УДК 539.3

ОСОБЕННОСТИ ИЗГИБА ТОНКОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ ИЗ МАТЕРИАЛА С НЕИЗМЕНЯЕМЫМ ОБЪЕМОМ

Фирсанов Вик.В.

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

Максимальное значение коэффициента поперечного сжатия (Пуассона) для изотропных линейно упругих материалов ограничено числом 0,5. Если для материала с $\mu = 0,5$ сложить линейные деформации, то получим $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \theta = 0$ как следствие физических соотношений, справедливое для малых деформаций. Это указывает на то, что при деформировании любого тела из такого материала происходит только изменение его формы, а объем остается неизменным. Деформация изменения объема, следовательно, равна нулю, а модуль упругости, характеризующий сопротивление среды изменению объема, стремится к бесконечности. Поэтому в физических соотношениях, разрешенных относительно нормальных напряжений и содержащих произведение этого модуля на деформацию изменения объема θ, вместо этого произведения, которое становится неопределенным в результате умножения нуля на бесконечность, вводится силовая функция S, имеющая размерность напряжения. Материалы, обладающие свойством неизменности объема при деформировании, называются несжимаемыми. К ним относятся каучук, различные виды резин и некоторые другие. Эти материалы, не очень распространенные в технике, благодаря уникальному свойству позволяют проверить некоторые классические задачи механики твердого деформируемого тела, базирующиеся на тех или иных гипотезах. Одной из таких задач является изгиб тонких пластин.

Классическая задача изгиба пластин базируется на гипотезах Кирхгофа: отсутствие линейной деформации в направлении, перпендикулярном основаниям пластинки, поперечных сдвиговых деформаций и нормального напряжения в поперечном направлении. Прогиб пластинки от действия сил, действующих в плоскостях, перпендикулярных основаниям пластики, благодаря одной из гипотез является двумерной функцией, что существенно упрощает задачу несмотря на то, что другие искомые функции перемещений и напряжений линейно зависят от координаты, перпендикулярной основаниям пластинки. Переход к интегральным характеристикам напряжённого состояния с помощью интегрирования по толщине пластинки дифференциальных уравнений равновесия в напряжениях позволяет избавиться от линейной функции и окончательно сформулировать задачу изгиба как двумерную. Статические граничные условия также формулируются относительно интегральных характеристик напряжённого состояния, что приводит к некоторым погрешностям решения вблизи границ пластинки согласно принципу Сен-Венана.

Некоторые классические гипотезы теории изгиба пластин противоречивы по отношению к условию несжимаемости, поэтому от классических гипотез необходимо отказаться и строить задачу, используя другие предположения. Также для некоторых задач в зависимости от вида нагрузки и граничных условий можно получить довольно простые решения, не переходя к интегральным характеристикам напряжённого состояния.

Ключевые слова: несжимаемость; объём; материалы; напряжения; деформации; нагрузка; гипотезы; уравнения; граничные условия

FEATURES OF THE BENDING OF A THIN RECTANGULAR PLATE OF MATERIAL WITH AN UNCHANGED VOLUME

Firsanov Vic.V.

Moscow Aviation Institute (National Research University)

ABSTRACT

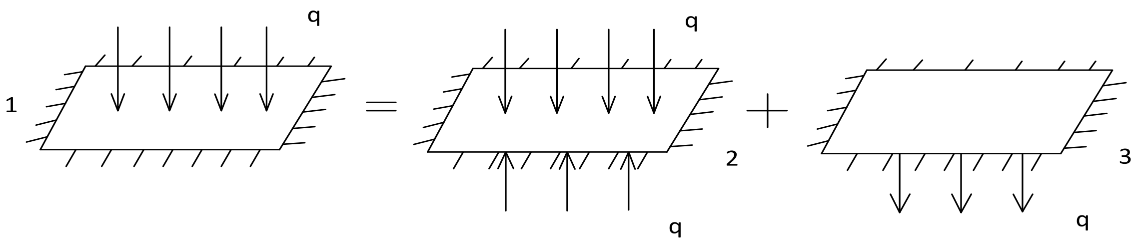
The maximum value of the coefficient of transverse compression (Poisson) for isotropic linearly elastic materials is limited to 0.5. If we add linear deformations for a material with $\mu = 0{,}5$, we obtain $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \theta = 0$ as a consequence of physical relationships, which is valid for small deformation. This indicates that when a body from such a material is deformed, only its shape changes, and the volume remains unchanged. The deformation of the change of volume, therefore, is zero, and the modulus of elasticity characterizing the resistance of the medium to a change of volume tends to infinity. Therefore, in the physical relationships resolved with respect to normal stresses and containing the product of this module by the deformation of the volume change θ, instead of this product, which becomes indeterminate as a result of multiplying zero by infinity, a force function with a dimension of stress is introduced. Materials that have the property of constant volume during deformation are called incompressible. These include rubber, various types of rubbers and some others. These materials, which are not very common in technology, thanks to a unique property, allow us to test some of the classical problems of mechanics of a solid deformable body, based on certain hypotheses. One of these problems is the bending of thin plates.

The classical problem of plate bending is based on Kirchhoff's hypotheses: the absence of linear deformation in the direction perpendicular to the base of the plate, transverse shear deformations and normal stress in the transverse direction. The deflection of the plate from the action of forces acting in planes perpendicular to the bases of the plate due to one of the hypotheses is a two-dimensional function, which significantly simplifies the problem, in spite of the fact that the other desired functions of displacements and stresses linearly depend on the coordinate perpendicular to the base of the plate. The transition to integral characteristics of the state of stress by integrating the differential equations of equilibrium in stresses over the plate thickness allows to get rid of the linear function and finally formulate the bending problem as two-dimensional one. Static boundary conditions are also formulated with respect to the integral characteristics of the state of stress which leads to some errors in the solution near the boundaries of the plate according to the Saint-Venant principle.

Some classical hypotheses of the theory of bending plates are inconsistent with respect to the incompressibility condition, therefore, it is necessary to refuse from classical hypotheses and build the problem using other assumptions. Also, for some problems, depending on the type of load and the boundary conditions, it is possible to obtain fairly simple solutions without going over to the integral characteristics of the state of stress.

Keywords: incompressibility; volume; materials; stress; deformation; hypotheses; equations; border conditions

Рассмотрим прямоугольную пластинку с осями x и y в срединной плоскости и осью z, перпендикулярной основаниям. Покажем, что классическая гипотеза $\varepsilon_z = 0$ для пластинки, жестко закрепленной по контуру, является не гипотезой, а непременным условием, вытекающим из свойства несжимаемости.



Пластинку 1, нагруженную постоянной поперечной нагрузкой q, можно представить как суперпозицию пластинки 2 сжимаемой нагрузкой q, приложенной к верхнему и нижнему основаниям и пластинки 3, изгибаемой нагрузкой q, распределенной по нижнему основанию пластинки. Поскольку в силу неизменности объёма в пластинке 2 не возникают ни перемещения, ни деформации, можно сделать заключение, что деформации пластинок 1 и 3 одинаковые несмотря на то, что изгибающая нагрузка распределена в одном случае по верхнему основанию, а в другом по нижнему. Отсюда следует $\varepsilon_z = 0$, с учетом этого условие несжимаемости имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

Если оставить в силе гипотезы Кирхгофа об отсутствии деформаций сдвига, $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$, откуда, интегрируя эти уравнения выразим u и v через прогиб w и подставим в условие несжимаемости (1), то получим дифференциальное уравнение второго порядка относительно прогиба пластинки

$$\nabla_1^2 w = 0,$$

где ∇_1^2 – плоский оператор Лапласа.

Однородное уравнение и однородные граничные условия на функцию w приводят к тривиальному решению. Для несжимаемых материалов гипотеза об отсутствии сдвигов γ_{xz} и γ_{yz} неприемлема.

Удовлетворим условию (1), выразив перемещения u и v через потенциальную функцию $\psi(x, y, z)$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \; v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \qquad (2)$$

Используя (2), запишем физические соотношения для несжимаемой пластинки

$$\sigma_x = 2G\frac{\partial u}{\partial x} + S = 2G\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + S$$

$$\sigma_y = 2G\frac{\partial v}{\partial y} + S = -2G\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} + S$$

$$\sigma_z = 2G\frac{\partial w}{\partial z} + S = S \qquad (3)$$

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = G\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\right)$$

$$\tau_{xz} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = G\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{yz} = G(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}) = G(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}),$$

где величина $S(x,y,z)$ равна одной трети от суммы нормальных напряжений.

Для получения разрешающих уравнений в “перемещениях” исключим из трех уравнений равновесия напряжения с помощью соотношений (3). Термин в “перемещениях” условен, так как за основные неизвестные принимаем прогиб w, функцию перемещений ψ и объемное напряжение S, которое не может быть выражено через деформацию изменения объема. В результате получим

$$\begin{aligned} &G\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\psi + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \\ &G\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi - \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \\ &G\nabla_1^2 w + \frac{\partial S}{\partial z} = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где ∇^2 – пространственный, а ∇_1^2 – плоский операторы Лапласа.

Последнее уравнение системы (4) продифференцируем по z и получим

$$\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = 0,$$

откуда $S = S_0(x,y)z + S_1(x,y)$.

S_0 и S_1 определим из граничных условий на верхнем и нижнем основаниях пластинки

$$z = \frac{h}{2} \quad \sigma_z = -q, \quad z = -\frac{h}{2} \quad \sigma_z = 0,$$

откуда $S_0 = -\frac{q}{h}$, $S_1 = -\frac{q}{2}$, $S = -\frac{q}{h}(z + \frac{h}{2})$.

S_0 и S_1 – функции координат плоскости, если q является функцией этих же координат. Если $q = const$, то S_0 и S_1 тоже константы, а объемное напряжение S зависит линейно только от координаты z.

Если q постоянна, то разрешающие уравнения (4) перепишем в таком виде

$$\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2\psi=0, \ \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2\psi = 0; \ \nabla_1^2 w = \frac{q}{Gh}. \tag{5}$$

Если нагрузка переменна, то в правые части первых двух уравнений следует добавить $\frac{1}{G}(\frac{1}{2} + \frac{z}{h})\frac{\partial q}{\partial x}$ и $\frac{1}{G}(\frac{1}{2} + \frac{z}{h})\frac{\partial q}{\partial y}$ соответственно.

Присутствие линейной функции по z в слагаемых, связанных с переменной нагрузкой, приводит ко вполне обоснованному предположению, что функция перемещения ψ, а, следовательно и перемещения u и v следует определить с точностью до линейной функции по поперечной к основаниям пластинки координате. Это согласуется с классической теорией Кирхгофа, где перемещения u и v линейны по z, что следует из гипотезы отсутствия сдвигов γ_{xz} и γ_{yz}. В этом случае $\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0$ и пространственный оператор Лапласа ∇^2 становится плоским, и система уравнений (5) приобретает вид

$$\nabla_1^2 w = \frac{q}{Gh} \qquad (6)$$
$$\nabla_1^2 \psi = 0 .$$

Константа интегрирования двух первых уравнений (5) принята равной нулю.

Уравнения системы (6) независимы и легко интегрируются методом разделения переменных. В результате будем иметь 8 констант интегрирования для удовлетворения всех граничных условий задачи.

На защемлённой по контуру пластинке реализуются кинематические граничные условия: при $x = 0$, a $w = 0$, $u = 0$; при $y = 0$, b $w = 0$, $v = 0$.

Поскольку u и v выражены через функцию ψ, то на эту функцию имеем однородное дифференциальное уравнение и однородные граничные условия, что приводит к тривиальному решению $\psi = 0$ и $u = v = 0$ по всей пластинке, включая ее контур. На прогиб имеем также однородные граничные условия, но решение дифференциального уравнения содержит частный интеграл, связанный с внешней постоянной нагрузкой q. 4 константы интегрирования определим из четырех оставшихся граничных условий на функцию прогиба.

Представим прогиб закрепленной по контуру пластинки с размерами a и b по x и по y и толщиной h в виде двойного тригонометрического ряда

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn} \,\mathrm{Sin}\frac{m\pi x}{a}\mathrm{Sin}\frac{n\pi y}{b},$$

в результате чего все условия на контуре будут удовлетворены. Коэффициенты A_{mn} определим после подстановки w в первое уравнение системы (6). После известных операций и использования свойства ортогональности тригонометрических функций, получим формулы для определения коэффициентов двойного ряда и функции прогиба

$$A_{mn} = \frac{16q}{Gh\pi^4}\frac{1}{(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2})mn},$$

$$w = \frac{16q}{Gh\pi^4}\sum_1^{\infty}\sum_1^{\infty}\frac{1}{mn\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\mathrm{Sin}\frac{m\pi x}{a}\mathrm{Sin}\frac{n\pi y}{b}.$$

Решение для остальных искомых неизвестных

$$u = v = 0;$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = S = -\frac{q}{h}\left(z+\frac{h}{2}\right);$$

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) = 0;$$

$$\tau_{zx} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{16q}{\pi^3 ha}\sum_1^{\infty}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\mathrm{Cos}\frac{m\pi x}{a}\mathrm{Sin}\frac{n\pi y}{b};$$

$$\tau_{zy} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) = \frac{16q}{\pi^3 bh}\sum_1^{\infty}\sum_1^{\infty}\frac{1}{m\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\mathrm{Sin}\frac{m\pi x}{a}\mathrm{Cos}\frac{n\pi y}{b}.$$

Для рассматриваемой задачи из перемещений остается прогиб, перемещения u и v отсутствуют не только на кромках, но и по всей пластинке. Связанные с ними касательное напряжение τ_{xy} также равно нулю. В классической теории изгиба пластин представление прогиба в виде двойного тригонометрического ряда используется в случае шарнирного опирания пластинки по контуру, а в рассматриваемой задаче при реализации жёсткого защемления по контуру.

Касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} постоянны по толщине и вследствие этого основания пластинки не свободны от касательной нагрузки, что искажает исходную задачу. Но при этом в силу постоянства по толщине, появившаяся на основаниях пластинки нагрузка никоим образом не влияет на изгиб пластинки и, соответственно, на прогиб.

Если нагрузка q переменна по x и y, то все уравнения системы (6) будут неоднородными. Зададим q в виде

$$q = q_0 x,$$

где $q_0 = const$.

Тогда система (5) преобразуется к виду

$$\nabla^2 w = \frac{q_0 x}{Gh};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 \psi = \frac{1}{G}\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)q_0;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 \psi = 0.$$

Из второго уравнения следует

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{G}\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)q_0 y + f\left(x\right).$$

Подставляя в третье уравнение и полагая произвольную функцию интегрирования $f\left(x\right)=0$, получим тождество.

Разрешающие уравнения рассматриваемой задачи

$$\nabla^2 w = \frac{q_0 x}{Gh};$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{G}\left(\frac{1}{2}+\frac{z}{h}\right)q_0 y.$$

По виду правой части второго уравнения определяем функцию ψ как линейно зависящую от координаты z

$$\psi=\psi_0\left(x,y\right)+\psi_1\left(x,y\right)z.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим два уравнения на функции ψ_0 и ψ_1

$$\nabla^2\psi_0 = \frac{1}{2G}q_0 y,\ \nabla^2\psi_1 = \frac{1}{Gh}q_0 y.$$

Функция ψ_0 не соответствует задаче изгиба, относится к плоской задаче, а поскольку плоское и изгибное состояния ортогональны, то оставляем функцию ψ_1 как соответствующую задаче изгиба. И для рассматриваемой задачи разрешающие уравнения независимы друг от друга

$$\nabla^2 w = \frac{q_0 x}{Gh} \tag{7}$$

$$\nabla^2 \psi_1 = \frac{q_0 y}{Gh}.$$

Будем искать решения этих уравнений в виде двойных тригонометрических рядов

$$w = \sum_1^\infty \sum_1^\infty A_{mn} \operatorname{Sin} \lambda_m x \operatorname{Sin} \beta_n y \tag{8}$$

$$\psi_1 = \sum_1^\infty \sum_1^\infty B_{mn} \operatorname{Sin} \lambda_m x \operatorname{Sin} \beta_n y.$$

При этом кинематические граничные условия жесткого защемления по контуру

$$x = 0, a \quad u = w = 0$$

$$y = 0, b \quad v = w = 0$$

тождественно удовлетворяются.

Искомые константы A_{mn} и B_{mn} найдем после подстановки рядов (8) в разрешающие уравнения (7). Проводя стандартные процедуры и используя свойство ортогональности тригонометрических функций, получим

$$A_{mn} = \frac{16 q_0 a}{Gh\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) mn};$$

$$B_{mn} = \frac{16 q_0 b}{Gh\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) mn}.$$

В результате получим формулы для определения перемещений

$$w = \frac{16 q_0 a}{Gh\pi^4} \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{1}{mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{Sin} \frac{n\pi y}{b}$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{16 q_0 z}{Gh\pi^3} \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{1}{m \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{Cos} \frac{n\pi y}{b}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{16 q_0 b z}{Gha\pi^3} \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{1}{n \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \operatorname{Cos} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{Sin} \frac{n\pi y}{b}$$

и некоторых напряжений

$$\sigma_x = \frac{32 q_0 z}{\pi^2 a h} \sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{1}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \operatorname{Sin} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{Cos} \frac{n\pi y}{b} - \frac{q_0 x}{h} \left(z + \frac{h}{2} \right)$$

$$\sigma_z = -\frac{q_0 x}{h} \left(z + \frac{h}{2} \right)$$

$$\tau_{xy}=\frac{16q_0z}{h\pi^2}\left[\frac{b}{a^2}\sum_1^{\infty}\sum_1^{\infty}\frac{1}{\frac{n}{m}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\mathrm{Sin}\frac{m\pi x}{a}\mathrm{Sin}\frac{n\pi y}{b}-\frac{1}{b}\sum_1^{\infty}\sum_1^{\infty}\frac{1}{\frac{m}{n}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\mathrm{Sin}\frac{m\pi x}{a}\mathrm{Sin}\frac{n\pi y}{b}\right]$$

$$\tau_{zx}=\frac{16q_0}{h\pi^3}\left[\sum_1^{\infty}\sum_1^{\infty}\frac{1}{n\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\mathrm{Cos}\frac{m\pi x}{a}\mathrm{Sin}\frac{n\pi y}{b}+\sum_1^{\infty}\sum_1^{\infty}\frac{1}{m\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}\mathrm{Sin}\frac{m\pi x}{a}\mathrm{Cos}\frac{n\pi y}{b}\right].$$

Обращает на себя внимание результат, полученный для касательных напряжений τ_{xy}: на кромках защемленной пластинки эти напряжения, обращаются в ноль. Связано это, по видимому, с тем, что на каждой кромке пластинки выполняются два условия, одно по прогибу на каждой кромке, а другое по перемещению u на кромках, параллельных оси y и по перемещению v на кромках, параллельных оси x. Удовлетворить условию отсутствия на каждой кромке перемещений u, v и w невозможно в рамках рассматриваемой задачи. В этом случае мы имеем защемление с проскальзыванием пластинки вдоль граничных кромок.

Заключение.

1. Как было отмечено ранее, отсутствие поперечных деформаций в изгибаемой поперечной постоянной нагрузкой пластинке, жёстко защемлённой по контуру, является непременным условием, вытекающим из свойства несжимаемости материала. В такой пластинке перемещения в плоскости оснований получаются равными нулю, равны нулю также связанные с этими перемещениями касательные напряжения. Отличен от нуля прогиб, касательные напряжения, уравновешивающие в поперечном к основаниям пластинки направлении действующую нагрузку, и нормальные напряжения.
2. Если пластинка защемлена по контуру, а действующая на её основаниях нагрузка переменна, то отсутствие поперечных деформаций, которое принято при решении этой задачи, является гипотезой, как и в классической теории. В обоих задачах решение легко строится с помощью метода двойных тригонометрических рядов. Все искомые функции, как напряжения, так и деформации, в задаче с переменной нагрузкой отличны от нуля.
3. Для других комбинаций граничных условий, когда на кромках реализуются как кинематические, так и статические граничные условия, от гипотезы отсутствия поперечных линейных деформаций необходимо отказаться и использовать другие допущения для получения непротиворечивых решений для искомых функций.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев В.В., Лурье С.А. *К проблеме построения неклассических теорий пластин* // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. – 1990. – С.158-167
2. Фирсанов В.В. *Исследование напряжённо-деформированного состояния прямоугольных пластинок на основе неклассической теории* // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2016. – №6. – С.35-43.

3. Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim *A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells* // Composite Structures. – 2015. – Vol.128. – Pp.70-86.
4. Durban D., Givoli D., Simmonds J.G. (Eds.) *Advances in the Mechanics of Plates and Shells: The Avinoam Libai Anniversary Volume.* – Kluwer Academic Publishers, 2001. – 376 p. – (Mechanics and Its Applications, Vol.88).
5. Gorelik B.M., Fel'dman G.I., Maiskaya M.A. *Variability of Poisson's ratio in investigating the state of stress of rubber parts* // Mechanics of Composite Materials. – 1967. – Vol.3. – Iss.4. – Pp.502-504.
6. Pobedrya B.E. *Equations of state of viscoelastic isotropic media* // Mechanics of Composite Materials. – 1967. – Vol.3. – Iss.4. – Pp.429-432.
7. Bigoni D. (Ed.) *Extremely Deformable Structures*. – Springer, 2015. – VII, 297 p. (International Centre for Mechanical Sciences Courses and Lectures Vol.562).
8. Елисеев В.В. *Механика деформируемого твердого тела*. – С-Пб.: Санкт-Петербург, 2006. – 231 с.

REFERENCES

1. Vasil'yev V.V., Lur'ye S.A. *K probleme postroyeniya neklassicheskikh teoriy plastin [On the problem of constructing non-classical plate theories]*. Izv. AN SSSR. Mekhanika tvordogo tela. 1990. Pp.158-167
2. Firsanov V.V. *Issledovaniye napryazhonno-deformirovannogo sostoyaniya pryamougol'nykh plastinok na osnove neklassicheskoy teorii [Investigation of stress-strain state of rectangular plates on the basis of neoclassical theory]*. Problemy mashinostroyeniya i nadozhnosti mashin. 2016. No.6. Pp.35-43.
3. Huu-Tai Thai, Seung-Eock Kim. A review of theories for the modeling and analysis of functionally graded plates and shells. Composite Structures. – 2015. – Vol.128. – Pp.70-86.
4. Durban D., Givoli D., Simmonds J.G. (Eds.) *Advances in the Mechanics of Plates and Shells: The Avinoam Libai Anniversary Volume.* Kluwer Academic Publishers. 2001. 376 p. (Mechanics and Its Applications, Vol.88).
5. Gorelik B.M., Fel'dman G.I., Maiskaya M.A. *Variability of Poisson's ratio in investigating the state of stress of rubber parts.* Mechanics of Composite Materials. 1967. Vol.3. Iss.4. Pp.502-504.
6. Pobedrya B.E. *Equations of state of viscoelastic isotropic media.* Mechanics of Composite Materials. 1967. Vol.3. Iss.4. Pp.429-432.
7. Bigoni D. (Ed.) *Extremely Deformable Structures*. Springer. 2015. VII. 297 p. (International Centre for Mechanical Sciences Courses and Lectures Vol.562).
8. Yeliseyev V.V. *Mekhanika deformiruyemogo tverdogo tela [Mechanics of deformable solids]*. Sankt-Petersburg. 2006. 231 p.

Поступила в редакцию 19 июля 2018 года.

Сведения об авторе:

Фирсанов Виктор Васильевич – к.т.н., доц., доц. Кафедры «Проектирование и прочность авиационно-ракетных и космических изделий», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Россия; e-mail: kaf603@mai.ru