

УДК 532.517

К РЕОЛОГИИ СУСПЕНЗИЙ: МАСШТАБНЫЙ ЭФФЕКТ В МЕЛКОДИСПЕРСНЫХ СУСПЕНЗИЯХ ЗА СЧЕТ УЧЕТА ТРЕНИЯ МЕЖДУ ЧАСТИЦАМИ И ЖИДКОСТЬЮ*

Белов П.А., Лурье С.А., Лыкосова Е.В.

ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия

АННОТАЦИЯ

В работе исследованы модели вязкости суспензий на основе «классического» осреднения вязкости по Рейссу и с учетом динамического трения жидкости о частицу. Установлено, что учет трения определяет масштабный эффект, проявляющийся в том, что вязкости и жидкости, и «сухих» частиц в композиции имеют большие величины, чем вне композиции. Для мелкодисперсных суспензий при ненулевом коэффициенте динамического трения характерная толщина погранслоя соизмерима с расстоянием между частицами, и масштабный эффект вносит существенную поправку в вязкость суспензии по сравнению с «классическим» осреднением по Рейссу. По аналогии с гипотезами осреднения модулей упругости в теории композитов, в гидродинамике суспензий предложены соответствующие гипотезы осреднения динамических вязкостей. Сформулированы гипотезы эффективного включения, эффективной жидкости, эффективной объемной доли и гипотеза трех фаз, позволяющие учесть масштабные эффекты первого порядка в гидродинамике Навье-Стокса, связанные с трением жидкости и частиц. Формулировки всех перечисленных гипотез являются различными формами одного и того же решения для уравнений Навье-Стокса с краевыми условиями, учитывающими трение жидкости о частицы. Установлено появление специфического для суспензий турбулентного течения, связанного с трением на границе частицы с жидкостью (неидеальным проскальзыванием жидкости). Размер вихрей этого течения напрямую связан с характерной толщиной погранслоя и, соответственно, с коэффициентом динамического трения. Этот факт позволяет предложить новую методику определения коэффициента динамического трения по известной вязкости суспензии и характерной толщине погранслоя.

Ключевые слова: гидродинамика суспензий; реология суспензий; модели осреднения вязкости суспензий; динамическое трение; масштабный эффект

TO THE RHEOLOGY OF SUSPENSIONS: A SCALE EFFECT IN FINE-FILLED SUSPENSIONS FOR THE FRICTION ACCOUNT BETWEEN PARTICLES AND LIQUID

Belov P.A., Lurie S.A., Lykosova E.D.

Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

* Работа в части построения модели выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ (проект №18-01-00553), в части анализа модели работа выполнена по Государственному заданию ИПРИМ РАН номер гос.регистрации АААА-А17-117032010137-0.

ABSTRACT

In the paper, we investigate viscosity models of suspensions based on the "classical" Reiss averaging of the viscosity and taking into account the dynamic friction of the liquid on the particle. It was found that the allowance of friction determines the scale effect, which manifests itself in the fact that viscosities of both liquid and "dry" particles in the composition have larger values than outside of the composition. For finely dispersed suspensions with a non-zero coefficient of dynamic friction, the characteristic thickness of the boundary layer is commensurable with the distance between the particles, and the scale effect makes a significant correction to the viscosity of the suspension in comparison with the "classical" Reiss averaging. By analogy with the hypotheses of averaging the elastic moduli in the theory of composites, in the hydrodynamics of suspensions, the corresponding hypotheses for averaging dynamic viscosities are proposed. The hypotheses of effective inclusion, effective liquid, effective volume fraction and hypothesis of three phases, allowing to take into account scale effects of the first order in the Navier-Stokes hydrodynamics associated with friction of a liquid and particles, are formulated. The statements of all the above hypotheses are different forms of the same solution for the Navier-Stokes equations with boundary conditions that take into account the friction of the liquid on the particles. The appearance of a turbulent flow specific for suspensions associated with friction at the boundary of a particle with a liquid (nonideal slip of a liquid) is established. The size of the vortices of this flow is directly related to the characteristic thickness of the boundary layer and, correspondingly, to the coefficient of dynamic friction. This fact allows us to propose a new method for determining the coefficient of dynamic friction based on the known viscosity of the suspension and the characteristic thickness of the boundary layer.

Keywords: hydrodynamics of suspensions; rheology of suspensions; models for averaging the viscosity of suspensions; dynamic friction; scale effect

ВВЕДЕНИЕ

Проблема моделирования процесса пропитывания преформ при изготовлении композиционных материалов заставляет по-новому взглянуть на такие, на первый взгляд, изученные проблемы, как моделирование вязкости пропитывающих жидкостей. При этом, как отмечается в обзоре [1], большинство моделей имеют эмпирический и полуэмпирический характер, более того, в нем прямо утверждается: «анализ литературы показывает, что примерно с одинаковой точностью можно описать одним и тем же реологическим уравнением различные по физико-химической природе системы, а одну и ту же дисперсную систему – принципиально разными реологическими уравнениями. В результате можно выбрать подходящее реологическое уравнение для описания любого эксперимента, не задумываясь о реальном механизме течения. Такое положение дел вполне приемлемо для инженерных приложений, но его нельзя считать нормальным с точки зрения фундаментальной науки.»

Теоретическое моделирование вязкости суспензий берет своё начало, как известно, с классической работы А.Эйнштейна [2]. В данной работе для моделирования свойств суспензий развивается так называемый микрореологический подход [3], в соответствии с которым суспензия рассматривается как мелкодисперсный композит с жидкой матрицей. Проблема оценки определяющих уравнений для суспензий, зависимость их вязкости от объемного содержания включений представляется весьма актуальной проблемой, рассматриваемой в достаточно большом числе исследований. Этим исследованиям посвящена работа [4]. Однако, как правило, большинство

подобных исследований носит экспериментальный характер. Экспериментальное исследование суспензий с углеродными нанотрубками проводилось в работе [5]. В недавней работе [6] проводилось экспериментальное исследование суспензий с жесткими волокнами, исследовалось влияние включений на вязкость, а также эффекты трения, связанные с наличием включений. Обнаружены нелинейные зависимости вязкости от объемных содержаний включений. Тем не менее, к настоящему времени фактически отсутствуют модели учета локальных эффектов, связанных с учетом поворота частиц при течении, и эффектов трения.

Целью данной работы является моделирование масштабного эффекта, имеющего место при учете трения жидкости о частицу. Обычно, масштабные эффекты появляются в различных градиентных теориях, как эффекты второго порядка относительно характерной длины, свойственной материалу среды, а не габариту тела [7-9]. Как известно [10], градиентные теории обладают тем недостатком, что приводят к повышению дифференциального порядка разрешающей системы уравнений и вызывают дополнительные математические сложности при построении решения и дальнейшего параметрического анализа. Трение, как частный случай адгезионных взаимодействий [11-14], не приводит к повышению дифференциального порядка разрешающих уравнений, а лишь изменяет формулировку краевой задачи. Более того, с точки зрения величины масштабных эффектов, поправка к классическому решению, в отличие от градиентных поправок, имеет эффект не второго, а первого порядка [15]. Таким образом, количественно, масштабные эффекты, связанные с адгезионными взаимодействиями, в том числе и с трением, могут давать достаточно большой вклад в поправку к классическому решению, что и является предметом исследования данной статьи.

1. МОДЕЛЬ ЯЧЕЙКИ ПЕРИОДИЧНОСТИ

Рассмотрим в плоской постановке задачу течения жидкости в суспензии, содержащей круглые, абсолютно твердые, частицы в зазоре вискозиметра, шириной h при перепаде скоростей V . Введем следующие обозначения: η_l – динамическая вязкость жидкости, $2H$ – среднестатистическое расстояние между частицами, r – радиус частиц.

Введем следующие гипотезы (предположения):

1. Частицы расположены в суспензии равномерно, в углах квадратной сетки со стороной $2H$. Отсюда следует, что относительная доля частиц φ может быть вычислена с помощью соотношения $\varphi = (\pi r^2)/(4H^2)$. Соответственно, расстояние между частицами $2H$ может быть вычислено через их относительную долю и радиус $2H = r\sqrt{\pi/\varphi}$.

2. Ячейка периодичности, содержащая изолированную частицу, окруженную жидкостью, заменяется на эквивалентную слоистую ячейку, как показано на рис.1.

Толщина «слоя/струи частиц» $2h_p = \pi r^2 / 2H = r\pi\sqrt{\varphi/\pi} = \varphi(r\sqrt{\pi/\varphi})$,
толщина h_l двух симметрично расположенных струй жидкости
 $2h_l = 2H - 2h_p = (1 - \varphi)(r\sqrt{\pi/\varphi})$.

Заметим, что такая схематизация применима и к эмульсиям при замене «струи частиц» струей другой жидкости.

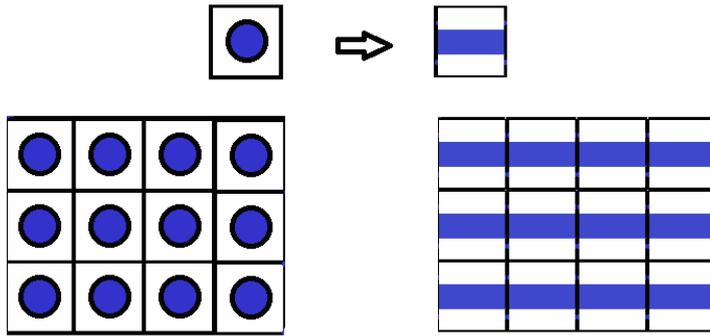


Рис.1. Схема замены дисперсной ячейки периодичности на слоистую.

3. В дальнейшем рассматривается квази-стационарная задача, распределение скоростей на ячейке периодичности построено в предположении линейности и непрерывности профиля скоростей (следствие классических уравнение гидродинамики для аксиальных течений).

Введем следующие определения.

V – относительная скорость верхней и нижней граней ячейки;

$2(h_l + h_p)$ – расстояние между верхней и нижней гранями ячейки;

τ – касательное напряжение, действующее на верхней и нижней гранях ячейки;

η – вязкость суспензии;

V_p – относительная скорость верхнего и нижнего слоёв жидкости в ячейке, обусловленная вращением частицы, «размазанной» в слой, толщиной $2h_p$.

Другими словами: V_p – разность линейных скоростей верхней и нижней точек частицы, определяющая градиент линейной скорости на частице;

V_l – относительная скорость верхнего и нижнего слоёв жидкости в ячейке (градиент линейной скорости в жидкости), которая тоже считается постоянной;

η_p – вязкость слоя, заменяющего частицу частицы;

η_l – вязкость слоя жидкости в периодической системе.

Сформулируем физические соотношения для рассматриваемой периодической системы в скоростях деформации и напряжениях сдвига. Средняя скорость деформации сдвига в ячейке определяется выражением $V / [2(h_l + h_p)]$ и, следовательно, средние касательные напряжения находятся в виде

$$\tau = \eta \frac{V}{2(h_l + h_p)} \quad (1)$$

Исходя из определения градиента скорости на частице, формально можно определить и вязкость «сухой» частицы (предельный случай суспензии, в которой объемная доля частиц стремится к единице)

$$\tau = \eta_p \frac{V_p}{2h_p} \quad (2)$$

По определению, касательные напряжения в жидкости определяется соотношением

$$\tau = \eta_l \frac{V_l}{2h_l} \quad (3)$$

Относительная скорость верхней и нижней граней ячейки периодичности суспензии выражается суммой относительных скоростей на частицах и в промежутках между ними

$$V = V_l + V_p \quad (4)$$

Следовательно, с учетом соотношений (1)-(4) получим, что эффективная вязкость представленной композитной структуры, также как и эффективный модуль сдвига в слоистой системе определяется в первом соотношениями Рейсса

$$\frac{1}{\eta} = \frac{(1-\phi)}{\eta_l} + \frac{\phi}{\eta_p} \quad (5)$$

$$\text{или } \eta = \frac{\eta_p \eta_l}{[\eta_p(1-\phi) + \eta_l \phi]}$$

Заметим, что предложенная простая модель течения суспензии в определенной степени аналогична деформирования при сдвиге слоистой среды.

Если использовать более точное осреднение по методу Мори-Танака [18], то, вместо (5), можно записать

$$\eta = \eta_l \frac{\eta_l(1-\phi) + \eta_p(1+\phi)}{\eta_l(1+\phi) + \eta_p(1-\phi)} \quad (6)$$

Соотношение (6) дает более полный учет концентрации для задачи антиплоского сдвига композита с круглыми включениями.

2. СТРУКТУРА НЕПРЕРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ СУСПЕНЗИИ В РАМКАХ КЛАССИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

Так как распределение скоростей на ячейке периодичности построено в предположении линейности и непрерывности профиля скоростей, для каждого из трех слоев/струй решение уравнений Навье-Стокса дает линейный профиль скорости

$$v(y) = \begin{cases} a_1(y - h_l/2) + a_2 & 0 \leq y \leq h_l \\ b_1(y - h_l - h_p) + b_2 & h_l \leq y \leq (h_l + 2h_p) \\ c_1(y - 3h_l/2 - 2h_p) + c_2 & (h_l + 2h_p) \leq y \leq 2(h_l + h_p) \end{cases} \quad (7)$$

Здесь $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ - произвольные постоянные интегрирования.

Сформулируем граничные условия и условия контакта струй

$$\begin{cases} v(0) = 0 \\ \left\{ \begin{array}{l} v(h_l - 0) = v(h_l + 0) \\ \eta_l v'(h_l - 0) = \eta_p v'(h_l + 0) \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} v(h_l + 2h_p - 0) = v(h_l + 2h_p + 0) \\ \eta_p v'(h_l + 2h_p - 0) = \eta_l v'(h_l + 2h_p + 0) \end{array} \right. \\ v(2h_l + 2h_p) = V \end{cases} \quad (8)$$

Подставляя (7) в (8) получим неоднородную линейную систему шести алгебраических уравнений относительно шести искомых постоянных интегрирования

$$\begin{cases} -a_1 h_l / 2 + a_2 = 0 \\ \begin{cases} a_1 h_l / 2 + a_2 = -b_1 h_p + b_2 \\ \eta_l a_1 = \eta_p b_1 \end{cases} \\ \begin{cases} b_1 h_p + b_2 = -c_1 h_l / 2 + c_2 \\ \eta_p b_1 = \eta_l c_1 \end{cases} \\ c_1 h_l / 2 + c_2 = V \end{cases} \quad (9)$$

Решая систему (9), найдем

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{V}{2h_l} \frac{\frac{h_l}{\eta_l}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l}\right)} & b_1 &= \frac{V}{2h_p} \frac{\frac{h_p}{\eta_p}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l}\right)} & c_1 &= \frac{V}{2h_l} \frac{\frac{h_l}{\eta_l}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l}\right)} \\ a_2 &= \frac{V}{4} \frac{\frac{h_l}{\eta_l}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l}\right)} & b_2 &= \frac{V}{2} & c_2 &= V - \frac{V}{4} \frac{\frac{h_l}{\eta_l}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l}\right)} \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя постоянные интегрирования из (10) в (7), окончательно получим следующие соотношения, определяющие профиль скоростей

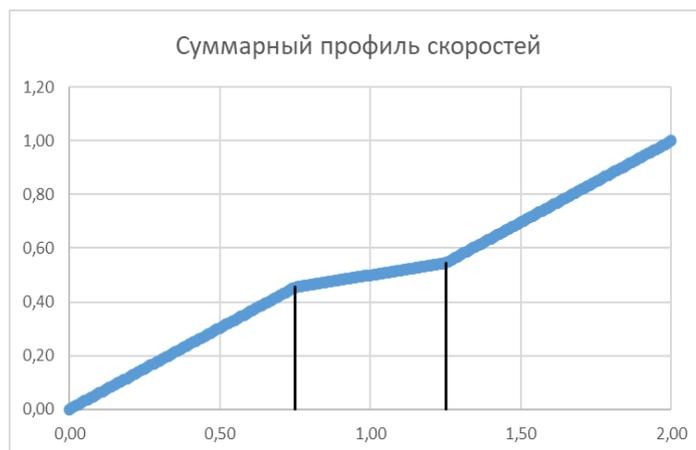
$$v(y) = V \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{\frac{h_l}{\eta_l}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l}\right)} \frac{y}{h_l} & 0 \leq y \leq h_l \\ \frac{1}{2} \frac{\frac{h_p}{\eta_p}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l}\right)} \frac{(y - h_l - h_p)}{h_p} + \frac{1}{2} & h_l \leq y \leq (h_l + 2h_p) \\ \frac{1}{2} \frac{\frac{h_l}{\eta_l}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l}\right)} \frac{(y - 2h_l - 2h_p)}{h_l} + 1 & (h_l + 2h_p) \leq y \leq 2(h_l + h_p) \end{cases} \quad (11)$$

Профиль скоростей, соответствующий решению (11) приведен на рис.2.

Скорость нормирована на суммарную относительную скорость ячейки периодичности V , поперечная координата нормирована на $(h_l + h_p)$.

Принимаются следующие значения параметров суспензии: $h_l / h_p = 3$, $\eta_p / \eta_l = 30$.

Можно убедиться в том, что из решения (11) следует классическое осреднение по Рейссу (5).

Рис.2. Суммарный профиль скоростей, нормированный на V .

3. УЧЕТ ТРЕНИЯ МЕЖДУ ЧАСТИЦАМИ И ЖИДКОСТЬЮ В СУСПЕНЗИИ

Граничные условия для классических уравнений гидродинамики представляют собой пару альтернативных граничных условий.

Первое условие задает на поверхности контакта относительную скорость жидкости и твердого тела. Обычно это условие формулируют как условие «прилипания» жидкости к телу, при котором относительная скорость V_{lp} жидкости и тела на границе контакта $y = h$ равна нулю

$$V_{lp}(h) = 0 \quad (12)$$

Граничное условие (12) является кинематическим.

Второе (силовое), альтернативное, граничное условие задает на поверхности контакта силу/напряжение взаимодействия жидкости и тела. Обычно это условие формулируют как статическое условие «проскальзывания» жидкости относительно тела, при котором напряжение сопротивления движению жидкости относительно тела на границе контакта $y = h$ равно нулю

$$\tau(h) = 0 \quad (13)$$

Если между телом и жидкостью есть трение, то в зависимости от величины коэффициента трения k жидкость может или «почти прилипнуть», или «почти проскальзывать» относительно тела. Это, более общее по сравнению с (13) граничное условие записывается в виде

$$\tau(h) + kV_{lp}(h) = 0 \quad (14)$$

Равенство (14) включает перечисленные выше граничные условия как частные случаи. Действительно, при $k \rightarrow 0$ универсальное условие вырождается в условие проскальзывания $\tau(h) \rightarrow 0$. При $k \rightarrow \infty$ универсальное условие вырождается в условие прилипания $V_{lp}(h) \rightarrow 0$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_{lp}(h) = -\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tau(h)}{k} = 0 \quad (15)$$

Граничное условие (14) позволяет установить, что требование непрерывности профиля скоростей не противоречиво только в случае бесконечно большого трения между жидкостью и частицами (15), то есть в случае прилипания. В случае ограниченного сверху коэффициента трения условие

непрерывности противоречит требованию существования скачка скорости при переходе от жидкости к телу через границу контакта.

В соответствии с этими соображениями введем скачек скорости на верхней и нижней границах слоя частиц $V_{lp} = -\tau/k$, и определим суммарную относительную скорость верхней и нижней граней ячейки периодичности с дополнительным слагаемым, учитывающим наличие трения

$$V = V_l + V_p + 2V_{lp} \quad (16)$$

Следовательно, учет трения в кинематической модели ячейки периодичности (16) приводит к новой связи между вязкостями суспензии, жидкости и «сухих» частиц

$$\frac{1}{\eta} = \frac{(1-\varphi)}{\eta_l} + \frac{\varphi}{\eta_p} - \frac{1}{k(h_l + h_p)} \quad (17)$$

Соотношение (17) уже не является осреднением Рейсса. Более того, оно отражает масштабные эффекты, так как содержит абсолютный размер $2(h_l + h_p) = 2H$ – среднестатистическое расстояние между частицами суспензии. Действительно, введем вместо коэффициента динамического трения k характерную толщину погранслоя h_f соотношением

$$k = \eta / h_f \quad (18)$$

С учетом (18) выражение для вязкости суспензии (17) можно привести к виду

$$\frac{1}{\eta} = \frac{(1-\varphi)}{\eta_l^*} + \frac{\varphi}{\eta_p^*} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \eta_l^* = \eta_l \left[1 + \frac{h_f}{(h_l + h_p)} \right] \\ \eta_p^* = \eta_p \left[1 + \frac{h_f}{(h_l + h_p)} \right] \end{cases}$$

Из (19) следует, что вязкости изолированной жидкости и «сухих» частиц ниже, чем в композиции (эффективные вязкости). Обратим внимание, что эффективные вязкости связаны с вязкостью суспензии классическим соотношением Рейсса.

4. СТРУКТУРА РАЗРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ СУСПЕНЗИИ В РАМКАХ КЛАССИЧЕСКОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

В случае, когда жидкость не полностью прилипает к частице, а проскальзывает вдоль её поверхности, некоторые базисные профили скоростей могут стать разрывными. Действительно, в каждой струе профиль определяется линейным по поперечной координате полиномом, содержащем две постоянные интегрирования (7). Однако, в отличие от системы граничных и контактных условий (8), учет трения приводит к изменению условий контакта струй и приобретает вид

$$\left\{ \begin{array}{l} v(0) = 0 \\ \left[\lim_{y \rightarrow h_l+0} \eta_p v'(y) + \lim_{y \rightarrow h_l-0} \eta_l v'(y) \right] / 2 + k \left[\lim_{y \rightarrow h_l+0} v(y) - \lim_{y \rightarrow h_l-0} v(y) \right] = 0 \\ \lim_{y \rightarrow h_l-0} \eta_l v'(y) = \lim_{y \rightarrow h_l+0} \eta_p v'(y) \\ \left[\lim_{y \rightarrow h_l+2h_p+0} \eta_l v'(y) + \lim_{y \rightarrow h_l+2h_p-0} \eta_p v'(y) \right] / 2 + k \left[\lim_{y \rightarrow h_l+2h_p+0} v(y) - \lim_{y \rightarrow h_l+2h_p-0} v(y) \right] = 0 \\ \lim_{y \rightarrow h_l+2h_p-0} \eta_p v'(y) = \lim_{y \rightarrow h_l+2h_p+0} \eta_l v'(y) \\ v(2h_l + 2h_p) = V \end{array} \right. \quad (20)$$

Подставляя (7) в (20), получим иную, чем (9), неоднородную линейную систему шести алгебраических уравнений относительно шести искомых постоянных интегрирования

$$\left\{ \begin{array}{l} -a_1 h_l / 2 + a_2 = 0 \\ \left(\eta_l a_1 + \eta_p b_1 \right) / 2 + k \left(-b_1 h_p + b_2 - a_1 h_l / 2 - a_2 \right) = 0 \\ \eta_l a_1 = \eta_p b_1 \\ \left(\eta_p b_1 + \eta_l c_1 \right) / 2 + k \left(-c_1 h_l / 2 + c_2 - b_1 h_p - b_2 \right) = 0 \\ \eta_p b_1 = \eta_l c_1 \\ c_1 h_l / 2 + c_2 = V \end{array} \right. \quad (21)$$

Решая систему (21), найдем

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = \frac{V}{2h_l} \frac{\frac{h_l}{\eta_l}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l} - \frac{1}{k} \right)} \\ a_2 = \frac{V}{4} \frac{\frac{h_l}{\eta_l}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l} - \frac{1}{k} \right)} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} b_1 = \frac{V}{2h_p} \frac{\frac{h_p}{\eta_p}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l} - \frac{1}{k} \right)} \\ b_2 = \frac{V}{2} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} c_1 = \frac{V}{2h_l} \frac{\frac{h_l}{\eta_l}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l} - \frac{1}{k} \right)} \\ c_2 = V - \frac{V}{4} \frac{\frac{h_l}{\eta_l}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l} - \frac{1}{k} \right)} \end{array} \right. \quad (22)$$

Подставляя постоянные интегрирования из (22) в (7), окончательно получим профиль скоростей, учитывающий трение

$$v(y) = \begin{cases} \frac{V}{2h_l} \frac{\frac{h_l}{\eta_l}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l} - \frac{1}{k}\right)} y & \text{for } 0 \leq y \leq h_l \\ \frac{V}{2h_p} \frac{\frac{h_p}{\eta_p}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l} - \frac{1}{k}\right)} (y - h_l - h_p) + \frac{V}{2} & \text{for } h_l \leq y \leq (h_l + 2h_p) \\ \frac{V}{2h_l} \frac{\frac{h_l}{\eta_l}}{\left(\frac{h_p}{\eta_p} + \frac{h_l}{\eta_l} - \frac{1}{k}\right)} (y - 2h_l - 2h_p) + V & \text{for } (h_l + 2h_p) \leq y \leq 2(h_l + h_p) \end{cases} \quad (23)$$

Из (23) видно, учет трения привел к тому, что вместо осредненной по Рейссу вязкости (5) в решении (11), в новом решении (23) появляется эффективная вязкость (17), учитывающая масштабный эффект (трение).

5. ФОРМУЛИРОВКИ ИЗВЕСТНЫХ ГИПОТЕЗ ОСРЕДНЕНИЯ КАК ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПРЕДЛОЖЕННОЙ МОДЕЛИ

Рассмотренная в данной статье модель приводит к соотношению (19) между вязкостями суспензии, жидкости и «сухих» частиц. Оно не является осреднением по Рейссу. Можно говорить, что классическая модель, приводящая к осреднению по Рейссу (5), не может в принципе дать описание масштабных эффектов вязкости суспензий, связанных с трением. Поэтому так же, как и для модулей упругости в теории композитов [15-16], в теории суспензий можно предложить неклассические модели осреднения вязкостей на основе «модифицированного» осреднения по Рейссу.

1. Аналогом модели «эффективного включения» является

$$\frac{1}{\eta} = \frac{(1-\varphi)}{\eta_l} + \frac{\varphi}{\eta_p^*} \quad (24)$$

где η_p^* – эффективная вязкость «сухих» частиц, определяемая не из отдельного эксперимента на основании соотношения (2), а непосредственно из (24), по известным вязкостям суспензии η , жидкости η_l и объёмной доле частиц φ . Можно убедиться, что полученному неклассическому соотношению (17) можно придать форму (24), связав вязкости «сухих» частиц η_p^*, η_p соотношением

$$\eta_p^* = \eta_p \frac{1}{\left[1 - \frac{\eta_p}{\varphi k (h_l + h_p)}\right]} \quad (25)$$

2. Аналогом модели «эффективной жидкости» является

$$\frac{1}{\eta} = \frac{(1-\varphi)}{\eta_l^*} + \frac{\varphi}{\eta_p} \quad (26)$$

где η_l^* – эффективная вязкость жидкости, определяемая не из отдельного эксперимента на основании соотношения (3), а непосредственно из (26), по известным вязкостям суспензии η , «сухих» частиц η_p и объёмной доле частиц φ . Не трудно убедиться, что полученному в статье неклассическому соотношению (17) можно придать форму (26), связав вязкости жидкости η_l^*, η_l соотношением

$$\eta_l^* = \eta_l \frac{1}{\left[1 - \frac{\eta_l}{(1-\varphi)k(h_l + h_p)}\right]}$$

3. Аналогично можно ввести модель «эффективной объёмной доли»

$$\frac{1}{\eta} = \frac{(1-\varphi^*)}{\eta_l} + \frac{\varphi^*}{\eta_p} \quad (27)$$

где φ^* – эффективная объёмная доля частиц, определяемая непосредственно из (27), по известным вязкостям суспензии η , жидкости η_l и «сухих» частиц η_p . Здесь также можно убедиться, что полученному ранее неклассическому соотношению (17) можно придать форму (27), связав объёмные доли «сухих» частиц φ^*, φ соотношением

$$\varphi^* = \varphi + \frac{1}{k(h_l + h_p) \left(\frac{1}{\eta_l} - \frac{1}{\eta_p}\right)}$$

4. Введем теперь модель эффективной «третьей фазы» с помощью соотношения

$$\frac{1}{\eta} = \frac{(h_l - h_{lf}) / (h_l + h_p)}{\eta_l} + \frac{(h_p - h_{pf}) / (h_l + h_p)}{\eta_p} + \frac{(h_{lf} + h_{pf}) / (h_l + h_p)}{\eta_f} \quad (28)$$

где $(h_l - h_{lf}) / (h_l + h_p)$ – эффективная относительная объёмная доля жидкости, $(h_p - h_{pf}) / (h_l + h_p)$ – эффективная относительная объёмная доля частиц, $(h_{lf} + h_{pf}) / (h_l + h_p)$ – относительная объёмная доля «третьей фазы», занимающей часть относительной объёмной доли жидкости $h_{lf} / (h_l + h_p)$ и часть относительной объёмной доли частиц $h_{pf} / (h_l + h_p)$, η_f – вязкость третьей фазы. В рассматриваемом случае, в отличие от двух предыдущих неклассическому соотношению (17) нельзя однозначно придать форму (28), сравнив (28) и (17), так как для определения трех дополнительных параметров модели третьей фазы h_{lf}, h_{pf}, η_f требуется три соотношения, а не одно.

$$\frac{(h_{lf} + h_{pf})}{\eta_f} = \frac{h_{lf}}{\eta_l} + \frac{h_{pf}}{\eta_p} - \frac{1}{k} \Rightarrow \eta_f = \frac{(h_{lf} + h_{pf})}{\frac{h_{lf}}{\eta_l} + \frac{h_{pf}}{\eta_p} - \frac{1}{k}} \quad (29)$$

Чтобы понять, какие две гипотезы следует сформулировать для однозначного определения дополнительных параметров h_{lf}, h_{pf} в (29), требуется дополнительное исследование, выходящее за рамки этой работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы две модели вязкости суспензий на основе «классического» осреднения вязкости по Рейссу и с учетом динамического трения жидкости о частицу. Установлено (17), что учет трения определяет масштабный эффект, проявляющийся в том, что вязкости жидкости, и «сухих» частиц в композиции имеют большие величины, чем вне композиции. Действительно, и коэффициент динамического трения k (14) и связанная с ним характерная толщина погранслоя h_f (18) характеризуются адгезионной парой жидкость-частица и являются уникальным физическим параметром именно этой пары. Если коэффициент динамического трения k велик, и жидкость практически прилипает к частице, характерная толщина погранслоя h_f мала по сравнению с расстоянием между частицами, масштабный эффект не проявляется, и вязкости жидкости и «сухих» частиц в композиции практически равны соответствующим вязкостям вне её. Для мелкодисперсных суспензий наоборот, при ненулевом коэффициенте динамического трения k характерная толщина погранслоя h_f соизмерима с расстоянием между частицами, и масштабный эффект вносит существенную поправку в вязкость суспензии по сравнению с «классическим» осреднением по Рейссу.

Этот факт позволяет предложить новую методику определения коэффициента динамического трения k по известной вязкости суспензии η и характерной толщине погранслоя h_f с помощью соотношения (18).

ЛИТЕРАТУРА

1. Матвеев В.Н., Кирсанов Е.А. *Вязкость и структура дисперсных систем* // Вестник Московского университета, Серия 2: Химия. – 2011. – Т.52. – №4. – С.243-276.
2. Einstein A. *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen* // Annalen der Physik. – 1905. – No.322(8). – Pp.549-560.
3. Ходаков Г.С. *Реология суспензий. Теория фазового течения и её экспериментальное обоснование* // Российский химический журнал. – 2003. – Т.47. – №2. – С.34-44.
4. Puisto A., Illa X., Mohtaschemi M., Alava M. *Modeling the rheology of nanocellulose suspensions* // Nordic Pulp and Paper Research Journal. – 2012. – Vol.27. – No.2. – Pp.277-281.
5. Ma A.W.K., Mackley M.R., Chinesta F. *The microstructure and rheology of carbon nanotube suspensions* // Int. J. Mater. Form. – 2008. – No.1. – Pp.75-81.
6. Tapia F., Shaikh S., Butler J.E., Pouliquen O., Guazzelli É. *Rheology of concentrated suspensions of non-colloidal rigid fibres* // J. Fluid Mech. – 2017. – Vol.827. – R5.
7. Toupin R.A. *Elastic materials with couple-stresses* // Archive of Rational Mechanics and Analysis. – 1964. – No.2. – Pp.85-112.
8. Mindlin R.D. *Micro-structure in linear elasticity* // Archive of Rational Mechanics and Analysis. – 1964. – No.1. – Pp.51-78.

9. Лурье С.А., Белов П.А., Рабинский Л.Н., Жаворонок С.И. *Масштабные эффекты в механике сплошных сред. Материалы с микро- и наноструктурой*. – М.: Издательство МАИ, 2012. – 156 с.
10. Gurtin M.E., Murdoch A.I. *A continuum theory of material surface* // Archive for Rational Mechanics and Analysis. – 1975. – Vol.57. – Pp.291-323.
11. Steigmann D.J., Ogden R.W. *Elastic surface-substrate interactions* // Proc. R. Soc. Lond. A, Math. Phys. Eng. Sci. – 1982. – Vol.455. – Pp.437-474.
12. Белов П.А., Лурье С.А. *Теория идеальных адгезионных взаимодействий* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т.14. – №3. – С.519-536.
13. Lurie S.A., Belov P.A., Altenbach H. *Classification of gradient adhesion theories across length scale* / In book: Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials. – Switzerland: Advanced Structured Materials Springer International Publishing, 2016. – Pp.261-277.
14. Образцов И.Ф., Лурье С.А., Белов П.А., Волков-Богородский Д.Б., Яновский Ю.Г., Кочемасова Е.И., Дудченко А.А., Потупчик Е.М., Шумова Н.П. *Основы теории межфазного слоя* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2004. – Т.10. – №4. – С.596-612.
15. Belov P.A., Lurie S.A., *Mathematical Theory of Defect Media. Gradient Theories of Elasticity. Formulations. Hierarchy. Comparative Analysis. Applications*. – Deutschland, Saarbrücken: Palmarium. Academic Publishing, 2014. – 336 p.
16. Zimmerman R.W. *Elastic moduli of a solid containing spherical inclusions* // Mechanics of Materials. – 1991. – Vol.12. – No.1. – Pp.17-24.

REFERENCES

1. Matveenko V.N., Kirsanov E.A. *Viazkost' i struktura dispersnykh system [Viscosity and structure of dispersed systems]*. Vestnik Moskovskogo universiteta, Seriya 2: Khimiya, 2011, Vol.52, No.4, Pp.243-276.
2. Einstein A. *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen*. Annalen der Physik, 1905, No.322(8), Pp.549-560.
3. Khodakov G.S. *Reologiya suspenzij. Teoriya fazovogo techeniya i eyo ehksperimental'noe obosnovanie [Rheology of suspensions. The theory of phase flow and its experimental justification]*. Rossijskij khimicheskij zhurnal, 2003, Vol.47, No.2, Pp.34-44.
4. Puisto A., Illa X., Mohtaschemi M., Alava M. *Modeling the rheology of nanocellulose suspensions*. Nordic Pulp and Paper Research Journal, 2012, Vol.27, No.2, Pp.277-281.
5. Ma A.W.K., Mackley M.R., Chinesta F. *The microstructure and rheology of carbon nanotube suspensions*. Int. J. Mater. Form., 2008, No.1, Pp.75-81.
6. Tapia F., Shaikh S., Butler J.E., Pouliquen O., Guazzelli É. *Rheology of concentrated suspensions of non-colloidal rigid fibres*. J. Fluid Mech., 2017, Vol.827, R5.
7. Toupin R.A. *Elastic materials with couple-stresses*. Archive of Rational Mechanics and Analysis, 1964, No.2, Pp.85-112.
8. Mindlin R.D. *Micro-structure in linear elasticity*. Archive of Rational Mechanics and Analysis, 1964, No.1, Pp.51-78.

9. Lur'e S.A., Belov P.A., Rabinskii L.N., Zhavoronok S.I. *Masshtabnye ehffekty v mekhanike sploshnykh sred. Materialy s mikro- i nano- strukturoj [Large-scale effects in the mechanics of continuous media. Materials with micro- and nano-structure]*. Moskva, Izdatel'stvo MAI, 2012, 156 p.
10. Gurtin M.E., Murdoch A.I. *A continuum theory of material surface*. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1975, Vol.57, Pp.291-323.
11. Steigmann D.J., Ogden R.W. *Elastic surface-substrate interactions*. Proc. R. Soc. Lond. A, Math. Phys. Eng. Sci., 1982, Vol.455, Pp.437-474.
12. Belov P.A., Lur'e S.A. *Teoriya ideal'nykh adgezionnykh vzaimodejstvij [Theory of ideal adhesion interactions]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2007, Vol.14, No.3, Pp.519-536.
13. Lurie S.A., Belov P.A., Altenbach H. *Classification of gradient adhesion theories across length scale*. In book: Generalized Continua as Models for Classical and Advanced Materials, Switzerland, Advanced Structured Materials Springer International Publishing, 2016, Pp.261-277.
14. Obraztsov I.F., Lur'e S.A., Belov P.A., Volkov-Bogorodskii D.B., Yanovsky Yu.G., Kochemasova E.I., Dudchenko A.A., Potupchik E.M., Shumova N.P. *Osnovy teorii mezhfaznogo sloya [Fundamentals of the interphase layer theory]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2004, Vol.10, No.4, Pp.596-612
15. Belov P.A., Lurie S.A. *Mathematical Theory of Defect Media. Gradient Theories of Elasticity. Formulations. Hierarchy. Comparative Analysis. Applications*. Deutschland, Saarbrucken, Palmarium, Academic Publishing, 2014, 336 p.
16. Zimmerman R.W. *Elastic moduli of a solid containing spherical inclusions*. Mechanics of Materials, 1991, Vol.12, No.1, Pp.17-24.

Поступила в редакцию 2 июля 2018 года.

Сведения об авторах:

Белов Петр Анатольевич – д.ф.-м.н., проф., в.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики РАН, г. Москва, Россия; e-mail: belovpa@yandex.ru

Лурье Сергей Альбертович – д.т.н., проф., гл.н.с., ФГБУН Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва, Россия; e-mail: salurie@mail.ru

Лыкосова Елена Дмитриевна – н.с., ФГБУН Институт прикладной механики Российской академии наук, г. Москва, Россия; e-mail: elykosova@mail.ru