УДК 539.3

РЕКОНСТРУКЦИЯ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЗАКРЕПЛЕНИЯ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАСТИНКИ

Ватульян А.О.[1,2], Потетюнко О.А.[1]

[1]ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, г. Ростов-на-Дону, Россия
[2]ФГБУН Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН и РСО-А, г. Владикавказ, Россия

АННОТАЦИЯ

В настоящей работе изучены колебания круглой вязкоупругой пластины переменной жесткости с различными условиями опирания на границе, в том числе при наличии вязкоупругих связей (задача в упругом случае исследована авторами ранее). В случае установившихся колебаний вязкоупругие связи в граничных условиях характеризуются двумя комплексными коэффициентами, зависящими от частоты колебаний. В рамках вариационного принципа Лагранжа для неоднородной пластины был сформулированы и решены численно с помощью метода Ритца три вспомогательные задачи, не содержащие этих коэффициентов, исследовано влияние числа координатных функций на точность построенного решения и зависимость его от частоты колебаний. Решение сформулированной задачи отыскивается в виде линейной комбинации построенных трех решений, а удовлетворение граничным условиям позволяет установить дробно-рациональную структуру решения в зависимости от коэффициентов в граничных условиях. В рамках этой модели также была поставлена и решена задача реконструкции параметров вязкоупругих связей на основе известного (измеренного) прогиба в наборе точек на фиксированной частоте. На основе установленной дробно-рациональной структуры прогиба от искомых коэффициентов построена система нелинейных алгебраических уравнений для нахождения искомых коэффициентов связей, каждое из которых задает условную гиперболическую зависимость в комплексном пространстве. Представлен способ отбора единственного решения, приведены вычислительные эксперименты для различных сегментов изменения коэффициентов (слабое опирание, жесткое опирание), выявлены диапазоны, в которых реконструкция осуществляется успешно с небольшой погрешностью и когда погрешность велика. Проведена оценка влияния неучета вязкоупругости заделки на реконструкцию амплитуды нагрузки.

Ключевые слова: пластина; неоднородность; колебания; вязкоупругость; метод Ритца; реконструкция реологических свойств

RECONSTRUCTION OF RHEOLOGICAL PARAMETERS OF INHOMOGENEOUS PLATE FIXING

Vatulyan A.O.[1,2], Potetyunko O.A.[1]

[1]Southern Federal University, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences I.I. Vorovich, Rostov-on-Don, Russia
[2]Southern Mathematical Institute, VNC RAS and RSO-A, Vladikavkaz, Russia

ABSTRACT

In this paper we study the oscillations of a circular viscoelastic plate of variable stiffness with different support conditions at the boundary, including in the presence of viscoelastic bonds (in the elastic case the problem was investigated by the authors earlier). In the case of steady-state vibrations, viscoelastic bonds in the boundary conditions are characterized by two complex coefficients that depend on the frequency of the oscillations. Three auxiliary problems that do not contain these coefficients were numerically formulated on the base of Lagrange's variational principle. The problems were solved numerically using the Ritz method. The influence of the number of coordinate functions on the accuracy of the constructed solution and its dependence on the frequency of oscillations was investigated. The solution is sought in the form of a linear combination of the three constructed solutions. Satisfaction with the boundary conditions makes it possible to establish the fractional-rational structure of the solution depending on the coefficients in the boundary conditions. The problem of reconstructing the parameters of viscoelastic bonds based on the known (measured) deflection in a set of points at a fixed frequency was also solved. A system of nonlinear algebraic equations is constructed to find the required coupling coefficients, each of which defines a conditional hyperbolic dependence in the complex space. A method for selecting a single solution is presented. Computational experiments for various segments of coefficients change (weak support, rigid support) are presented. The ranges of the most successful reconstruction are founded. The effect of neglecting the viscoelasticity of the support on the reconstruction of the load amplitude was estimated.

Keywords: plate; heterogeneity; vibration; viscoelasticity; Ritz method; reconstruction of rheological properties

ВВЕДЕНИЕ

Пластины являются одним из основных конструктивных элементов многих инженерных сооружений, таких как мостовые палубы, турбинные диски, опорные плиты, резервуары, конструкционные элементы для диафрагм, измерительных систем. Кроме того, различные модели пластин используются при решении задач биомеханики, например, для оптимизации ортопедических операций накостного остеосинтеза и для моделирования решетчатой пластинки склеры в офтальмологии. С течением времени к диагностике таких систем предъявляются все более и более высокие требования. В настоящее время достаточно хорошо разработаны неразрушающие методы обнаружения трещин, определения форм и размеров областей и предметов, активно развивается электронная диагностика дефектов механических систем. В то же время задачи о диагностике состояния закреплений и нагруженности объектов стали исследоваться относительно недавно [1], [2]. Так, в [3,4] изложены теоретические основы низкочастотных акустических методов контроля, который является одним из распространенных и наиболее дешевым средством мониторинга элементов конструкций.

Отметим, что задачам идентификации параметров для однородных объектов посвящено множество работ [1,2,5-7]. В основе исследования лежит явное построение частотного уравнения и его анализ. Однако модели, основанные на гипотезе однородности, во многих случаях оказываются недостаточно адекватными; например, это так при исследовании деформирования пластинчатых элементов, изготовленных из полимер- и пьезокомпозитов, функционально-градиентных материалов или при описании решетчатой пластинки склеры. Для таких объектов в общем случае явное построение частотного уравнения через элементарные и специальные функции невозможно, однако возможно численное нахождение резонансных значений на основе решения некоторых задач Коши. Для неоднородных пластин и стержней также развиты техники нахождения законов неоднородности на основе измерения АЧХ. Так, в [8] решена задача реконструкции неоднородного цилиндрически симметричного распределения жесткости круглой пластины, в [9] предложен метод решения задачи об идентификации неоднородных характеристик вязкоупругих стержней при анализе изгибных колебаниях для различных условий нагружения, а в работе [10] на основе интегральной формулы, связывающей перемещения точек тела в исходной трехмерной задаче и перемещения точек в аналогичной задаче для однородного упругого тела, построена инженерная теория деформирования неоднородных пластин.

При моделировании различных объектов важно учитывать, что многие из них обладают реологическими свойствами, то есть деформирование объекта зависит от скорости и от характера приложения нагрузки, наблюдается затухание амплитуд. Так, в [11] изучаются обратные задачи идентификации свойств неоднородной вязкоупругой пластины в двух постановках. Отметим, что связи на границе также могут обладать реологическими свойствами, например, соединения в биологических тканях или крепление в приборе, которое со временем ослабевает. Такую задачу об идентификации реологических свойств закрепления можно решать, используя концепцию динамических модулей, например, в рамках модели стандартного вязкоупругого тела, как показали исследования настоящей работы.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим установившиеся изгибные осесимметричные колебания круглой вязкоупругой пластины радиуса a переменной жесткости под действием распределенной нагрузки q. Для описания колебаний использован вариационный подход и принцип соответствия.

Для общего случая функционал, описывающий колебаний упругой пластины переменной жесткости, при наличии упругих связей на границе, построен ранее и имеет вид [12]

$$\begin{aligned} F[w] = \frac{1}{2}\int_0^1 f(r)\Bigg\{\left[w''(r)\right]^2 + \left[\frac{w'(r)}{r}\right]^2 + \\ + 2\nu\left[\frac{w'(r)w''(r)}{r}\right]\Bigg\} rdr - \int_0^1 q(r)w(r)rdr -, \\ -\frac{\kappa^2}{2}\int_0^1 w^2(r)rdr + \frac{g_1}{2}w^2(1) + \frac{g_2}{2}\left(w'(1)\right)^2 \end{aligned} \qquad (1)$$

где $f(r)$ – безразмерная жесткость, $q(r)$ – распределенная нагрузка, κ – безразмерный спектральный параметр, связанный с частотой колебаний, g_1 характеризует упругость связи на вертикальное смещение, g_2 – на поворот. Статический случай $(\kappa = 0)$ рассмотрен в работе [13]. Будем использовать принцип соответствия между упругой и вязкоупругой задачей [14], согласно которому для изучения колебаний пластинки из вязкоупругого материала в функционале (1) необходимо заменить модуль упругости комплексной функцией частоты координаты аналогично [8]. Для изучения колебаний пластинки из вязкоупругого материала будем использовать модель стандартного вязкоупругого тела [14], из определяющего соотношения которой в случае установившихся колебаний получим соотношение для амплитуд

$$\sigma = G(i,\omega)\varepsilon,$$

где $G(i,\omega)$ – комплексный модуль, $G(i,\omega)=\dfrac{Ei\omega n+H}{1+i\omega n}$, n – время релаксации, σ – напряжение, ε – деформация, E, H – соответственно мгновенный и длительный модули упругости.

Введем безразмерный параметр $\kappa^2=\dfrac{\rho\omega^2 ha^4}{D_0}$, где $D_0=\max D(r)$ – характерная цилиндрическая жесткость, ρ – характерная плотность материала, h – характерная толщина пластинки. Цилиндрическая жёсткость пластины $D(r)=\dfrac{E_0(r)\tilde{h}^3}{12(1-\nu^2)}$ есть функция радиальной координаты, где $E_0(r)$ – модуль Юнга, $\tilde{h}$ – толщина пластины, ν – коэффициент Пуассона. В силу принципа соответствия заменяем $D(r)$ на динамический модуль

$$f=\frac{h(\xi)+i\kappa c g(\xi)}{1+i\kappa c},$$

где $g(\xi)=\dfrac{E(\xi)}{D_0}$, $h(\xi)=\dfrac{H(\xi)}{D_0}$, $\kappa c=n\omega$, $\xi=\dfrac{r}{a}$ – безразмерная координата, n – время релаксации, $h(\xi)$ – безразмерная функция, характеризующая длительный модуль, $g(\xi)$ – безразмерная функция, характеризующая мгновенный модуль упругости, причем $g(\xi)>h(\xi)$. Кроме того, связи на границе, характеризуемые параметрами g_1, g_2, также могут быть вязкоупругими, тогда
в рамках принципа соответствия положим

$$g_1(\kappa)=\frac{h_1+i\kappa c m_1}{1+i\kappa c},\quad g_2(\kappa)=\frac{h_2+i\kappa c m_2}{1+i\kappa c}. \tag{2}$$

Тогда функционал (1) для случая вязкоупругой пластины с вязкоупругими связями примет вид

$$\begin{aligned} F[w]=\frac{1}{2}\int_0^1 f(r,\kappa)\Big\{\left[w''(r)\right]^2+\left[\frac{w'(r)}{r}\right]^2+ \\ +2\nu\left[\frac{w'(r,\kappa)w''(r,\kappa)}{r}\right]\Big\}rdr-\int_0^1 q(r,\kappa)w(r,\kappa)rdr- \\ -\frac{\kappa^2}{2}\int_0^1 w^2(r,\kappa)rdr+\frac{g_1(\kappa)}{2}w^2(1)+\frac{g_2(\kappa)}{2}\left(w'(1)\right)^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Варьируя функционал, получим, что уравнение колебаний вязкоупругой пластины с вязкоупругими связями будет иметь вид

$$\begin{aligned} Lw(r,\kappa) &= \left(f(r,\kappa)w''(r,\kappa)r\right)'' - \left(f(r,\kappa)r^{-1}w'(r,\kappa)\right)' + \\ &+ \nu\left[\left(f(r,\kappa)w'(r,\kappa)\right)'' - \left(f(r,\kappa)w''(r,\kappa)\right)'\right] - \\ &- \kappa^2 r w(r,\kappa) = q(r,\kappa)r, \end{aligned} \qquad (4)$$

а соответствующие граничные условия, содержащие два комплексных параметра, представимы в форме

$$\begin{aligned} M_1 w(r,\kappa) &= \left\{-\left(f(r,\kappa)w''(r,\kappa)r\right)' + f(r,\kappa)r^{-1}w'(r,\kappa) - \right. \\ &\left. + \nu\left(f(r,\kappa)w'(r,\kappa)\right)' + \nu f(r,\kappa)w''(r,\kappa) + g_1(\kappa)w(r,\kappa)\right\}\Big|_{r=1} = \\ &= M_1^0 w(r,\kappa) + g_1(\kappa)w(r,\kappa)\Big|_{r=1} = 0, \\ M_2 w(r,\kappa) &= \{f(r,\kappa)w''(r,\kappa)r + \nu f(r,\kappa)w'(r,\kappa) + \\ &+ g_2(r,\kappa)w'(r,\kappa)\}\Big|_{r=1} = M_2^0 w(r,\kappa) + g_2(\kappa)w'(r,\kappa)\Big|_{r=1} = 0, \end{aligned} \qquad (5)$$

где $L,\ M_1,\ M_2$ – линейные операторы, причем M_1 и M_2 не содержат искомые параметры. Отметим, что случай малых по абсолютной величине $g_1(\kappa),\ g_2(\kappa)$ соответствует случаю слабой заделки, а случай больших – случаю сильной заделки.

Для нахождения прогиба w и решения краевой задачи (4),(5) используется метод Ритца аналогично [12]. Будем искать прогиб w в виде линейной комбинации вида $w = w_0 + C_1 w_1 + C_2 w_2$, где $w_0,\ w_1,\ w_2$ – решения вспомогательных задач следующего вида

$$\begin{array}{lll} 1^0.\ Lw_0 = rq, & 2^0.\ Lw_1 = 0, & 3^0.\ Lw_2 = 0, \\ w_0\big|_{r=1} = 0, & M_1^0 w_1\big|_{r=1} = 0, & M_2^0 w_2\big|_{r=1} = 1 \\ w_0'\big|_{r=1} = 0. & M_2^0 w_1\big|_{r=1} = 1. & M_2^0 w_2\big|_{r=1} = 0. \end{array}$$

Отметим, что вспомогательные задачи не содержат искомые параметры. Их решение ищется с помощью метода Ритца, причем базисные функции имеют вид $\varphi_k(r) = r^{2(k-1)},\ k = 1,2...N$.

Проведена серия вычислительных экспериментов при следующих законах неоднородности $h(\xi) = \xi^2 + 0.2$, $g(\xi) = 1 + \xi$, $c = 0.01$. Амплитуда смещения при резонансном значении в вязкоупругом случае принимает конечное значение в отличие от упругого случая, так как имеется затухание, обусловленное вязкоупругостью пластины и связей. На рис.1 приведено сравнение АЧХ для различных случаев: сплошная линия – упругие пластина и связь, пунктирная линия – вязкоупругая пластина, упругая связь, штрих-пунктир – вязкоупругие пластина и связь.

В табл.1 приведены численные значения собственных частот при различных типах закрепления для различных типов пластин.

Таблица 1.

Зависимости резонансных значений от типа пластины и типа граничных условий.

$c = 0.005$, $h_1 = 8\cdot 10^2$, $m_1 = 10^3$, $h_2 = 9\cdot 10^3$, $m_2 = 2\cdot 10^4$

	Упругая пластина, жесткая	Упругие пластина и связи	Вязкоупругая пластина, упругие связи	Вязкоупругие пластина и связи

	заделка			
κ_1	7.91	7.83	7.89	7.89
κ_2	27.79	26.49	25.19	25.09
κ_3	60.31	52.33	56.69	55.99

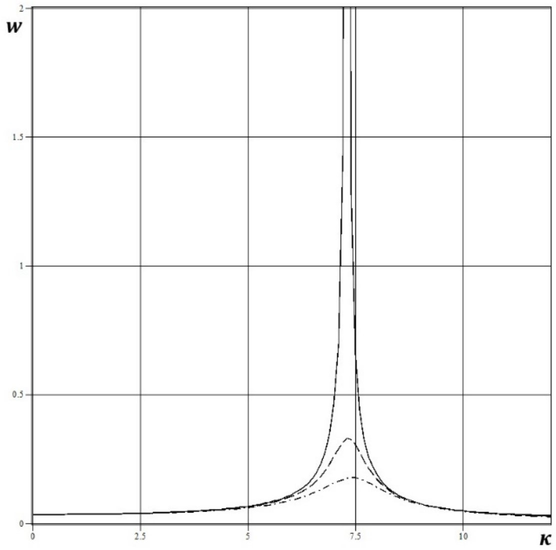

Рис.1. АЧХ в окрестности первого резонанса. $c=0.01$, $h_1=10^2$, $m_1=10^3$, $h_2=5\cdot10^2$ $m_2=10^4$.

2. ЗАДАЧА О РЕКОНСТРУКЦИИ ПАРАМЕТРОВ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

В [12] была рассмотрена задача реконструкции упругих характеристик в граничных условиях. Сформулируем обратную задачу об определении вязкоупругих параметров $g_1(\kappa)$ и $g_2(\kappa)$ по известному прогибу в наборе точек $w(r_k)=\lambda_k$, $k=1,2...m$. В [12] установлено, что прогиб в точках r_i есть дробно-рациональная функция от параметров g_1 и g_2 вида $w(r_i)=\dfrac{a_0^i g_1 g_2 + a_1^i g_1 + a_2^i g_2 + a_3^i}{a_0 g_1 g_2 + a_1 g_1 + a_2 g_2 + 1}$ где a_0, a_1, a_2, a_0^i, a_1^i, a_2^i, a_3^i – известные числовые коэффициенты.

В вязкоупругом случае в рамках принципа соответствия прогиб будет иметь аналогичный вид, но теперь параметры вязкоупругости закрепления будут функциями от частоты: $g_1(\kappa)$, $g_2(\kappa)$. Для решения задачи реконструкции $g_1(\kappa)$, $g_2(\kappa)$ достаточно знать прогиб в двух точках пластины, тогда для определения параметров имеет место система с комплексными коэффициентами

$$\begin{aligned} &b_0^1 g_1(\kappa) g_2(\kappa) + b_1^1 g_1(\kappa) + b_2^1 g_2(\kappa) + b_3^1 = 0, \\ &b_0^2 g_1(\kappa) g_2(\kappa) + b_1^2 g_1(\kappa) + b_2^2 g_2(\kappa) + b_3^2 = 0, \end{aligned} \qquad (6)$$

откуда находятся h_1, h_2, m_1, m_2. Проблема неединственности решения разрешается наложением условий положительности на искомые параметры. Нетрудно показать, что система (6) задает условную гиперболическую зависимость в комплексном пространстве координат. Вид гиперболической зависимости и изображения гипербол для случая действительной системы приведены в [12]. Вычислительные эксперименты показали хорошую степень точности реконструкции при различных значениях параметров. Отметим, что если h_i, m_i отличаются более чем на 40%, то восстановить параметры чаще всего не удается. Физически такая разница означает высокую степень диссипации и сильное затухание колебаний.

Таблица 2.

Реконструкция параметров вязкоупругости закрепления. $\kappa = 0.5$ (до первого резонанса).

Заданные параметры				Погрешность реконструкции, %			
h_1	m_1	h_2	m_2	h_1	m_1	h_2	m_2
10^{-3}	10^{-2}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-6}	$1.1\cdot10^{-5}$	0.87	2.59
$5\cdot10^{-3}$	10^{-1}	10^{-2}	$5\cdot10^{-1}$	$8.2\cdot10^{-7}$	10^{-6}	$1.9\cdot10^{-2}$	$2.1\cdot10^{-4}$
10	$5\cdot10^{2}$	10^{2}	10^{4}	$8.2\cdot10^{-6}$	$5.9\cdot10^{-6}$	$1.5\cdot10^{-1}$	$2.9\cdot10^{-1}$
10^{4}	10^{5}	$5\cdot10^{4}$	10^{5}	$1.6\cdot10^{-5}$	$8.5\cdot10^{-5}$	0.50	5.79
$5\cdot10^{2}$	10^{3}	10^{-2}	10^{-1}	$4.5\cdot10^{-6}$	$4.7\cdot10^{-6}$	$2.5\cdot10^{-5}$	$5.8\cdot10^{-4}$
$5\cdot10^{4}$	$5\cdot10^{5}$	10^{4}	10^{5}	$1.4\cdot10^{-3}$	$1.9\cdot10^{-3}$	19.8	32.7

Для оценки устойчивости схемы реконструкции искомых характеристик был проведен вычислительный эксперимент по зашумлению исходных данных (прогибов), причем действительная и мнимая части зашумлялись отдельно друг от друга по законам $\operatorname{Re} w(\xi_i) = \operatorname{Re} w(\xi_i)(1+\varepsilon\theta_i)$, $\operatorname{Im} w(\xi_i) = \operatorname{Im} w(\xi_i)(1+\varepsilon\gamma_i)$, где $\varepsilon = 10^{-5}$ θ_i, γ_i – случайные функции с равномерным законом распределения на $[-1,1]$. Результаты представлены в табл.3.

Таблица 3

Реконструкция параметров вязкоупругости закрепления при зашумлении входных данных. $\kappa = 0.5$ (до первого резонанса).

Заданные параметры				Погрешность реконструкции, %			
h_1	m_1	h_2	m_2	h_1	m_1	h_2	m_2
10^{-1}	$3\cdot10^{-1}$	10^{-1}	10^{-2}	$4.2\cdot10^{-4}$	$1.5\cdot10^{-3}$	$3.4\cdot10^{-1}$	45.4
1	10	10^{-1}	10^{2}	$2.2\cdot10^{-5}$	$5.1\cdot10^{-4}$	$3.2\cdot10^{-2}$	$7.4\cdot10^{-3}$
10^{-2}	10^{-1}	10^{-2}	10	$4.9\cdot10^{-3}$	$5.9\cdot10^{-3}$	27.2	$5.6\cdot10^{-1}$
10	10^{5}	$5\cdot10^{2}$	10^{3}	$4.6\cdot10^{-4}$	$1.9\cdot10^{-4}$	2.0	20.4
$8\cdot10^{-3}$	10^{-2}	10	10^{2}	$6.1\cdot10^{-3}$	$4.9\cdot10^{-3}$	5.7	10.6
10	10^{3}	10^{3}	$5\cdot10^{5}$	$1.5\cdot10^{-4}$	$4.9\cdot10^{-4}$	25.1	46.1

3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ЗАДЕЛКИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ НАГРУЗКИ

Предлагаемая в настоящей работе модель с вязкоупругим опиранием позволяет сформулировать задачу об оценке ошибки при определении величины нагружения, которую влечет за собой неучет вязкоупругости заделки, т.е. подход, при котором пластина считается жестко защемленной $(g_1, g_2 \to \infty)$. Для моделирования такой ситуации сначала заделка считается упругой, фиксируются значения g_1, g_2, q находится прогиб $w(r)$ при заданных параметрах. Далее заделка полагалась жесткой и по найденному $w(r)$ восстанавливалось значение q_*. Сравнение изначально заданного q и восстановленного q_* и позволяет оценить степень влияния коэффициентов g_1, g_2 на определение давления. В табл.4 приведены погрешности реконструкции давления в различных точках.

Таблица 4.

Оценка погрешности при восстановлении нагрузки.

Заданные параметры	Погрешность восстановления q в т. $a/8$, %	Погрешность восстановления q в т. $a/2$, %	Погрешность восстановления q в т. $4a/5$, %
$h_1 = 10^4$, $m_1 = 10^5$, $h_2 = 5\cdot10^4$, $m_2 = 10^5$	2.6	0.2	5.8
$h_1 = 5\cdot10^2$, $m_1 = 5\cdot10^3$, $h_2 = 10^2$, $m_2 = 10^3$	7.2	13.1	55.6
$h_1 = 5\cdot10^3$, $m_1 = 10^4$, $h_2 = 10^2$, $m_2 = 10^4$	3.5	5.5	15.4
$h_1 = 5\cdot10^2$, $m_1 = 10^5$, $h_2 = 10^3$, $m_2 = 10^4$	3.3	6.6	34.8
$h_1 = 10^3$, $m_1 = 10^4$, $h_2 = 10^4$, $m_2 = 10^5$	1.6	4.1	21.9

Из таблицы видно, что неучёт влияния вязкоупругости при небольших значениях параметров из выражений для g_1, g_2 приводит к существенной погрешности при реконструкции давления. По мере приближения к краю пластины точек измерения погрешность увеличивается, так как увеличивается влияние заделки, поэтому в качестве входных данных лучше брать значения прогибов
в точках, наиболее удаленных от закрепления.

Приведем результаты вычислительного эксперимента для конкретного материала [16]. Параметры получены после обработки данных по методике, приведенной в [17]. Здесь τ – временной параметр модели.

Таблица 5.

Оценка погрешности при восстановлении нагрузки в т. $a/2$, $\kappa = 0.4$, %.

Заданные параметры	$\tau = 0.125$ с	$\tau = 0.3383$ с	$\tau = 0.5$ с
$h_1 = h_2 = 2.3148\cdot10^6$, $m_1 = m_2 = 4.8572\cdot10^6$	0.28	11.12	6.8
$h_1 = h_2 = 2\cdot10^6$,	1.2	5.9	2.7

$m_1 = m_2 = 4\cdot 10^6$			
$h_1 = h_2 = 1.5\cdot 10^6$, $m_1 = m_2 = 3\cdot 10^6$	0.2	0.5	0.7
$h_1 = h_2 = 2.5\cdot 10^6$, $m_1 = m_2 = 4.8\cdot 10^6$	0.5	3.0	2.3
$h_1 = h_2 = 2.9\cdot 10^6$, $m_1 = m_2 = 4.9\cdot 10^6$	12.2	6.1	14.9

Как видно из таблицы, результаты вычислительных экспериментов показали достаточную эффективность предложенной процедуры реконструкции параметров.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе рассмотрена задача реконструкции реологических параметров закрепления неоднородной круглой пластинки. На основе принципа соответствия задача исследована в рамках вариационного принципа Лагранжа с помощью метода Ритца, оценена его точность. В рамках предложенной модели решена задача реконструкции вязкоупругих параметров граничных связей на основе известного прогиба в наборе точек. Проведена серия вычислительных экспериментов, выявлены диапазоны, в которых реконструкция осуществляется успешно. Сформулирована и решена задача об оценке ошибки при определении величины нагружения, которую влечет за собой неучет вязкоупругости связей; выяснено, что при небольших значениях параметров, характеризующих вязкоупругость закрепления, неучёт их влияния приводит к существенной погрешности при реконструкции амплитуды нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахтямов А.М. *Диагностика закрепления прямоугольной мембраны по собственным частотам ее колебаний* // Акустический журнал. – 2006. – Т.52. – №3. – С.293-296.
2. Ахтямов А.М. *Можно ли определить вид закрепления колеблющейся пластины по ее звучанию?* // Акустический журнал. – 2003. – Т.49. – №3. – С.325-331.
3. Выборнов Б.И. *Ультразвуковая дефектоскопия*. – М.: Металлургия, 1985. – 256 с.
4. Углов А.Л., Ерофеев В.И., Смирнов А.Н. *Акустический контроль оборудования при изготовлении и эксплуатации.* – М.: Наука, 2009. – 279 с.
5. Al-Khoury R., Scarpas A., Kasbergen C., Blaauwendraad J. *Spectral element technique for efficient parameter identification of layered media. Part III: viscoelastic aspects* // Int. J. Solids and Structures. – 2002. – Vol.39. – No.8. – Pp.2189-2201.
6. Elkhaldi I., Charpentier I., Daya M. *A gradient method for viscoelastic behaviour identification of damped sandwich structures* // Comptes Rendus Mécanique. – 2012. – Vol.340. – No.8. – Pp.619-623.

7. Zhang H., Lin X., Wang Y., Zhang Q., Kang Y. *Identification of elastic-plastic mechanical properties for bimetallic sheets by hybrid-inverse approach* // Acta mechanica solida sinica. – 2010. – Vol.23. – No.1. – Pp.29-35.
8. Богачев И.В., Ватульян А.О., Явруян О.В. *Реконструкция жесткости неоднородной упругой пластины* // Акустический журнал. – 2016. – Т.62. – №3. – С.369-374.
9. Аникина Т.А., Богачев И.В., Ватульян А.О. *Идентификация неоднородных характеристик вязкоупругих стержней при изгибных колебаниях* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2011. – Т.17. – №1. – С.107-115.
10. Горбачев В.И. *Инженерная теория деформирования неоднородных пластин из композиционных материалов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №4. – С.585-601.
11. Аникина Т.А., Богачев И.В., Ватульян А.О., Дударев В.В. *Идентификация неоднородных свойств вязкоупругой круглой пластины* // Экологический вестник научных центров ЧЭС. – 2016. – №2. – С.10-18.
12. Ватульян А.О., Потетюнко О.А. *О колебаниях неоднородной пластины с упруго опертым краем* // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2016. – №2. – С.28-33.
13. Ватульян А.О., Потетюнко О.А. *К оценке деформативности решетчатой пластинки глаза* // Российский журнал биомеханики. – 2017. – Т.21. – №1. – С.8-17.
14. Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. – М.: Мир, 1974. – 340 с.
15. Богачев И.В., Ватульян А.О. *Обратные коэффициентные задачи для диссипативных операторов и идентификация свойств вязкоупругих материалов* // Владикавказ. матем. журн. – 2012. – Т.14. – Вып.3. – С.31-44.
16. Ферри Дж. *Вязкоупругие свойства полимеров*. – М.: Иностранная литература, 1963. – 535 с.
17. Азаров А.Д., Исаев К.В., Азаров И.Д. *Идентификация линейных дифференциальных моделей вязкоупругих материалов* // Труды XII международной конф. «Современные проблемы механики сплошной среды». 1-4 декабря 2008г., г. Ростов-на-Дону. – Т.2. – С.11-15.

REFERENCES

1. Akhtiamov A.M. *Diagnostika zakrepleniia priamougol'noi membrany po sobstvennym chastotam ee kolebanii [Diagnosis of the fixation of a rectangular membrane according to the natural frequencies of its oscillations]*. Akusticheskii zhurnal, 2006, Vol.52, №3, Pp.293-296.
2. Akhtiamov A.M. *Mozhno li opredelit' vid zakrepleniia kolebliushcheisia plastiny po ee zvuchaniiu? [Is it possible to determine the type of fastening of the oscillating plate by its sound?]*. Akusticheskii zhurnal, 2003, Vol.49, No.3, Pp.325-331.
3. Vybornov B.I. *Ul'trazvukovaia defektoskopiia [Ultrasonic Flaw Detection]*. Moskva, Metallurgiia, 1985, 256 p.
4. Uglov A.L., Erofeev V.I., Smirnov A.N. *Akusticheskii kontrol' oborudovaniia pri izgotovlenii i ekspluatatsii [Acoustic control of equipment during manufacture and operation]*. Moskva, Nauka, 2009, 279 p.
5. Al-Khoury R., Scarpas A., Kasbergen C., Blaauwendraad J. *Spectral element technique for efficient parameter identification of layered media. Part III:*

viscoelastic aspects. Int. J. Solids and Structures, 2002, Vol.39, No.8, Pp.2189-2201.

6. Elkhaldi I., Charpentier I., Daya M. *A gradient method for viscoelastic behaviour identification of damped sandwich structures.* Comptes Rendus Mécanique, 2012, Vol.340, No.8, Pp.619-623.
7. Zhang H., Lin X., Wang Y., Zhang Q., Kang Y. *Identification of elastic-plastic mechanical properties for bimetallic sheets by hybrid-inverse approach.* Acta mechanica solida sinica, 2010, Vol.23, No.1, Pp.29-35.
8. Bogachev I.V., Vatul'ian A.O., Iavruian O.V. *Rekonstruktsiia zhestkosti neodnorodnoi uprugoi plastiny [Reconstruction of the stiffness of an inhomogeneous elastic plate]*. Akusticheskii zhurnal, 2016, Vol.62, No.3, Pp.369-374.
9. Anikina T.A., Bogachev I.V., Vatul'ian A.O. *Identifikatsiia neodnorodnykh kharakteristik viazkouprugikh sterzhnei pri izgibnykh kolebaniiakh [Identification of inhomogeneous characteristics of viscoelastic rods under bending vibrations]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2011, Vol.17, No.1, Pp.107-115.
10. Gorbachev V.I. *Inzhenernaia teoriia deformirovaniia neodnorodnykh plastin iz kompozitsionnykh materialov [Engineering theory of deformation of inhomogeneous plates of composite materials]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2016, Vol.22, No.4, Pp.585-601.
11. Anikina T.A., Bogachev I.V., Vatul'ian A.O., Dudarev V.V. *Identifikatsiia neodnorodnykh svoistv viazkouprugoi krugloi plastiny [Identification of the inhomogeneous properties of a viscoelastic circular plate]*. Ekologicheskii vestnik nauchnykh tsentrov ChES, 2016, No.2, Pp.10-18.
12. Vatul'ian A.O., Potetiunko O.A. *O kolebaniiakh neodnorodnoi plastiny s uprugo opertym kraem [On the vibrations of an inhomogeneous plate with an elastically supported edge]*. Izvestiia vuzov, Severo-Kavkazskii region, Estestvennye nauki, 2016, No.2, Pp.28-33.
13. Vatul'ian A.O., Potetiunko O.A. *K otsenke deformativnosti reshetchatoi plastinki glaza [Towards deformability of a lamina cribrosa sclerae]*. Rossiiskii zhurnal biomekhaniki, 2017, Vol.21, No.1, Pp.8-17.
14. Richard M. Christensen. *Theory of Viscoelasticity*. Courier Corporation, 2003, 364 p.
15. Bogachev I.V., Vatul'ian A.O. *Obratnye koeffitsientnye zadachi dlia dissipativnykh operatorov i identifikatsiia svoistv viazkouprugikh materialov [Inverse coefficient problems for dissipative operators and identification of properties of viscoelastic materials]*. Vladikavkaz. matem. zhurn, 2012, Vol.14, Iss.3, Pp.31-44.
16. Ferry J.D. *Viscoelastic properties of polymers*. – John Wiley & Sons, 1980. – 641 p.
17. Azarov A.D., Isaev K.V., Azarov I.D. *Identifikatsiia lineinykh differentsial'nykh modelei viazkouprugikh materialov [Identification of linear differential models of viscoelastic materials]*. Trudy XII mezhdunarodnoi konf. «Sovremennye problemy mekhaniki sploshnoi sredy», 2008, Rostov-na-Donu, Vol.2. Pp.11-15.

Поступила в редакцию 14 ноября 2017 года.

Сведения об авторах:

Ватульян Александр Ованесович – д.ф.-м.н., проф., зав.каф. Теории упругости, ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, г. Ростов-на-Дону, Россия; e-mail: vatulyan@math.rsu.ru

Потетюнко Ольга Андреевна – студ., ФГАОУ ВО «Южный федеральный университет», Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича, г. Ростов-на-Дону, Россия; e-mail: ol_potet73@mail.ru