\sigma}\right]$ введем посредством соотношения

$$N^0_{12} + \nabla^{+}_{2}N^0_{21} = -2\Psi.$$

Из трех последних зависимостей находим общее решение уравнений (23)

$$\begin{gathered} N^0_{\alpha\alpha} = c_{\alpha}\left[\left(1 + \nabla^{+}_{\alpha}\right)\Delta^{2}_{3-\alpha}\Phi + \left(1 + \nabla^{-}_{3-\alpha}\right)\Psi\right], \\ N^0_{12} = -\Delta^{+}_{1}\Delta^{+}_{2}\Phi - \Psi, \quad N^0_{21} = \Delta^{+}_{1}\Delta^{-}_{2}\Phi - \nabla^{-}_{2}\Psi, \end{gathered} \tag{25}$$

а затем и искомое общее решение неоднородных уравнений равновесия (16)

$$\begin{gathered} N_{\alpha\alpha} = c_{\alpha}\left[\left(1 + \nabla^{+}_{\alpha}\right)\Delta^{2}_{3-\alpha}\Phi + \left(1 + \nabla^{-}_{3-\alpha}\right)\Psi\right] + N^p_{\alpha\alpha}, \\ N_{12} = -\Delta^{+}_{1}\Delta^{+}_{2}\Phi - \Psi + N^p_{12}, \quad N_{21} = \Delta^{+}_{1}\Delta^{-}_{2}\Phi - \nabla^{-}_{2}\Psi + N^p_{21}. \end{gathered} \tag{26}$$

Вспоминая область определения начальных усилий $N_{\alpha\beta}$, обнаруживаем, что в формулах (26) фигурируют значения функции Φ и Ψ, отвечающие соответственно $i_{\sigma} \in \left[-1, I_{\sigma} + 1\right]$ и $i_{\sigma} \in \left[-1, I_{\sigma}\right]$. Остановимся на граничных условиях, которым должны удовлетворять силовые функции.

В свободной ферме они добываются из статических граничных условий. По определению составляющие $N^p_{\alpha\beta}$ общего решения (26) обеспечивают выполнение неоднородных уравнений равновесия всех узлов. Поэтому источником искомых условий служат однородные уравнения равновесия граничных узлов.

Так, например, чтобы выполнить уравнения (23) на границе $i_2 = 0$, достаточно потребовать выполнения равенств

$$N^0_{12}\left[i_1, -1\right] = 0, \quad N^0_{22}\left[i_1, -1\right] = 0, \quad N^0_{21}\left[i_1, 0\right] = 0.$$

Раскрывая их с помощью формул (25), находим

$$\Phi\left[i_1,-1\right]=0,\quad \Phi\left[i_1,0\right]=0,\quad \Psi\left[i_1,-1\right]=0.$$

Подобный анализ остальных границ приводит к условиям

$$\begin{aligned}&\Phi=0 \quad \text{при} \quad i_1=-1,0,I_1,I_1+1 \quad \text{и (или)} \quad i_2=-1,0,I_2,I_2+1,\\&\Psi=0 \quad \text{при} \quad i_1=-1,I_1 \quad \text{и (или)} \quad i_2=-1,I_2,\end{aligned} \tag{27}$$

показывающим, что в случае свободной фермы функция Φ имеет нетривиальные значения при $i_\sigma\in\left[1,I_\sigma-1\right]$, а функция Ψ – при $i_\sigma\in\left[0,I_\sigma-1\right]$.

В тех случаях, когда на ферму наложены геометрические связи, краевые условия, накладываемые на силовые функции, устанавливаются с помощью принципа Кастильяно.

3. ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА КАСТИЛЬЯНО

Число статических искомых $N_{\alpha\beta}$, совпадающее с количеством $\alpha\beta-$стержней, и независимых уравнений равновесия (16) свободной фермы равно соответственно $4I_1I_2+I_1+I_2$ и $2\left(I_1+1\right)\left(I_2+1\right)-3$, так что степень статической неопределимости изучаемой фермы равна $\left(I_1-1\right)\left(I_2-1\right)+I_1I_2$ и говорит о том, что должно существовать такое же количество уравнений совместности деформаций. Получим их с помощью принципа Кастильяно, по которому функционал $L^*\left[n_{\alpha\beta}\left(x\right)\right]$ полной дополнительной энергии фермы принимает стационарное значение на истинных внутренних силах. По определению

$$L^*\left[n_{\alpha\beta}\left(x\right)\right]=V\left[n_{\alpha\beta}\left(x\right)\right]-A^*\left[n_{\alpha\beta}\left(x\right)\right],$$

где $V\left[n_{\alpha\beta}\left(x\right)\right]$ и $A^*\left[n_{\alpha\beta}\left(x\right)\right]$ – функционалы потенциальной энергии и работы реактивных сил в связях, наложенных на ферму. Для отыскания уравнений совместности деформаций достаточно рассмотреть свободную ферму. В этом случае $A^*=0$, а $L^*=V$, и принцип Кастильяно вырождается в его следствие, называемое началом наименьшей работы. Оно постулирует стационарность функционала потенциальной энергии фермы, слагаемой из таких же энергий стержней:

$$V\left[n_{\alpha\beta}\left(x\right)\right]=\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-\delta_{\alpha\sigma}}V_{\alpha\alpha}\left[n_{\alpha\alpha}\left(x\right)\right]+\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1}V_{12}\left[n_{12}\left(x\right)\right]+\sum_{i_\sigma=\delta_{2\sigma}}^{I_\sigma-\delta_{1\sigma}}V_{21}\left[n_{21}\left(x\right)\right].$$

Условие стационарности этого функционала имеет вид

$$\delta V=\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-\delta_{\alpha\sigma}}\delta V_{\alpha\alpha}+\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1}\delta V_{12}+\sum_{i_\sigma=\delta_{2\sigma}}^{I_\sigma-\delta_{1\sigma}}\delta V_{21}=0. \tag{28}$$

Здесь δV — первая вариация потенциальной энергии всей фермы, а

$$\delta V_{\alpha\beta}=\int_0^{l_{\alpha\beta}}u'_{\alpha\beta}\delta n_{\alpha\beta}dx=\left(u_{\alpha\beta}\right)\Big|_0^{l_{\alpha\beta}}\delta N^0_{\alpha\beta}=l_{\alpha\beta}U_{\alpha\beta}\delta N^0_{\alpha\beta} \tag{29}$$

– первая вариация потенциальной энергии $\alpha\beta-$стержня, при вычислении которой использовано определение (8) и было учтено, что в силу второго выражения (7) и представления (22) $\delta n_{\alpha\beta}=\delta N_{\alpha\beta}=\delta N^0_{\alpha\beta}$. Согласно формулам (25)

$$\begin{gathered}\delta N^0_{\alpha\alpha} = c_\alpha\left[\left(1+\nabla^+_\alpha\right)\Delta^2_{3-\alpha}\delta\Phi + \left(1+\nabla^-_{3-\alpha}\right)\delta\Psi\right],\\ \delta N^0_{12} = -\Delta^+_1\Delta^+_2\delta\Phi - \delta\Psi, \quad \delta N^0_{21} = \Delta^+_1\Delta^-_2\delta\Phi - \nabla^-_2\delta\Psi.\end{gathered} \tag{30}$$

Посредством зависимостей (29), (30) слагаемые в равенстве (28) приводятся к виду

$$l^{-1}_{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-\delta_{\alpha\sigma}}\delta V_{\alpha\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-\delta_{\alpha\sigma}} c^2_\alpha U_{\alpha\alpha}\left[\left(1+\nabla^+_\alpha\right)\Delta^2_{3-\alpha}\delta\Phi + \left(1+\nabla^-_{3-\alpha}\right)\delta\Psi\right],$$

$$l^{-1}_{12}\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1}\delta V_{12} = -\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1} U_{12}\left(\Delta^+_1\Delta^+_2\delta\Phi + \delta\Psi\right),$$

$$l^{-1}_{12}\sum_{i_\sigma=\delta_{2\sigma}}^{I_\sigma-\delta_{1\sigma}}\delta V_{21} = \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1} U_{21}\left(\Delta^+_1\Delta^-_2\delta\Phi - \nabla^-_2\delta\Psi\right).$$

Выполняя в этих выражениях суммирование по частям (см. (5)) с учетом следствий

$$\begin{gathered}\delta\Phi = 0 \quad \text{при} \quad i_1 = -1, 0, I_1, I_1+1 \quad \text{и (или)} \quad i_2 = -1, 0, I_2, I_2+1,\\ \delta\Psi = 0 \quad \text{при} \quad i_1 = -1, I_1 \quad \text{и (или)} \quad i_2 = -1, I_2\end{gathered} \tag{31}$$

граничных условий (27) находим

$$l^{-1}_{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-\delta_{\alpha\sigma}}\delta V_{\alpha\alpha} = \sum_{i_\sigma=1}^{I_\sigma-1}\left[\sum_{\alpha=1}^{2} c^2_\alpha\left(1+\nabla^-_\alpha\right)\Delta^2_{3-\alpha}U_{\alpha\alpha}\right]\cdot\delta\Phi + \\ + \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1}\left[\sum_{\alpha=1}^{2} c^2_\alpha\left(1+\nabla^+_{3-\alpha}\right)U_{\alpha\alpha}\right]\cdot\delta\Psi,$$

$$l^{-1}_{12}\sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1}\delta V_{12} = -\sum_{i_\sigma=1}^{I_\sigma-1}\Delta^-_1\Delta^-_2U_{12}\cdot\delta\Phi - \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1}U_{12}\delta\Psi,$$

$$l^{-1}_{12}\sum_{i_\sigma=\delta_{2\sigma}}^{I_\sigma-\delta_{1\sigma}}\delta V_{21} = \sum_{i_\sigma=1}^{I_\sigma-1}\Delta^-_1\Delta^+_2U_{21}\cdot\delta\Phi + \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1}\nabla^+_2U_{21}\cdot\delta\Psi.$$

Подставляя эти результаты в равенство (28) получим

$$\begin{gathered}\sum_{i_\sigma=1}^{I_\sigma-1}\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}\left[c^2_\alpha\left(1+\nabla^-_\alpha\right)\Delta^2_{3-\alpha}U_{\alpha\alpha} - \Delta^-_1\left(\Delta^-_2U_{12} - \Delta^+_2U_{21}\right)\right]\right\}\cdot\delta\Phi + \\ + \sum_{i_\sigma=0}^{I_\sigma-1}\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}\left[c^2_\alpha\left(1+\nabla^+_\alpha\right)U_{\alpha\alpha} - U_{12} - \nabla^+_2U_{21}\right]\right\}\cdot\delta\Psi = 0.\end{gathered} \tag{32}$$

Отсюда находим уравнения совместности полных деформаций стержней

$$\begin{gathered}c^2_\alpha\left(1+\nabla^-_\alpha\right)\Delta^2_{3-\alpha}U_{\alpha\alpha} - \Delta^-_1\left(\Delta^-_2U_{12} - \Delta^+_2U_{21}\right) = 0 \quad \left(i_\sigma\in\left[1, I_\sigma-1\right]\right),\\ c^2_\alpha\left(1+\nabla^+_\alpha\right)U_{\alpha\alpha} - U_{12} - \nabla^+_2U_{21} = 0 \quad \left(i_\sigma\in\left[0, I_\sigma-1\right]\right).\end{gathered} \tag{33}$$

Как и следовало ожидать, непосредственная подстановка в них соотношений (12) приводит к тривиальным тождествам $0\equiv 0$.

Уравнения (33) порождают две однородные системы линейных алгебраических уравнений относительно значений полных удлинений стержней $U_{\alpha\beta}$. Порядок первой из них равен $\left(I_1-1\right)\left(I_2-1\right)$ и совпадает с числом внутренних узлов фермы, а порядок второй системы, равный I_1I_2, совпадает с числом ячеек фермы. Совокупный порядок обеих систем равен $\left(I_1-1\right)\left(I_2-1\right)+I_1I_2$ и, как и должно быть, совпадает со степенью статической неопределимости свободной фермы и с числом нетривиальных значений силовых функций.

Пусть теперь на граничные узлы фермы наложены идеальные связи. В этом случае исчезают условия (27), (31), и вместо равенства (32) получим

$$\sum_{i_\sigma=-1}^{I_\sigma+1}\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}\left[c_\alpha^2\left(1+\nabla_\alpha^-\right)\Delta_{3-\alpha}^2 U_{\alpha\alpha}-\Delta_1^-\left(\Delta_2^- U_{12}-\Delta_2^+ U_{21}\right)\right]\right\}\cdot\delta\Phi+ \\ +\sum_{i_\sigma=-1}^{I_\sigma}\left\{\sum_{\alpha=1}^{2}\left[c_\alpha^2\left(1+\nabla_\alpha^+\right)U_{\alpha\alpha}-U_{12}-\nabla_2^+ U_{21}\right]\right\}\cdot\delta\Psi=0. \tag{34}$$

Здесь, как всегда, слагаемые в фигурных скобках с удлинениями, указывающими непосредственно или после раскрытия предшествующих разностных операторов на несуществующие стержни, следует положить равными нулю. Из равенства (34) по-прежнему вытекают уравнения (33). Что же касается геометрических граничных условий, то они получаются приравниваем нулю сомножителей при не равных теперь нулю вариациях силовых функций, обозначенных в условиях (31).

Примем за основные неизвестные начальные усилия $N_{\alpha\beta}$. Для их отыскания следует воспользоваться уравнениями равновесия (16) и равенствами

$$\sum_{\alpha=1}^{2}c_\alpha^{-1}\kappa_{\alpha\alpha}\left(1+\nabla_\alpha^-\right)\Delta_{3\text{-}\alpha}^2 N_{\alpha\alpha}-\Delta_1^-\left(\kappa_{12}\Delta_2^- N_{12}-\kappa_{21}\Delta_2^+ N_{21}\right)=U_-^* \\ \left(i_\sigma\in\left[1,I_\sigma-1\right]\right), \\ \sum_{\alpha=1}^{2}c_\alpha^{-1}\kappa_{\alpha\alpha}\left(1+\nabla_{3-\alpha}^+\right)N_{\alpha\alpha}-\kappa_{12}N_{12}-\kappa_{21}\nabla_2^+ N_{21}=U_+^* \\ \left(i_\sigma\in\left[0,I_\sigma-1\right]\right), \tag{35}$$

в которые переходят уравнения совместности деформаций (33), после исключения из них с помощью соотношений (10) удлинений $U_{\alpha\beta}$. В правых частях равенств (35) введены обозначения

$$U_-^*=\Delta_1^-\Delta_2^-\left(U_{12}^*-\nabla_2^+U_{21}^*\right)-\sum_{\alpha=1}^{2}c_\alpha^2\left(1+\nabla_\alpha^-\right)\Delta_{3\text{-}\alpha}^2 U_{\alpha\alpha}^*,\quad \kappa_{\alpha\alpha}=c_\alpha^3 g_{\alpha\alpha}^{-1},$$

$$U_+^*=U_{12}^*+\nabla_2^+U_{21}^*-\sum_{\alpha=1}^{2}c_\alpha^2\left(1+\nabla_{3-\alpha}^+\right)U_{\alpha\alpha}^*,\quad \kappa_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}^{-1}\quad\left(\alpha\neq\beta\right).$$

Система уравнений (16), (35) отражает постановку задачи в начальных усилиях $N_{\alpha\beta}$ и предназначена для отыскания именно их. В случае свободной фермы имеют место статические граничные условия, содержащиеся, как отмечалось, в уравнениях (16). При наложении на граничные узлы идеальных связей статические граничные условия надлежит заменить геометрическими, вытекающими, как было только что показано, из равенства (34), выразив в них полные удлинения стержней через начальные усилия с помощью формул (10).

Постановка задачи в силовых функциях сводится к подстановке выражений (26) в равенства (35). Преобразования приводят к системе двух разрешающих уравнений в частных разностях

$$\mathrm{R}_1\Phi+\mathrm{R}_-\Psi=F_1\quad\left(i_\sigma\in\left[1,I_\sigma-1\right]\right), \\ \mathrm{R}_+\Phi+\mathrm{R}_2\Psi=F_2\quad\left(i_\sigma\in\left[0,I_\sigma-1\right]\right). \tag{36}$$

Здесь слева введены разностные операторы (см. (1)-(4))

$$R_1 = \kappa_{11}\left(\Delta_1^2+4\right)\Delta_2^4+\kappa_{22}\left(\Delta_2^2+4\right)\Delta_1^4+\kappa_+\Delta_1^2\Delta_2^2,$$
$$R_\pm = \left(1+\nabla_1^\pm\right)\left(1+\nabla_2^\pm\right)\left(\kappa_{11}\Delta_2^2+\kappa_{22}\Delta_1^2\right)+\kappa_-\Delta_1^\pm\Delta_2^\pm,$$
$$R_2 = \kappa_{11}\left(\Delta_2^2+4\right)+\kappa_{22}\left(\Delta_1^2+4\right)+\kappa_+,$$

а справа – величины

$$F_1 = \Delta_1^-\Delta_2^-\left(U_{12}^{p*}-\nabla_2^+U_{21}^{p*}\right)-\sum_{\alpha=1}^{2}c_\alpha^2\left(1+\nabla_\alpha^-\right)\Delta_{3-\alpha}^2U_{\alpha\alpha}^{p*},$$
$$F_2 = U_{12}^{p*}+\nabla_2^+U_{21}^{p*}-\sum_{\alpha=1}^{2}c_\alpha^2\left(1+\nabla_{3-\alpha}^+\right)U_{\alpha\alpha}^{p*},$$

в которых

$$\Delta_\alpha^4=\Delta_\alpha^2\Delta_\alpha^2,\quad \kappa_\pm=\kappa_{12}\pm\kappa_{21},\quad U_{\alpha\beta}^{p*}=U_{\alpha\beta}^{p}+U_{\alpha\beta}^{*},\quad U_{\alpha\beta}^{p}=g_{\alpha\beta}^{-1}N_{\alpha\beta}^{p}.$$

Система разностных уравнений (36) предназначена для отыскания силовых функций Φ и Ψ. Она имеет шестой совокупный порядок по каждому дискретному аргументу. Следовательно, на каждой границе фермы следует поставить три условия. В случае свободной фермы ими являются условия (27). Если же на граничные узлы наложены идеальные связи, то потребные граничные условия извлекаются из только что упомянутых геометрических граничных условий в начальных усилиях путем подстановки в них выражений (26).

Значения функции Φ и первое уравнение совместности деформаций (33) (как и первые уравнения (35), (36)) соотносятся с внутренними узлами фермы, а значения Ψ и второе уравнение совместности деформаций (33) (как и вторые уравнение (35), (36)) – с ее элементарными ячейками. При отсутствии в системе внутренних узлов первое уравнение (33) (как и первые уравнения (35), (36)) исключаются из рассмотрения. Одновременно с этим в формулах (25), (26) и во втором уравнении (36) следует положить $\Phi = 0$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Богатый опыт построения классических моделей механики упругих тел показывает, что при выводе определяющих соотношений конкретной теории можно довольствоваться только наглядными соображениями, а можно прибегнуть к помощи вариационных принципов. Последняя альтернатива незаменима при неочевидности или отсутствии первой и особенно актуальна в механике упругих систем.

Сказанное убедительно продемонстрировано на примере плоской регулярной фермы ортогональной структуры, теория которой построена с помощью метода склейки и вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно. Особенности применения последних связаны с тем, что изучаемый объект – упругая система, а метод анализа ее деформирования – метод склейки – дискретно-континуальный. Это предопределило дискретно-континуальный характер функционалов Лагранжа и Кастильяно. Точный поэлементный упругий анализ в аналитическом виде позволил превратить их в дискретные функционалы и воспользоваться соответствующей редакцией вариационного исчисления.

Изложенная методология использования вариационных принципов Лагранжа и Кастильяно применима к другим упругим системам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Образцов И.Ф., Рыбаков Л.С., Мишустин И.В. *О методах анализа деформирования стержневых упругих систем регулярной структуры* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1996. – Т.2. – №2. – С.3-14.
2. Sun C.T.,Yang T.Y. *Continuum Approach Toward Dynamics of Gridworks* // Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics. – 1973. – Vol.40. – No.1. – Pp.186-192.
3. Gutkowski W. *On the analysis of plane lattice structures* // J. Struc. Mech. – 1973. – Vol.2. – No.2. –Pp.159-176.
4. Пшеничнов Г.И. *Теория тонких упругих сетчатых оболочек и пластинок*. – М.: Наука, 1982. – 352 с.
5. Noor A.K. *Continuum modeling for repetitive lattice structures* // Appl. Mech. Rev. – 1988. –Vol.41. – No.7. – Pp.285-296.
6. Васильев В.В. *Механика конструкций из композиционных материалов*. – М.: Машиностроение, 1988. – 272 с.
7. Шклярчук Ф.Н. *Упруго-динамические континуальные модели длинных ферм регулярной структуры* // Изв. РАН. МТТ. – 1994. – №1. – С.156-163.
8. Tollenaere H., Caillerie D. *Continuous Modeling of Lattice Structures by Homogenization* // Advances in Engineering Software. – 1998. – Vol.29. – Iss.7-9. – Pp.699-705.
9. Boutin C., Hans S. *Homogenisation of periodic discrete medium: application to dynamics of framed structures* // Computers and Geotechnics. – 2003. – Vol.30. – No.4. – Pp.303-320.
10. Messner M.C. *Optimal lattice-structured materials* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2016. – Vol.96. – Pp.162-183.
11. Блейх Ф., Мелан Е. *Уравнения в конечных разностях статики сооружений*. – Харьков: Гос. науч.-техн. изд-во Украины, 1936. – 383 с.
12. Рабинович И.М. *Основы строительной механики стержневых систем*. – М.: Госстройиздат, 1960. – 519 с.
13. Игнатьев В.А. *Расчет регулярных стержневых систем*. – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1973. – 434 с.
14. Розин Л.А. *Вариационная постановка задач для упругих систем*. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. – 223 с.
15. Ржаницын А.Р. *Строительная механика*. – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
16. Шулькин Ю.П. *Теория упругих стержневых конструкций*. – М.: Наука, 1984. – 272 с.
17. Renton J.D. *The Beam-Like Behavior of Space Trusses* // AIAA Journal. – 1984. – Vol.22. – No.2. – Pp.273-280.
18. Hutchinson R.G., Fleck N.A. *The structural performance of the periodic truss* // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2006. – Vol.54. – Iss.4. – Pp.756-782.
19. Галишникова В.В., Игнатьев В.А. *Регулярные стержневые системы. Теория и методы расчета*. – Волгоград: ВолгГАСУ, 2006. – 552 с.
20. Tran H.C., Lee J. *Force methods for trusses with elastic boundary conditions* // International Journal of Mechanical Sciences. – 2013. – Vol.66. – Pp.202-213.
21. *Современные методы расчета сложных статически неопределимых систем: Сб. статей* / Пер. с англ. под ред. А.П. Филина. – Л.: Судпромгиз, 1961. – 876 с.

22. Martin H.C. *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis*. – New York: McGraw-Hill Book Co., 1966, 331 p.
23. Meek J.L. *Matrix structural analyses*. – New York et al.: McGraw-Hill Book Co., 1971, 628 p.
24. Ливсли Р. *Матричные методы строительной механики*. – М.: Стройиздат, 1980. – 224 с.
25. Постнов В.А., Хархурим И.Я. *Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций*. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.
26. Розин Л.А. *Стержневые системы как системы конечных элементов*. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1975. – 237 с.
27. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. *Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов*. – М.: Высшая школа, 1985. – 392 с.
28. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals* // 7-th Edition. – Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2013, 756 p.
29. Рыбаков Л.С. *О теории одной плоской регулярной упругой структуры ферменного типа* // Изв. РАН. МТТ. – 1995. – №5. – С.171-179.
30. Рыбаков Л.С. *Упругий анализ одной плоской регулярной стержневой структуры* // Изв. РАН. МТТ. – 1996. – №1. – С.198-207.
31. Рыбаков Л.С. *Термоупругость плоской регулярной фермы ортогональной структуры* // Вестник ПНИПУ. Механика. – 2017. – №2. – С.136-152.
32. Лурье А. И. *Теория упругости*. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
33. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*. – М.: МИР, 1987. – 542 с.
34. Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твёрдого тела*. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
35. Рыбаков Л.С., Наринский В.И. *Вариационные принципы и методы строительной механики*. – М.: Изд-во МАИ, 1987. – 92 с.

REFERENCES

1. Obrazcov I.F., Rybakov L.S., Mishustin I.V. *O metodakh analiza deformirovaniia sterzhnevykh uprugikh sistem reguliarnoi struktury [Methods of analysis of the deformation of elastic rod systems with regular structure]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 1996, Vol.2, No.2, Pp.3-14.
2. Sun C.T., Yang T.Y. *Continuum Approach Toward Dynamics of Gridworks.* Transactions of the ASME. Journal of Applied Mechanics, 1973, Vol.40, No.1, Pp.186-192.
3. Gutkowski W. *On the analysis of plane lattice structures.* J. Struc. Mech., 1973, Vol.2, No.2, Pp.159-176.
4. Pshenichnov G.I. *Teoriia tonkikh uprugikh setchatykh obolochek i plastinok [Theory of thin elastic lattice shells and plates]*. Moskva, Nauka, 1982, 352 p.
5. Noor A.K. *Continuum modeling for repetitive lattice structures.* Appl. Mech. Rev., 1988, Vol.41, No.7, Pp.285-296.
6. Vasil'ev V.V. *Mekhanika konstruktsii iz kompozitsionnykh materialov [Mechanics of structures of composite materials]*. Moskva, Mashinostroenie, 1988, 272 p.
7. Shkljarchuk F.N. *Uprugo-dinamicheskie kontinual'nye modeli dlinnykh ferm reguliarnoi struktury [The elastic dynamic continuum model of long trusses with*

regular structure]. Izvestiia Rossiiskoi Akademii Nauk, Mekhanika tverdogo tela, 1994, No.1, Pp.156-163.

8. Tollenaere H., Caillerie D. *Continuous Modeling of Lattice Structures by Homogenization.* Advances in Engineering Software, 1998, Vol.29. Iss.7-9, Pp.699-705.
9. Boutin C., Hans S. *Homogenisation of periodic discrete medium: application to dynamics of framed structures.* Computers and Geotechnics, 2003, Vol.30, No.4, Pp.303-320.
10. Messner M.C. *Optimal lattice-structured materials.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2016, Vol.96, Pp.162-183.
11. Bleich F., Melan E. *Die gewöhnlichen und partiellen Differ enzengleichungen der Baustatik*. Berlin, Springer, 1927, 350 p.
12. Rabinovich I.M. *Osnovy stroitel'noi mekhaniki sterzhnevykh sistem [Fundamentals of structural mechanics of rod systems]*. Moskva, Gosstroiizdat, 1960, 519 p.
13. Ignat'ev V.A. *Raschet reguliarnykh sterzhnevykh sistem [Calculation of regular rod systems]*. Saratov, Izdatel'stvo Saratovskogo universiteta, 1973, 434 p.
14. Rozin L.A. *Variatsionnaia postanovka zadach dlia uprugikh sistem [Variational formulation of elastic system problems]*. Leningrad, Izdatel'stvo LGU, 1978, 223 p.
15. Rzhanicyn A.R. *Stroitel'naia mekhanika [Structural mechanics]*. Moskva, Vysshaia shkola, 1982, 400 p.
16. Shul'kin Ju.P. *Teoriia uprugikh sterzhnevykh konstruktsii [Theory of elastic rod structures]*. Moskva, Nauka, 1984, 272 p.
17. Renton J.D. *The Beam-Like Behavior of Space Trusses.* AIAA Journal, 1984, Vol.22, No.2, Pp.273-280.
18. Hutchinson R.G., Fleck N.A. *The structural performance of the periodic truss.* Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2006, Vol.54, Iss.4, Pp.756-782.
19. Galishnikova V.V., Ignat'ev V.A. *Reguliarnye sterzhnevye sistemy. Teoriia i metody rascheta [Regular rod systems. Theory and methods of calculation]*. Volgograd, Volgogradskii gosudarstvennyi arkhitekturno-stroitel'nyi universitet, 2006, 552 p.
20. Tran H.C., Lee J. *Force methods for trusses with elastic boundary conditions.* International Journal of Mechanical Sciences, 2013, Vol.66, Pp.202-213.
21. *Sovremennye metody rascheta slozhnykh staticheski neopredelimykh sistem: Sb. statei [Recent methods of calculation of complex redundant systems: Collection of articles]*. Leningrad, Sudpromgiz, 1961, 876 p.
22. Martin H.C. *Introduction to Matrix Methods of Structural Analysis.* New York, McGraw-Hill Book Co., 1966, 331 p.
23. Meek J.L. *Matrix structural analyses*. New York et al., McGraw-Hill Book Co., 1971, 628 p.
24. Livesley R.K. *Matrix methods of structural analysis*. Oxford-New York-Toronto Sydney-Braunschweig, Pergamon Press, 1975, 277 p.
25. Postnov V.A., Harhurim I.Ja. *Metod konechnykh elementov v raschetakh sudovykh konstruktsii [Finite element method in calculations of the ship structures]*. Leningrad, Sudostroenie, 1974, 344 p.
26. Rozin L.A. *Sterzhnevye sistemy kak sistemy konechnykh elementov [Rod systems as systems of finite elements]*. Leningrad, Izdatel'stvo LGU, 1975, 237 p.
27. Obrazcov I.F., Savel'ev L.M., Hazanov H.S. *Metod konechnykh elementov v zadachakh stroitel'noi mekhaniki letatel'nykh apparatov [Finite element method in problems of structural mechanics of aircrafts]*. Moskva, Vysshaia shkola, 1985, 392 p.

28. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals.* 7-th Edition. Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2013, 756 p.
29. Rybakov L.S. *O teorii odnoi ploskoi reguliarnoi uprugoi struktury fermennogo tipa [On the theory of a flat regular elastic truss-type structure]*. Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk, Mekhanika tverdogo tela, 1995, No.5, Pp.171-179.
30. Rybakov L.S *Uprugii analiz odnoi ploskoi reguliarnoi sterzhnevoi struktury [Elastic analysis of a plane regular truss structure]*. Izvestiia Rossiiskoi akademii nauk, Mekhanika tverdogo tela, 1996, No.1, Pp.198-207.
31. Rybakov L.S. *Termouprugost' ploskoi reguliarnoi fermy ortogonal'noi struktury [Thermoelasticity of a plane regular truss with orthogonal structure]*. VPNIPU, Mekhanika, 2017, No.2, Pp.136-152.
32. Lur'e A.I. *Teoriia uprugosti [Theory of elasticity]*. Moskva: Nauka, 1970, 940 p.
33. Washizu K. *Variational methods in elasticity and plasticity*. Oxford-New York-Toronto-Sydney-Paris-Frankfurt, Pergamon Press, 1982, 630 p.
34. Rabotnov Ju.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela [Mechanics of deformable solid]*. Moskva, Nauka, 1988, 712 p.
35. Rybakov L.S., Narinskij V.I. *Variatsionnye printsipy i metody stroitel'noi mekhaniki [Variational principles and methods of structural mechanics]*. Moskva, Izdatel'stvo MAI, 1987, 92 p.

Поступила в редакцию 13 февраля 2018 года.

Сведения об авторе:

Рыбаков Леонид Сергеевич – д.ф.-м.н., проф., Кафедра «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВПО Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: rybakov.38@mail.ru