

## **ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗГИБ ПЛАСТИНОК ИЗ СПЛАВА С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ С УЧЕТОМ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЕМОСТИ ЭТОГО МАТЕРИАЛА\***

Сафронов П.А.

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

### **РЕЗЮМЕ**

В работе получено решение задач о чистом и консольном цилиндрическом изгибе пластинок сплошного прямоугольного сечения из сплава с памятью формы (СПФ). Выполнен учет свойства разносопротивляемости растяжению и сжатию СПФ, а также реализована возможность учета разномодульности этого материала. Рассуждения проведены на основе модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях. В работе использовано положение об активных процессах пропорционального нагружения, рассматриваются достаточно медленные процессы, решение задач получено в несвязной постановке. Принят набор гипотез Кирхгоффа-Лява, а также гипотеза о плоском деформированном состоянии в отношении второй компоненты тензора полных деформаций.

Для рассмотренных процессов мартенситной неупругости (МН) и прямого фазового перехода (ПП) показано влияние свойств разносопротивляемости и разномодульности на положение нейтральной плоскости и на распределение нормальных продольных напряжений в сечении пластинки, а также на податливость пластинки. Установлено, что положение нейтральной плоскости зависит только от соотношения упругих модулей СПФ для малых значений изгибающего момента (МН) и для малых значений параметра фазового состава (ПП). В неявном виде получена зависимость второй компоненты тензора напряжений от первой. Установлено распределение упругих и фазово-структурных продольных деформаций в поперечном сечении пластинки. Показано различие в решениях задач о чистом цилиндрическом изгибе пластинки и чистом изгибе аналогичной балки.

Для явления ПП установлена слабовыраженная нелинейная зависимость кривизны пластинки от параметра фазового состава.

**Ключевые слова:** сплавы с памятью формы; разносопротивляемость; упругие деформации; фазовые переходы; структурные переходы; пластинки; цилиндрический изгиб.

## **TENSION-COMPRESSION ASYMMETRY INCORPORATING IN SOLUTION THE PROBLEM OF CYLINDRICAL BEND OF THE PLATE FROM SHAPE MEMORY ALLOY**

Safronov P.A.

*Moscow aviation institute (National Research Center), Moscow, Russia*

---

\* Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, проект № 17-01-00216.

## SUMMARY

In this paper the problems cantilever and pure cylindrical bending of plate with solid rectangular cross-section from shape memory alloy (SMA) are solved. Tension-compression asymmetry (TCA) of the SMA stress-strain curves and different elastic modules is incorporated. This paper is database on model of SMA non-linear straining in phase and structure transitions. In this paper proposition of active processes proportional loading are used. So, numerical solution of the problem is obtaining in non-coupled formulation and a slow enough processes are considered. In this paper hypothesis of Kirchhoff-Love in cylindrical bending problem and plane strain hypothesis to second component of the full strain tensor are accept.

Dependence of dimensionless neutral surface coordinate, dimensionless normal stress and the compliance of plate from the TCA of stress-strain curves and the difference in elastic modules in case of martensite non-elasticity (MN) and direct transition (DT) are shown. Dimensionless neutral surface coordinate are only depend on ratio of tension and compression elastic modules of SMA in case of small values of dimensionless bending moment (MN) and in case of small values of dimensionless martensite volume fraction (DT). Dependence of the second component of the stress tensor from the first component in implicit form are obtained. Distribution of the elastic and the phase-structure axial strains in plate cross-section are found. Difference in solution of the pure bend of the beam and the cylindrical bend of the similar plate are shown.

The low expression nonlinear dependence of the dimensionless plate curvature from the martensite volume fraction is found.

**Keywords:** shape memory alloys; tension-compression asymmetry; elastic strain; phase transitions; structure transitions; plates, cylindrical bend

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время СПФ используются в широком классе устройств из разнообразных сфер деятельности человека: медицина (стенты, штифты, имплантаты, зажимы и т.д.), противопожарные системы, сейсмоустойчивые сооружения, авиация, космонавтика и проч. Уникальные термомеханические свойства СПФ, а также высокая надежность и безотказность конечного устройства оправдывают использование столь дорогостоящего материала в качестве основы для изготовления активных элементов таких конструкций. К наиболее известным свойствам СПФ можно отнести способность образцов из этого материала накапливать значительные неупругие деформации (порядка 8%) под действием механических напряжений с последующим восстановлением первоначальной формы при нагреве (обратное превращение) или разгрузке (явление сверхупругости). Однако, более широкому применению СПФ препятствует отсутствие решений соответствующих краевых задач в силу сложности качественно и количественно верного описания наиболее важных свойств этих материалов, а также применения существующих выкладок для решения таких задач.

Так, одно из важных свойств СПФ заключается в существенном несовпадении кривых деформирования при растяжении и сжатии образца из этого материала - свойство разносопротивляемости [1,2]. Причем, данное явление установлено для образцов из СПФ как для режимов мартенситной неупругости [3] и сверхупругости [4-6], так и для процесса прямого термоупругого превращения [7-9]. Таким образом, если активный элемент конструкции из СПФ работает преимущественно на изгиб, когда одна часть сечения элемента растягивается,

а другая сжимается, свойство разносопротивляемости может в значительной степени влиять на поведение такого элемента.

Узкий круг работ посвящен решению краевых задач об изгибе элементов конструкции с учетом свойства разносопротивляемости СПФ. К ним относятся решение задач об изгибе балки из СПФ в режиме сверхупругости [10] на основе модели [11,12], а также для явлений МН и ПП в рамках модели [15-18] как с учетом [13], так и без учета упругих деформаций [14]. Решению аналогичных краевых задач без учета свойства асимметрии кривых деформирования СПФ посвящены работы [17,19-22] также на основе модели нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях [15-18].

В данной работе получено решение задач о чистом и консольном цилиндрическом изгибе пластинок из СПФ для явлений МП и ПП в несвязной постановке. Влияние эффектов термомеханической связанности в задачах изгиба для элементов из СПФ, без учета эффектов разносопротивляемости этих материалов обсуждено в [23]. Рассуждения построены на основе модели [15-18] с учетом ее простейшей модификации для учета свойства разносопротивляемости СПФ.

## 1. МОДЕЛЬ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ СПФ

В данной работе использована модель нелинейного деформирования СПФ при фазовых и структурных превращениях, предложенная в [15-18]. Девиатор фазово-структурных деформаций в рамках используемой модели записывается согласно соотношению)

$$d\varepsilon_{ij}' = \left( \frac{3}{2} \rho_1(\mu_\sigma) \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} (1 - qf(q)) \varphi_1(\sigma_i) + f(q) \varepsilon_{ij}' \right) dq + \frac{3}{2} \rho_2(\mu_\sigma) \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} q \varphi_2(\sigma_i) d\sigma_i \quad (1.1)$$

Здесь  $\sigma_i, \sigma_{ij}'$  – интенсивность и девиатор тензора напряжений,  $q$  – параметр состояния материала, численно равный объемной доле мартенситной фазы в аустенитно-мартенситном состоянии,  $\rho_1(\mu_\sigma), \rho_2(\mu_\sigma)$  – функции параметра вида напряженного состояния для фазового и структурного переходов соответственно,  $f(q)$  – материальная функция, которая удовлетворяет неравенству  $0 \leq f(q) \leq 1/q$ ,  $\varphi_1(\sigma_i) \neq \varphi_2(\sigma_i)$  – интегральные функции распределения интенсивностей микронапряжений в представительском объеме СПФ. При этом  $\varphi_1(\sigma_i)$  соответствует фазовой, а  $\varphi_2(\sigma_i)$  – структурной составляющей девиатора неупругих деформаций.

В работе рассматриваются активные процессы пропорционального нагружения, положения о которых строго доказаны в рамках используемой модели поведения СПФ [24]. Оказывается, если происходит пропорциональное изменение компонент девиатора напряжений, отсутствует разгрузка, процесс начинается из полностью аустенитного состояния или из состояния полностью сдвойникового мартенсита и выполняются соотношения

$$\begin{cases} \varphi_1(\sigma_i) = \varphi_2(\sigma_i) = \varphi(\sigma_i) \\ \rho_1(\mu_\sigma) = \rho_2(\mu_\sigma) = \rho(\mu_\sigma) \end{cases} \quad (1.2)$$

то уравнение для фазово-структурных деформаций (1.1) может быть проинтегрировано, и при нулевых начальных условиях имеет единственное решение

$$\varepsilon_{ij}' = \rho_D \frac{3 \sigma_{ij}'}{2 \sigma_i} q \varphi(\sigma_i) \quad (1.3)$$

В работе получено решение задач о цилиндрическом изгибе пластинки из СПФ для явления мартенситной неупругости и процесса прямого термоупругого превращения. Для задачи о МН происходит деформирование пластинки из СПФ под действием монотонно возрастающего изгибающего момента. При этом параметр фазового состава является постоянной величиной  $q = 1$ , таким образом, приращение фазовой составляющей неупругих деформаций отсутствует и  $\varphi(\sigma_i) = \varphi_2(\sigma_i)$ ,  $\rho(\mu_\sigma) = \rho_2(\mu_\sigma)$ , а так же отсутствует разгрузка. Для задачи о ПП происходит монотонное охлаждение и как следствие деформирование пластинки из СПФ под действием постоянного изгибающего момента. При этом отсутствует приращение структурных деформаций, откуда  $\varphi(\sigma_i) = \varphi_1(\sigma_i)$  и  $\rho(\mu_\sigma) = \rho_1(\mu_\sigma)$ . В рамках решения задачи о цилиндрическом изгибе пластинки только два внутренних силовых фактора будут отличны от нуля – нормальные напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , при этом получена зависимость  $\sigma_y = f(\sigma_x)$ , пусть и в неявном виде. Таким образом, требование изменения компонент девиатора напряжений пропорционально одному параметру также выполняется и использование положений об активных процессах пропорционального нагружения является оправданным.

Пренебрегая объёмным эффектом реакции СПФ, согласно (1.3) запишем выражение для тензора фазово-структурных деформаций

$$\varepsilon_{ij}^{phst} = \rho_D \frac{3 \sigma_{ij}'}{2 \sigma_i} q \varphi(\sigma_i) \quad (1.4)$$

При моделировании МН в качестве функции  $\varphi(\sigma_i) = \varphi_2(\sigma_i) = \Phi_2(\sigma_i / \sigma_0)$  следует принимать распределение Вейбулла,  $\Phi_2(x) = 1 - \exp(-x^\alpha)$ ,  $\alpha > 1$ , а для ФП хорошо подходит распределение Лапласа, таким образом  $\varphi(\sigma_i) = \Phi_1(x) = \text{erf}(x / (\sigma_0 \sqrt{2}))$ . Параметр  $\sigma_0$  представляет собой квадратичное уклонение интенсивности микронапряжений. Величины  $\delta_0, \sigma_0, \alpha$  являются параметрами материала, которые подбираются из соответствующих экспериментов, причем для случаев растяжения и сжатия образцов из СПФ, наборы данных параметров будут разными.

## 2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ ПЛАСТИНЫ ИЗ СПФ

В работе рассматривается чистый и консольный цилиндрический изгиб пластин сплошного прямоугольного сечения шириной  $b$  и высотой  $h$ . Распределение параметра фазового состава  $q$  полагается постоянным по сечению. Данное предположение правомерно в рамках рассматриваемой несвязной постановки задачи, когда действующие в поперечном сечении пластины напряжения не влияют на параметр фазового состава, а рассматриваемый процесс является медленным. Таким образом, при решении задачи о прямом термоупругом превращении температура остается постоянной по сечению за счет

явления теплопроводности. Решение задачи о мартенситной неупругости не требует дополнительных предположений, поскольку  $q=1$  всегда.

Задача о цилиндрическом изгибе пластины решается в рамках гипотез Бернулли-Эйлера, которые устанавливают отсутствие деформаций сдвига по толщине пластины и линейной деформации в направлении, перпендикулярном срединной плоскости. По направлению оси  $Y$  пластина испытывает плоское деформированное состояние, таким образом для компоненты  $\varepsilon_y$  тензора полных деформаций справедливо выражение (см. рис.1)

$$\varepsilon_y = 0 \quad (2.1)$$

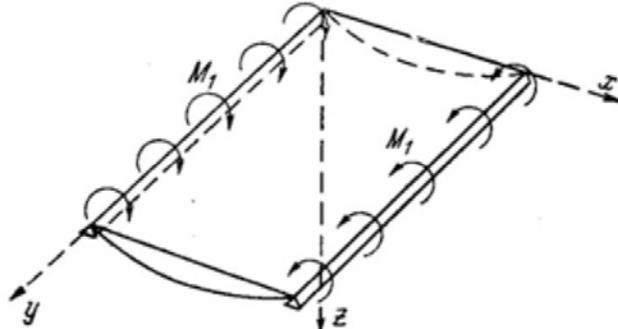


Рис.1. Общий вид пластинки.

В силу аддитивности представления полных деформаций, для полной деформации в направлении оси  $Y$  имеем выражение

$$\varepsilon_y = \varepsilon_y^e + \varepsilon_y^{phst} \quad (2.2)$$

Здесь  $\varepsilon_y^e$  – упругая составляющая,  $\varepsilon_y^{phst}$  – фазово-структурная составляющая полных деформаций в направлении оси  $Y$ , для которых справедливы соотношения

$$\varepsilon_y^e = \frac{1}{E(q)}(\sigma_y - \nu\sigma_x), \quad \varepsilon_y^{phst} = \rho_D \frac{3}{2} \frac{\sigma_y'}{\sigma_i} q\varphi(\sigma_i) \quad (2.3)$$

Здесь предполагается осреднение по Рейсу для модуля Юнга  $\frac{1}{E(q)} = \frac{q}{E_M} + \frac{1-q}{E_A}$ ,

где  $E_M, E_A$  – мартенситный и аустенитный модули соответственно,  $\nu = 0.3$  – упругий коэффициент Пуассона. Применяя условие плоской деформации (2.1) в направлении оси  $Y$  к выражениям (2.2)-(2.3), а так же принимая во внимание

$\sigma_y' = \frac{2\sigma_y - \sigma_x}{3}$  и  $\sigma_i = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x\sigma_y}$ , получим соотношения для компонент тензора напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$

$$\sigma_y = \sigma_x \left( \frac{\nu + 0.5BE(q)}{1 + BE(q)} \right), \quad B = \rho_D q\varphi(\sigma_i) \frac{1}{\sigma_i} \quad (2.4)$$

Выражение (2.4) позволяет установить значение  $\sigma_y$  для известных значений  $\sigma_x$  и  $\nu$ , а также показывает, что компоненты девиатора напряжений изменяются пропорционально одному параметру  $\sigma_x$ .

Согласно (2.2)-(2.3) запишем выражение для полной продольной деформации и распространим его для случая разносопротивляющегося растяжению и сжатию материала

$$\begin{cases} \varepsilon_{xt} = \frac{\sigma_{xt} - \nu\sigma_{yt}}{E_t(q)} + \frac{1}{2}\delta_t q \frac{2\sigma_{xt} - \sigma_{yt}}{\sigma_i} \Phi_t(\sigma_i / \sigma_{0t}), \sigma > 0 \\ \varepsilon_{xc} = \frac{\sigma_{xc} - \nu\sigma_{yc}}{E_c(q)} + \frac{1}{2}\delta_c q \frac{2\sigma_{xc} - \sigma_{yc}}{\sigma_i} \Phi_c(\sigma_i / \sigma_{0c}), \sigma < 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Здесь и далее величины, обозначенные нижним индексом "t" соответствуют растяжению, а индексом "c" – соответствующие сжатию. Функции  $\Phi_t$  и  $\Phi_c$  доопределяются нечетным образом для отрицательных значений аргумента:  $\Phi_t(-x) = -\Phi_t(x)$  и  $\Phi_c(-x) = -\Phi_c(x)$ . В случае использования различных величин  $E_t(q) \neq E_c(q)$ , выражение (2.5) позволяет моделировать свойство разномодульности СПФ.

Согласно гипотезе плоских сечений, при отсутствии продольной нагрузки полная продольная деформация волокна в поперечном сечении балки на расстоянии  $z$  от нейтральной плоскости определяется согласно формуле

$$\varepsilon_x = kz, \quad (2.6)$$

Здесь  $k$  – кривизна нейтральной плоскости балки,  $z$  – поперечная координата, отсчитываемая в случае отсутствия разнсопротивляемости от плоскости симметрии пластинки.

Учет свойства разнсопротивляемости СПФ приводит к тому, что положение нейтральной плоскости пластины не отвечает классической постановке задачи изгиба и не совпадает с нейтральной плоскостью, и является заранее неизвестным равно, как и распределение нормальных растягивающих и сжимающих напряжений. Обозначим через  $A$  расстояние от нейтральной плоскости до плоскости симметрии таким образом, что положительное значение параметра ( $A > 0$ ) будет отвечать смещению нейтральной плоскости в сторону сечения пластинки, испытывающей напряжения сжатия (рис.2).

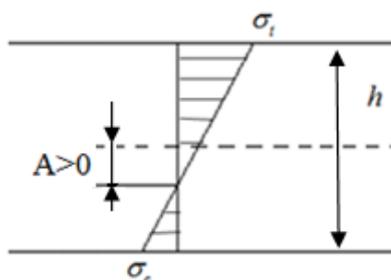


Рис.2. Отклонение нейтральной плоскости пластинки от плоскости симметрии.

Интегрирование нормальных напряжений  $\sigma_{xc}$  и  $\sigma_{xt}$  по соответствующим областям поперечного сечения в плоскости  $yz$  пластины позволяет установить величину изгибающего момента

$$M = \int_0^{0.5h-A} b\sigma_{xc}(z)zdz + \int_0^{0.5h+A} b\sigma_{xt}(z)zdz \quad (2.7)$$

а уравнение равновесия отсеченной части пластинки в проекции на продольную ось  $x$  позволяет установить положение нейтральной плоскости

$$\int_0^{0.5h-A} b\sigma_{xc}(z)dz = \int_0^{0.5h+A} b\sigma_{xt}(z)dz \quad (2.8)$$

Объединяя выражения (2.1), (2.4) и (2.6-2.8) запишем блок уравнений, определяющий процессы ПП под действием постоянного изгибающего момента, а также явление МН при нагружении пластины внешним возрастающим изгибающим моментом

$$\left\{ \begin{array}{l} 1) \quad \varepsilon_{xt} = y\xi_t, \quad \varepsilon_{xc} = y\xi_c \\ 2) \quad \varepsilon_{xt} = \frac{s_{xt} - \nu s_{yt}}{e_t(q)} + \frac{1}{2} \delta_t q \frac{2s_{xt} - s_{yt}}{s_{it}} \Phi_t(s_{it}) \\ 3) \quad \varepsilon_{xc} = \frac{s_{xc} - \nu s_{yc}}{e_c(q)} + \frac{1}{2} \delta_c q \frac{2s_{xc} - s_{yc}}{s_{ic}} \Phi_c(s_{ic}) \\ 4) \quad s_{yt} = s_{xt} \left( \frac{\nu + 0.5B_{1t}e_t(q)}{1 + B_{1t}e_t(q)} \right), \quad B_{1t} = \rho_d q \Phi_t(s_{it}) \frac{1}{s_{it}} \\ 5) \quad s_{yc} = s_{xc} \left( \frac{\nu + 0.5B_{1c}e_c(q)}{1 + B_{1c}e_c(q)} \right), \quad B_{1c} = \rho_d q \Phi_c(s_{ic}) \frac{1}{s_{ic}} \\ 6) \quad \mu = \int_0^{0.5+a} s_{xt}(\xi_t) \xi_t d\xi_t + s_{ct} \int_0^{0.5-a} s_{xc}(\xi_c) \xi_c d\xi_c \\ 7) \quad \int_0^{0.5+a} s_{xt}(\xi_t) d\xi_t = s_{ct} \int_0^{0.5-a} s_{xc}(\xi_c) d\xi_c \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Здесь принят безразмерный вид следующих величин:  $\xi = z/h$  – безразмерная координата по высоте сечения пластины, отсчитываемая от положения нейтральной плоскости, соответственно  $0 \leq \xi_c \leq (0,5 - a)$  и  $0 \leq \xi_t \leq (0,5 + a)$ . Безразмерное положение нейтральной плоскости –  $a = A/h$ , безразмерная кривизна нейтральной плоскости пластины –  $y = kh$ , имеющая физический смысл полной деформации волокна пластины на расстоянии  $h$  от нейтральной плоскости. Безразмерные нормальные продольные напряжения –  $s_t = \sigma_t/\sigma_{0t}$  и  $s_c = \sigma_c/\sigma_{0c}$ , безразмерное значение модуля Юнга –  $e_t(q) = E_t(q)/\sigma_{0t}$  и  $e_c(q) = E_c(q)/\sigma_{0c}$ , безразмерный изгибающий момент  $\mu = M/bh^2\sigma_{0t}$  и безразмерный коэффициент  $s_{ct} = \sigma_{0c}/\sigma_{0t}$ .

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О МАРТЕНСИТНОЙ НЕУПРУГОСТИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МОНОТОННО ВОЗРАСТАЮЩЕГО ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

Задача о чистом цилиндрическом изгибе пластинки из СПФ в режиме МН предполагает постоянное значение параметра фазового состава  $q=1$ . Таким образом, упругий модуль Юнга определяется формулами  $e_t = E_{Mt}/\sigma_{0t}$  и  $e_c = E_{Mc}/\sigma_{0c}$ , и не зависит от  $q$ . В качестве интегральной функции распределения интенсивностей микронапряжений выступает распределение Вейбулла  $\Phi_t(s_{it}) = 1 - \exp(-(s_{it})^{\alpha_t})$ ,  $\alpha_t > 1$ , и  $\Phi_c(s_{ic}) = 1 - \exp(-(s_{ic})^{\alpha_c})$ ,  $\alpha_c > 1$ .

Численное решение блока уравнений (2.9) получено полу обратным методом. На первом шаге решения задачи предполагается известным набор значений безразмерной кривизны  $y = \{0..y_{\max}\}$ . Далее, группа уравнений (1) блока (2.9) позволяет установить значения продольных деформаций в каждой точке поперечного сечения пластинки. На следующем шаге итерационным методом ведется поиск такого набора значений безразмерных напряжений  $s_{xt}, s_{xc}, s_{yt}, s_{yc}$  и безразмерного положения нейтральной плоскости  $a_i$ , который удовлетворит группе уравнений (2-5), (7) блока (2.9). Завершающим этапом следует интегрирование найденных нормальных напряжений по соответствующим зонам сечения пластинки согласно уравнению (6) блока (2.9), что позволяет установить значение внешнего безразмерного изгибающего момента  $\mu_i$ , отвечающего текущему значению кривизны пластинки  $y_i$ .

Система уравнений (2.9) имеет особенность в области малых значений изгибающего момента и требует дополнительного исследования, которое было проведено в рамках решения аналогичной задачи об изгибе балки [13]. Оказывается, предельное положение нейтральной плоскости определяется согласно (3.1)

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} a = \begin{cases} 0, & E_c = E_t \\ \frac{0,5(e+1) - \sqrt{e}}{e-1}, & E_c \neq E_t \end{cases}, \quad (3.1)$$

Здесь принято  $e = E_c / E_t$  – безразмерное отношение упругих модулей. Таким образом, соотношения (3.1) однозначно определяют предельное положение нейтральной плоскости при  $\mu \rightarrow 0$ , которое не зависит ни от параметров материала  $\alpha_t, \alpha_c, \delta_t, \delta_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$ , ни от численного значения упругих модулей, а только от их отношения  $e = E_c / E_t$ .

Результаты численного моделирования явления МН при чистом цилиндрическом изгибе пластинки из СПФ под действием монотонно возрастающего изгибающего момента представлены ниже. На рис.3а,б приведены зависимости безразмерной кривизны и безразмерного положения нейтральной плоскости от величины безразмерного изгибающего момента. Значение параметров материала для кривых 1-5 приведены в табл.1.

Таблица 1.

Номер кривой	Вид нагрузки	$\delta$ , доли	$\sigma_0$ , МПа	$\alpha$	$e = E_c / E_t$
Кривые 1,5	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0132	216,6	4,88	
Кривая 2	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0209	216,6	4,88	
Кривая 3	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0132	180,65	4,88	
Кривая 4	Растяжение	0,0286	144,7	3,847	1
	Сжатие	0,0132	216,6	4,3635	

Кривая 1 на рис.3а и 3б соответствует плющине из равноатомного никелида титана ( $Ni_{50}Ti_{50}$ ), прошедшего температурную обработку – отжиг при

температуре  $450^{\circ}\text{C}$  в течении 30 минут. Кривые 2-4 показывают степень влияния каждого из параметров материала  $\alpha_t, \alpha_c, \delta_t, \delta_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$  на кривизну балки, рис.3а и на положение нейтральной плоскости, рис.3б. Кривая 5 на данных рисунках показывает решение аналогичной задачи об изгибе балки в рамках гипотез Бернулли-Эйлера. Поскольку цилиндрическая жесткость пластины выше изгибной жесткости балки, то кривизна балки ожидаемо превосходит кривизну аналогичной пластинки для равных значений изгибающего момента.

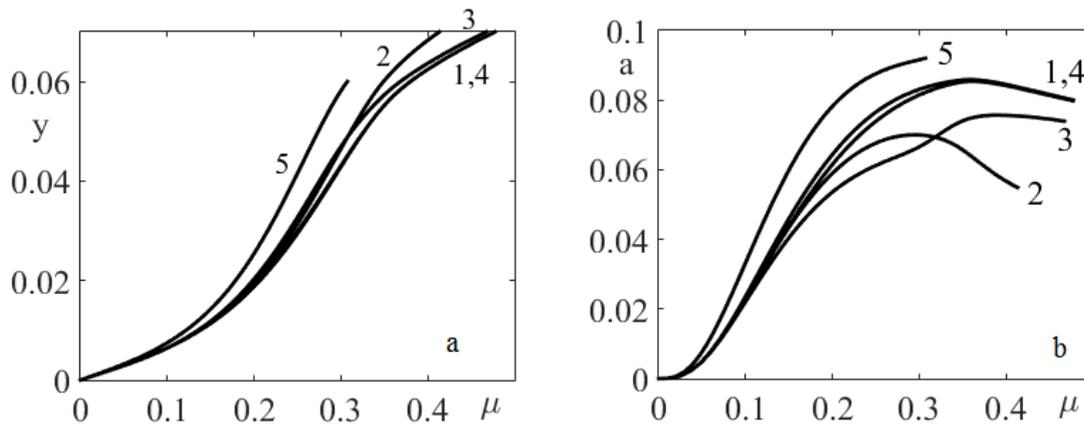


Рис.3. Кривые а)  $y - \mu$  и б)  $a - \mu$ . Разносопротивляемость.

Кривые 1-5 на рис.3б отвечают решению без учета разномодульности материала пластинки ( $e = E_c / E_t = 1$ ). Положение нейтральной плоскости в области малых значений изгибающего момента определяется только отношением упругих модулей, и в начальный момент времени совпадает с плоскостью симметрии пластинки, что соответствует рассуждениям, полученным в ходе анализа соотношений (3.1). Аналогичное поведение демонстрирует балка из СПФ, кривая 5, [13]. В свою очередь влияние разномодульности материала пластинки на положение нейтральной плоскости показано на рис.4. Здесь кривые 1-3 построены для отношения упругих модулей  $e = E_c / E_t = 1, 2; 1$  и  $0,8$  соответственно. Штриховой линией на рис.4 отмечено решение аналогичной задачи о изгибе балки, параметры материала которой соответствуют материалу 1 из табл.1.

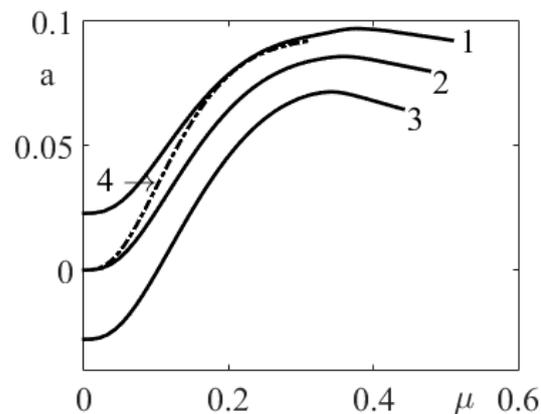


Рис.4. Кривые  $a - \mu$ . Разномодульность.

Поведение кривых на рис.3б и 4 показывает, что свойство разносопротивляемости значительно влияет на характер зависимости  $a(\mu)$ , в то время как разномодульность материала влияет на смещение отклонение зависимости от плоскости симметрии пластинки. При этом увеличение упругого модуля, соответствующего сжатию материала, в сравнении с модулем, отвечающим растяжению ( $E_c > E_t$ ), способствует смещению положения нейтральной плоскости в зону сжатых волокон.

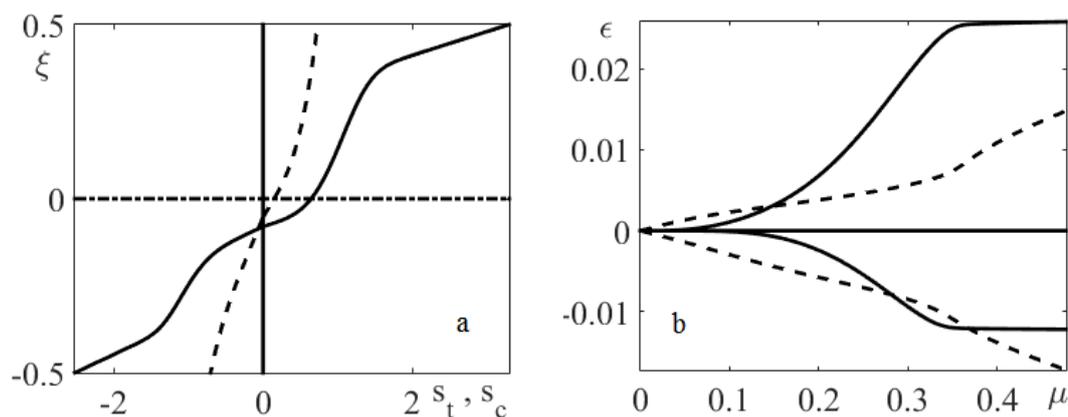


Рис.5. Кривые а)  $\xi - s_t, s_c$  и б)  $\varepsilon - \mu$ .

На рис.5а представлены эпюры нормальных безразмерных напряжений по сечению пластины для набора параметров материала 1 из табл.1. Штриховая кривая отвечает решению задачи о цилиндрическом изгибе пластины под действием безразмерного изгибающего момента величиной  $\mu = 0,2\mu_{\max}$ , в то время как сплошная – моменту величиной  $\mu = \mu_{\max} = 0,4772$ . Отметим, что с ростом безразмерного изгибающего момента, эпюра безразмерных нормальных напряжений по сечению пластины принимает все более и более нелинейный характер, рис.5а. На рис.5б показана история изменения структурных - сплошная кривая и упругих – штриховая кривая, деформаций крайних волокон в сечении пластины с ростом безразмерного изгибающего момента. Оказывается, для небольших значений изгибающего момента, вплоть до  $\mu \leq 0,15\mu_{\max}$ , упругая составляющая полных деформаций превосходит структурную составляющую, что согласуется с полученными ранее результатами относительно зависимости положения нейтральной плоскости от величины изгибающего момента, рис.4. Дальнейший рост изгибающего момента  $0,15\mu_{\max} < \mu \leq 0,3\mu_{\max}$  приводит к интенсивному накоплению структурных деформаций в крайних волокнах пластинки. Однако для значений  $\mu > 0,3\mu_{\max}$  кривые структурных деформаций испытывают состояние насыщения, что вызывает дальнейший интенсивный прирост упругих деформаций.

На рис.6а показано распределение отношения  $s_y/s_x$  по высоте сечения пластинки для  $\mu = 0,2\mu_{\max}$  – штриховые кривые и  $\mu = \mu_{\max} = 0,4772$  – сплошные кривые. Отметим, что величина отношения  $s_y/s_x$  значительно отличается от результатов классического решения аналогичной упругой задачи, для которой  $s_y = \nu s_x$ . На рис.6б показана история изменения отношения  $s_y/s_x$  в крайней

плоскости пластины с ростом изгибающего момента, сплошная кривая соответствует отношению растягивающих напряжений, штриховая – отношению сжимающих напряжений.

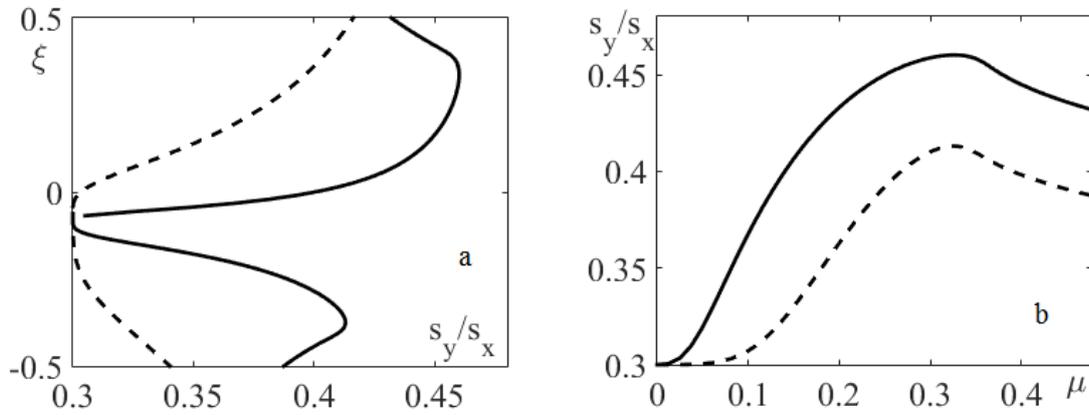


Рис.6. Кривые а)  $\xi - s_y / s_x$  и б)  $s_y / s_x - \mu$ .

Для решения задач о консольном цилиндрическом изгибе пластины из СПФ, блок уравнений (2.9) необходимо дополнить соотношениями

$$\begin{cases} \eta = \int_0^v \left( \int_0^y y(x) dx \right) dy \\ \mu = p(1-v), \quad p \neq 0, g = 0 \\ \mu = g(1-v)^2, \quad p = 0, g \neq 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь приняты следующие безразмерные величины:  $\eta = zh / L^2$  – безразмерный прогиб пластины,  $v = x / L$  – безразмерная координата по длине пластины,  $p = PL / h^2 \sigma_{0r}$  – безразмерная распределенная нагрузка, приложенная к свободной кромке пластины,  $g = GL^2 / 2h^2 \sigma_{0r}$  – безразмерная интенсивность распределенной по всей поверхности пластины нагрузки. Здесь  $P$  и  $G$  – размерные плотности соответствующих распределенных нагрузок.

На рис.7а,б приведены зависимости безразмерного прогиба пластинки по ее длине для задач консольного цилиндрического изгиба под действием безразмерной распределенной силы интенсивностью  $p = 0,175$  и безразмерной распределенного давления  $g = 0,175$  соответственно. Кривые, отмеченные цифрой 2 соответствуют решению с учетом разносопротивляемости и с учетом упругих деформаций, однако без учета разномодульности ( $e = E_c / E_t = 1$ ). Кривые 3, демонстрирующие наименьшую податливость пластины, соответствуют случаю, когда учитывается и разносопротивляемость и разномодульность ( $e = E_c / E_t = 1,2$ ) материала. Кривые, обозначенные цифрой 1, соответствуют решению аналогичных задач о консольном изгибе балки. Как видно из поведения кривых 1 и 2, пластинка из СПФ закономерно оказывается на 15-20% жестче аналогичной балки из СПФ при равных прочих условиях, поскольку цилиндрическая

жесткость пластинки выше изгибной жесткости балки при одинаковых геометрических параметрах сечения.

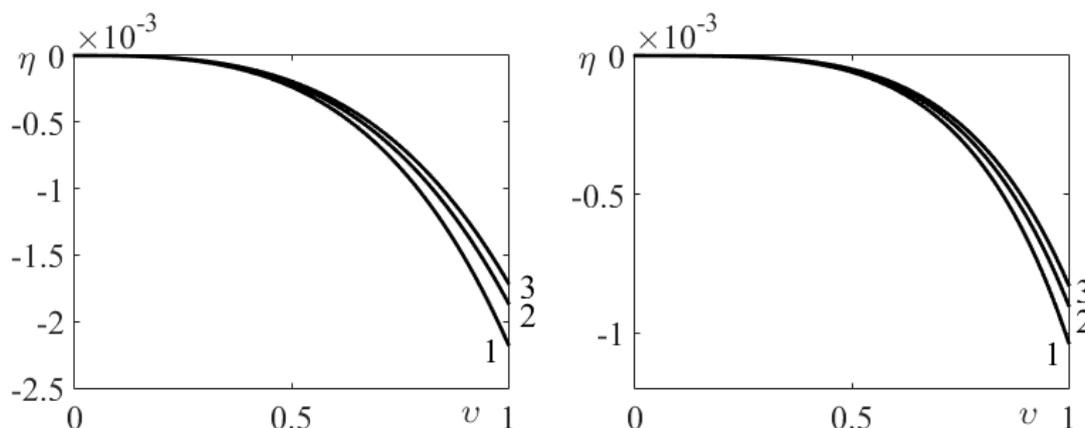


Рис.7. Кривые прогиба пластинки  $\eta - \nu$ .

#### 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРЯМОМ ТЕРМОУПРУГОМ ПРЕВРАЩЕНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОСТОЯННОГО ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА

Задача о чистом цилиндрическом изгибе пластинки из СПФ для процесса ПП предполагает монотонное охлаждение пластинки под действием постоянного изгибающего момента. В качестве интегральной функции распределения интенсивностей микронапряжений выступает распределение Лапласа  $\Phi_t(s_{it}) = \text{erf}(s_{it} / \sqrt{2})$  и  $\Phi_c(s_{ic}) = \text{erf}(s_{ic} / \sqrt{2})$ .

Численное решение блока уравнений (2.9) получено полу обратным методом. Первым шагом решается упругая задача о чистом цилиндрическом изгибе пластинки из СПФ в аустенитном состоянии под действием некоторого заданного значения безразмерного изгибающего момента  $\mu_0$ . Затем предполагается известным набор значений параметра фазового состава  $q = \{0..1\}$ . Далее, для каждого значения  $q_i$  в качестве начального приближения устанавливаем значение безразмерной кривизны  $y_i$  соответствующее прошлой итерации, и, с помощью уравнений (1) блока (2.9) находим распределение полных продольных деформаций по высоте сечения пластинки. Следующим этапом необходимо организовать итерационный процесс поиска такого набора значений безразмерных напряжений  $s_{xt}, s_{xc}, s_{yt}, s_{yc}$  и безразмерного положения нейтральной плоскости  $a_i$ , который удовлетворит группе уравнений (2-5), (7) блока (2.9). Завершающим шагом является интегрирование найденных нормальных напряжений согласно уравнению (6) блока (2.9) и установление значения изгибающего момента  $\mu_i$ . Сравнивая полученное значение  $\mu_i$  с эталонным  $\mu_0$  выполняется корректировка безразмерной кривизны  $y_i$  и соответствующие итерации повторяются вновь до тех пор, пока относительная разница величин  $\mu_i$  и  $\mu_0$  не станет мала.

Как уже было отмечено ранее, блок уравнений (2.9) имеет особенность в области малых значений изгибающего момента. Необходимые исследования

проведены в рамках решения аналогичной задачи о чистом изгибе балки из СПФ [13]. Принимая во внимание  $q_0 = 0$  в начальный момент времени процесса ПП и обращаясь к уравнениям (2-3) блока (2.9) можно установить, что полная продольная деформация волокон пластины определяется только упругой составляющей, при этом  $\sigma_y = \nu\sigma_x$ . Таким образом, предельное положение нейтральной плоскости вновь определяется согласно выражению (3.1), а соотношения для изгибающего момента могут быть записаны в виде

$$\mu_0 = \frac{\varepsilon_0}{3(0,5 + |a|)(1 - \nu^2)} (e_t(0,5 + a)^3 + s_{ct}e_c(0,5 - a)^3) \quad (4.1)$$

Здесь  $\mu_0$  – внешний безразмерный изгибающий момент,  $\varepsilon_0$  – наибольшая из начальных деформаций крайних волокон, принадлежащих верхней или нижней кромке сечения пластины. В данной работе рассматриваются следующие значения внешнего изгибающего момента  $\mu_0 = 0,091; 0,1821; 0,4552$  и  $0,9103$ , что соответствует  $\varepsilon_0 = 0,1\%, 0,2\%, 0,5\%$  и  $1\%$ .

В ходе решения схожей задачи об изгибе балки, однако, без учета упругой составляющей полных деформаций [14], была установлена явная линейная зависимость кривизны балки  $y$  от параметра фазового состава  $q$ . В рассматриваемой задаче о цилиндрическом изгибе, равно как и для задачи о чистом изгибе балки с учетом упругих деформаций [13], зависимость  $y$  от  $q$  в явном виде получить не удалось. Однако характер данной зависимости в случае цилиндрического изгиба носит слабовыраженный нелинейный характер, в то время как для изгиба балки он оставался линейным.

Ниже представлены результаты численного моделирования задачи чистого цилиндрического изгиба пластинки из СПФ в рамках явления ПП.

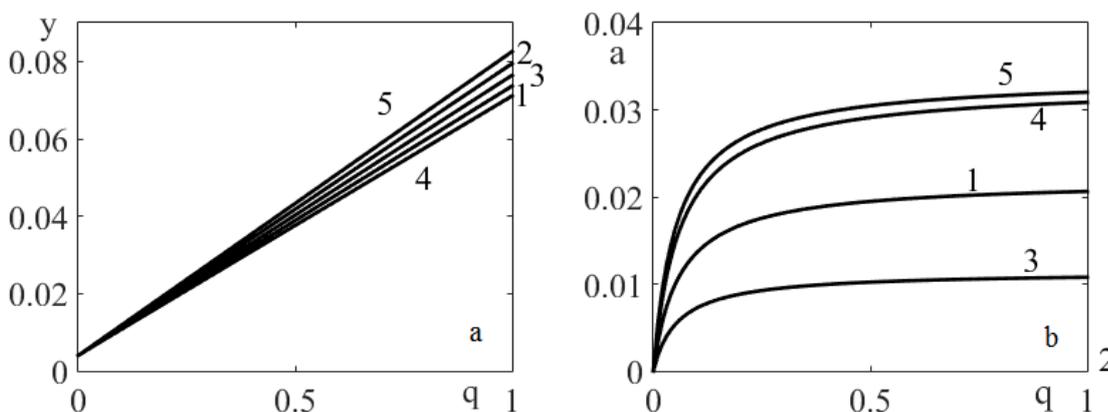


Рис.8. Кривые а)  $y - q$  и б)  $a - q$ .

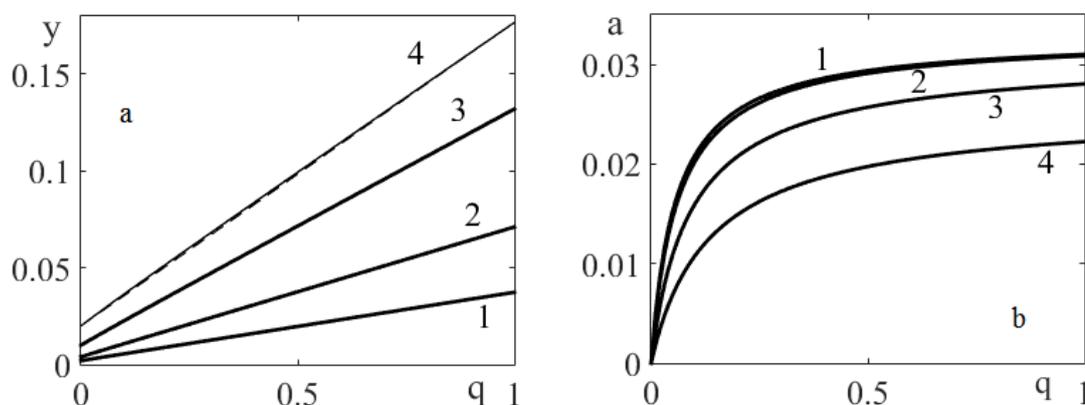
На рис.8а,б показаны зависимости безразмерной кривизны  $y$  и безразмерного положения нейтральной плоскости  $a$  от параметра фазового состава  $q$  соответственно. Кривые 1-3 показывают влияние параметров материала  $\delta_t, \delta_c, \sigma_{0t}, \sigma_{0c}$ , численные значения которых приведены в табл.2, на поведение пластинки из СПФ. Кривые 4 и 5 показывают различие между решениями задач об изгибе пластинки и балки соответственно. При прочих равных условиях податливость балки оказывается ожидаемо выше (15-20%) податливости аналогичной пластинки из СПФ. Кривая 2 соответствует материалу без учета

свойства разносопротивляемости материала пластинки, таким образом положение нейтральной плоскости, рис.8b, совпадает с плоскостью симметрии пластинки.

Таблица 2.

Номер кривой	Вид нагрузки	$\delta$ , доли	$\sigma_0$ , МПа	$e = E_c / E_t$	$\varepsilon_0$
Кривая 1	Растяжение	0,056	169	1	0,2%
	Сжатие	0,0465	169		
Кривая 2	Растяжение	0,056	169	1	0,2%
	Сжатие	0,056	169		
Кривая 3	Растяжение	0,056	169	1	0,2%
	Сжатие	0,056	189		
Кривые 4,5	Растяжение	0,056	169	1	0,2%
	Сжатие	0,0465	189		

Параметры материала из табл.2, соответствующие растяжению получены для плющинки из равноатомного никелида титана. Установлены следующие значения этих параметров  $\sigma_{0t} = 169 \text{ МПа}$  и  $\delta_t = 0.056$ . Коэффициент, на который была уменьшена величина  $\delta_t$  по отношению к  $\delta_c$ , отвечает данным эксперимента, представленным в работе [25]. Испытания образцов из сплава на основе CuAlZnMn показали, что различие в максимальных прогибах прямого термоупругого мартенситного превращения под действием постоянных растягивающих и сжимающих напряжений в 300МПа составляет порядка 17%.

Рис.9. Кривые а)  $y - q$  и б)  $a - q$ .

На рис.9а,б показаны зависимости  $y(q)$  и  $a(q)$  для разносопротивляющегося материала 4 из табл. 2. При этом кривые 1-4 отвечают решению задачи для значений безразмерного изгибающего момента  $\mu_0 = 0,091; 0,1821; 0,4552$  и  $0,9103$  соответственно. Важно отметить, что зависимость  $y(q)$  демонстрирует слабовыраженный нелинейный характер (кривая 4 не совпадает с прямой штриховой линией, соединяющей начальную и конечную точки процесса). Установленная нелинейность сохраняется при увеличении точности численного решения. В ходе решения аналогичной задачи об изгибе балки в одномерной постановке установлен линейный характер данной зависимости. Положение кривых на рис.9б показывает смещение положения нейтральной плоскости пластинки к оси ее симметрии с ростом начального изгибающего момента. Такое положение кривых можно объяснить тем фактом,

что упругая составляющая полных деформаций достигает тех же порядков, что и фазовая составляющая (рис.10b) для больших значений изгибающего момента ( $\mu_0 \approx 0,9103$ ). При этом уменьшается отклонение нейтральной плоскости от плоскости симметрии в виду отсутствия разномодульности.

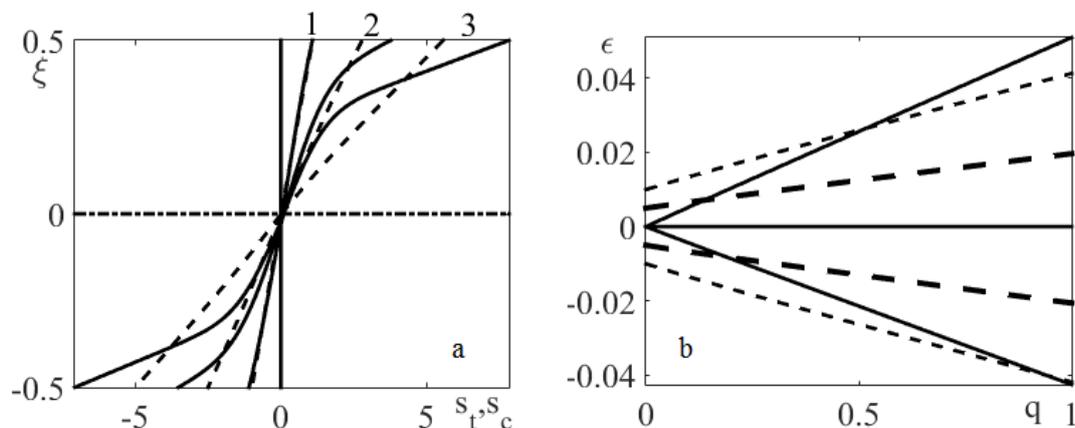


Рис.10. Кривые а)  $\xi - s_t, s_c$  и б)  $\varepsilon - q$ .

На рис.10а показаны эпюры безразмерных нормальных напряжений в сечении пластины. Кривые, отмеченные штриховыми линиями, соответствуют решению задачи в начале фазового превращения,  $q=0$ , сплошные линии соответствуют завершающему этапу превращения  $q=1$ . Группы кривых 1-3 получены для различных значений изгибающего момента  $\mu_0 = 0,1821; 0,4552$  и  $0,9103$  соответственно. Поведение данных кривых показывает, что эпюры нормальных напряжений в начальный момент фазового перехода демонстрируют классический линейный характер, что строго соответствует постановке задачи. На завершающем этапе прямого превращения эпюры напряжений демонстрируют ярко выраженный нелинейный характер поведения до значения напряжений близкого к  $\sigma_{0t}, \sigma_{0c}$ , после чего происходит некоторое насыщение, и дальнейший рост напряжений происходит по закону, близкому к линейному.

На рис.10б представлена история изменения безразмерных упругих – штриховые кривые и фазовых – сплошные кривые, деформаций в крайних волокнах сечения пластины в ходе ПП. Ранее было показано, что изменение безразмерной кривизны пластины с ростом параметра фазового состава носит слабовыраженный нелинейный характер, поэтому аналогичная тенденция в изменении фазовых деформаций в крайнем волокне пластины является ожидаемой. Более жирные штриховые кривые отвечают решению задачи для значения изгибающего момента  $\mu = 0,4552$ , а более тонкие – значению  $\mu = 0,9103$ . При этом все четыре кривые имеют слабовыраженный нелинейный характер, который не исчезает при увеличении точности алгоритма численного решения задачи. Нелинейность изменения упругих деформаций крайних волокон пластинки связана с учетом разносопротивляемости материала и отклонением нейтральной плоскости от плоскости симметрии пластины. При решении задачи без учета разносопротивляемости, рассматриваемые линии превращаются в прямые.

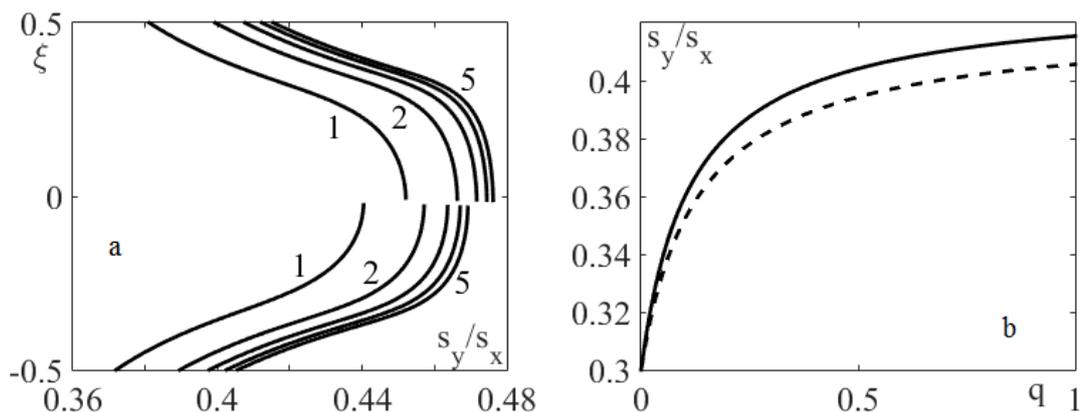


Рис. 11. Кривые а)  $\xi - s_y/s_x$  и б)  $s_y/s_x - q$ .

На рис.11а показано отношение  $s_y/s_x$  по высоте сечения балки для различных моментов ПП:  $q=0.2; 0.4; 0.6; 0.8$  и  $1$ , группы кривых 1-5 соответственно. При этом значение изгибающего момента для всех кривых составляет  $\mu_0 = 0,9103$ . Отметим, что отношение  $s_y/s_x$  значительно отличается от решения задачи о цилиндрическом изгибе пластинки из изотропного материала в классической постановке, где  $s_y/s_x = \nu$ . Это связано с особенностью используемой модели нелинейного деформирования СПФ, для которой для фазовых и структурных деформаций используется соотношение  $s_y/s_x = 0.5$ . Таким образом, справедливо неравенство  $0.3 \leq s_y/s_x \leq 0.5$ , причем большим значениям  $s_x$  соответствуют меньшие значения  $s_y/s_x$ .

На рис.11б показана история изменения отношения  $s_y/s_x$  в крайних волокнах пластины, сплошная кривая соответствует отношению растягивающих напряжений, штриховая – отношению сжимающих напряжений. Обе кривые берут свое начало из точки  $s_y/s_x = 0,3$ , что соответствует решению упругой задачи о цилиндрическом изгибе пластинки из СПФ в полностью аустенитном состоянии.

## ВЫВОДЫ

Получено численное решение задач о чистом и консольном цилиндрическом изгибе пластинки из СПФ для явлений МН и ПП в несвязной постановке. Выполнен учет свойства разносопротивляемости, а также реализована возможность учета свойства разномодульности СПФ в рамках модели нелинейного деформирования этих материалов.

Установлено, что положение нейтральной плоскости зависит только от соотношения упругих модулей СПФ для малых значений изгибающего момента (МН) и для малых значений параметра фазового состава (ПП). Для обоих явлений в неявном виде получена зависимость второй компоненты тензора напряжений от первой  $s_y = s_y(s_x, \nu)$ . В ходе численного решения установлено, что данная зависимость значительно отличается от решения задачи о цилиндрическом изгибе в классической упругой постановке, когда  $s_y = \nu s_x$ . Оказалось, что

отношение  $s_y/s_x$  по высоте сечения пластинки демонстрирует сильно нелинейный характер и лежит в пределах от 0,3 до 0,5. Полученный результат согласуется с теоретическими выкладками, поскольку в рамках строго упругого деформирования  $s_y = \nu s_x$ ,  $\nu = 0.3$ , а в рамках фазово-структурного деформирования  $s_y = 0.5s_x$ .

Для явления ПП получена зависимость кривизны пластинки от параметра фазового состава. В ходе численного решения задачи установлен слабовыраженный нелинейный характер данной зависимости. В результате решения аналогичной задачи о изгибе балки зависимость  $y = y(q)$  была так же получена в неявном виде, однако характер данной зависимости был линейным. Установлено, что нормальные продольные напряжения в сечении пластинки являются функциями параметра фазового состава ( $s_c = s_c(q)$ ,  $s_t = s_t(q)$ ). Таким образом, задачу о цилиндрическом изгибе пластинки из СПФ, ровно, как и задачу об изгибе балки, с учетом разносопротивляемости и с учетом упругих деформаций для режима ПП необходимо рассматривать в рамках связанной постановки.

Установлено, что податливость балки из СПФ при чистом и консольном изгибе выше податливости аналогичной пластинки при цилиндрическом изгибе при прочих равных. Отличие в максимальных прогибах составляет порядка 15%.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ломакин Е.В. *Механика сред с зависящими от вида напряженного состояния свойствами* // Физическая мезомеханика. – 2007. – Т.10. – №5. – С.41-52.
2. Lomakin E.V. *Constitutive models of mechanical behavior of media with stress state dependent material properties* // Adv. Structur. Materials. – 2011. – Vol.7. – Pp.339-350.
3. Liu Yong, Xie Z., Van Humbeeck J., Delaey L. *Asymmetry of stress-strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys* // Acta mater. – 1998. – Vol.46. – No.12. – Pp.4325-4338.
4. Sehitoglu Huseyin, Zhang X.Y., Chumlyakov Y.I., Karaman I., Gall K., Maier H.J. *Observations on stress-induced transformations in NiTi alloys* / IUTAM Symposium on mechanics of martensitic phase transformation in solids. – 2002. – Pp.103-109.
5. Thamburaja P., Anand L. *Polycrystalline shape-memory materials: effect of crystallographic texture* // J. Mech. Phys. Solids. – 2001. – Vol.49. – Pp.709-737.
6. Elibol C., Wagner V.F.-X. *Strain rate effects on the localization of the stress-induced martensitic transformation in pseudoelastic NiTi under uniaxial tension, compression and compression-shear* // Materials Science and Engineering. – 2015. – Vol. 643. – Pp.194-202.
7. Gall K., Sehitoglu H., Anderson R., Karaman I., Chumlyakov Yu.I., Kireeva I.V. *On the mechanical behavior of single crystal NiTi shape memory alloys and related polycrystalline phenomenon* // Materials Science and Engineering. – 2001. – Vol.317. – Pp.85-92.
8. LExcellent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modelling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification*

- under proportional loading and anisothermal conditions // Intern. J. of Solids and Structures. – 2006. – Vol.43. – Pp.613-626.*
9. Javier P.-B., Jose L.B. *Ni-Ti SMA bars behavior under compression // Construction and Building Materials. – 2017. – Vol.155 – Pp.348-362.*
  10. Reza Mirzaeifar, Reginald DesRoches, Arash Yavari, Ken Gall *On superelastic bending of shape memory alloy beams // Intern. J. of Solids and Structures. – 2013. – Vol.50 – Pp.1664-1680.*
  11. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *Thermodynamical constitutive model for shape memory materials. part I. the monolithic shape memory alloy // Intern. J. of Plasticity. – 1996. – Vol.12. – No.6. – Pp.805-842.*
  12. Qidwai M.A., Lagoudas D.C. *On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material // Intern. J. of Plasticity. – 2000. – Vol.16. – No.10. – Pp.1309-1343.*
  13. Сафронов П.А. *Решение задач о мартенситной неупругости и прямом фазовом превращении в балке из сплава с памятью формы с учетом упругих деформаций и разнсопротивляемости этих сплавов // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23. – №1. – С.69-90.*
  14. Сафронов П.А. *Учет разнсопротивляемости сплавов с памятью формы при решении задач о мартенситной неупругости и прямом превращении в балке, находящейся под действием изгибающего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2016. – Т.22. – №1. – С.114-127.*
  15. Мовчан А.А., Мовчан И.А., Сильченко Л.Г. *Микромеханическая модель нелинейного деформирования сплавов с памятью формы при фазовых и структурных превращениях // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2010. – №3. – С.118-130.*
  16. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г., Сильченко Т.Л. *Учет явления мартенситной неупругости при обратном фазовом превращении в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2011. – №2. – С.44-56.*
  17. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Моделирование фазовых и структурных превращений в сплавах с памятью формы, происходящих под действием немонотонно меняющихся напряжений // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2014. – №1. – С.37-53.*
  18. Мишустин И.В., Мовчан А.А. *Аналог теории пластического течения для описания деформации мартенситной неупругости в сплавах с памятью формы // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2015. – №2. – С.78-95.*
  19. Саганов Е.Б. *Решение задачи о прямом мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №3. – С.454-468.*
  20. Машихин А.Б., Мовчан А.А. *Задача о прямом мартенситном превращении в толстостенном цилиндре из сплава с памятью формы // Известия РАН. Механика твердого тела. – 2016. – №3. – С.100-114.*
  21. Саганов Е.Б. *Решение задачи об обратном мартенситном переходе в стержне из сплава с памятью формы, находящемся под действием постоянного крутящего момента // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2014. – Т.20. – №4. – С.663-674.*
  22. Мовчан А.А., Тант Зин Аунг, Мовчан И.А. *Решение задач изгиба балок из сплавов с памятью формы в рамках модели нелинейного деформирования этих*

- материалов при фазовых и структурных превращениях // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2009. – Т.15. – №3. – С.422-436.
23. Мовчан А.А. *Исследование эффектов связности в задачах изгиба балок из сплава с памятью формы* // Прикладная механика и техническая физика. – 1998. – Т.39. – №1. – С.87-97.
24. Мовчан А.А., Казарина С.А. *Материалы с памятью формы как объект механики деформируемого твердого тела: экспериментальные исследования, определяющие соотношения, решение краевых задач* // Физическая мезомеханика. – 2012. – Т.15. – №1. – С.105-116.
25. Sittner P., Novak V. *Anisotropy of Cu-based shape memory alloys in tension/compression thermomechanical loads* // Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol. – 1999. – Vol.121. – No.1. – Pp.48-55.

### REFERENCES

1. Lomakin E.V. *Mechanics of media with stress-state dependent properties*. Physical Mesomechanics, 2007, Vol.10, No.5-6, Pp.255-264.
2. Lomakin E.V. *Constitutive models of mechanical behavior of media with stress state dependent material properties*. Adv. Structur. Materials, 2011, Vol.7, Pp.339-350.
3. Liu Yong, Xie Z., Van Humbeeck J., Delaey L. *Asymmetry of stress-strain curves under tension and compression for NiTi shape memory alloys*. Acta mater. – 1998. – Vol.46. – №12. – P.4325–4338.
4. Sehitoglu Huseyin, Zhang X.Y., Chumlyakov Y.I., Karaman I., Gall K., Maier H.J. *Observations on stress-induced transformations in NiTi alloys*. IUTAM Symposium on mechanics of martensitic phase transformation in solids, 2002, Pp.103-109.
5. Thamburaja P., Anand L. *Polycrystalline shape-memory materials: effect of crystallographic texture*. J. Mech. Phys. Solids, 2001, Vol.49, Pp.709-737.
6. Elibol C., Wagner V.F.-X. *Strain rate effects on the localization of the stress-induced martensitic transformation in pseudoelastic NiTi under uniaxial tension, compression and compression-shear*. Materials Science and Engineering, 2015, Vol.643, Pp.194-202.
7. Gall K., Sehitoglu H., Anderson R., Karaman I., Chumlyakov Yu.I., Kireeva I.V. *On the mechanical behavior of single crystal NiTi shape memory alloys and related polycrystalline phenomenon*. Materials Science and Engineering, 2001, Vol.317, Pp.85-92.
8. Lexcelent Ch., Boubakar M.L., Bouvet Ch., Calloch S. *About modelling the shape memory alloy behaviour based on the phase transformation surface identification under proportional loading and anisothermal conditions*. Intern. J. of Solids and Structures, 2006, Vol.43, Pp.613-626.
9. Javier P.-B., Jose L.B. *Ni-Ti SMA bars behavior under compression*. Construction and Building Materials, 2017, Vol.155, Pp.348-362.
10. Reza Mirzaeifar, Reginald DesRoches, Arash Yavari, Ken Gall *On superelastic bending of shape memory alloy beams*. Intern. J. of Solids and Structures, 2013, Vol.50, Pp.1664-1680.
11. Boyd J.G., Lagoudas D.C. *Thermodynamical constitutive model for shape memory materials. part I. the monolithic shape memory alloy*. Intern. J. of Plasticity, 1996, Vol.12, No.6, Pp.805-842.

12. Qidwai M.A., Lagoudas D.C. *On thermomechanics and transformation surfaces of polycrystalline NiTi shape memory alloy material*. Intern. J. of Plasticity, 2000, Vol.16, No.10, Pp.1309-1343.
13. Safronov P.A. [*Tension-compression asymmetry and elastic strain incorporating in solution the problem of martensitic nonelasticity and direct martensitic transition in beams from shape memory alloy under bend*]. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2017, Vol.23, No.1, Pp.69-90.
14. Safronov P.A. *Uchet raznosoprotivliaemosti splavov s pamiat'iu formy pri reshenii zadach o martensitnoi neuprugosti i priamom prevrashchenii v balke, nakhodiashcheisia pod deistviem izgibaiushchego momenta [Tension-compression asymmetry incorporating in solution the problem of martensitic non-elasticity and direct martensitic transition in beams from shape memory alloy under bend]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2016, Vol.22, No.1, Pp.114-127.
15. Movchan A.A., Movchan I.A., Sil'chenko L.G. *Micromechanical model of nonlinear deformation of shape memory alloys under phase and structure transitions*. Mechanics of Solids, 2010, Vol.45, No.3, Pp.406-416.
16. Movchan A.A., Sil'chenko L.G., Sil'chenko T.L. *Taking account of the martensite inelasticity in the reverse phase transformation in shape memory alloys*. Mechanics of Solids. 2011, Vol.46, No.2, Pp.194-203.
17. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Modeling of phase and structure transformations occurring in shape memory alloys under nonmonotonically varying stresses*. Mechanics of Solids. 2014, Vol.49, No.1, Pp.27-39.
18. Mishustin I.V., Movchan A.A. *Analog of the plastic flow theory for describing martensitic inelastic strains in shape memory alloys*. Mechanics of Solids, 2015, Vol.50, No.2, Pp.176-190.
19. Saganov E.B. *Reshenie zadachi o priamom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamiat'iu formy, nakhodiashchemsia pod deistviem postoiannogo krutiashchego momenta [Solution the problem of direct martensitic transition in rods from shape memory alloy under constant torque]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2014, Vol.20, No.3, Pp.454-468.
20. Mashikhin A.E., Movchan A.A. *Problem of Direct Martensite Transformation in a Thick-Walled Cylinder Made of Shape Memory Alloy*. Mechanics of Solids, 2016, Vol.51, No.3, Pp.321-333.
21. Saganov E.B. *Reshenie zadachi ob obratnom martensitnom perekhode v sterzhne iz splava s pamiat'iu formy, nakhodiashchemsia pod deistviem postoiannogo krutiashchego momenta [Solution the problem of reverse martensitic transition in rod from shape memory alloy under constant torque]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2014, Vol.20, No.4, Pp.663-674.
22. Movchan A.A., Tant Zin Aung, Movchan I.A. *Reshenie zadach izgiba balok iz splavov s pamiat'iu formy v ramkakh modeli nelineinogo deformirovaniia etikh materialov pri fazovykh i strukturnykh prevrashcheniiah. [Solution of beam bending problems for shape memory alloys in framework of non-linear straining model of this material in phase and structure transformation]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2009, Vol.15, No.3, Pp.422-436.
23. Movchan A.A. *Coupling effects in bending problems for beams of a shape memory alloy*. Applied Mechanics and Technical Physics, 1998, Vol.39, No.1, Pp.143-151.

24. Movchan A.A., Kazarina S.A. *Shape memory materials as an object of solid state mechanics: Experimental study, constitutive relations, solution of boundary value problems*. Physical Mesomechanics, 2012, Vol.15, No.3, Pp.214-223.
25. Sittner P., Novak V., *Anisotropy of Cu-based shape memory alloys in tension/compression thermomechanical loads*. Trans. ASME. J. Eng. Mater. Technol., 1999, Vol.121, No.1, Pp.48-55.

*Поступила в редакцию 16 марта 2018 года*

---

Сведения об авторе:

Сафронов Павел Андреевич – асп., Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия; e-mail: [www-midnight-express@yandex.ru](mailto:www-midnight-express@yandex.ru)