

УДК 539.3; 539.612

ИДЕНТИФИКАЦИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ ДИСПЕРСНО-АРМИРОВАННЫХ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ НА ОСНОВЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Соколов А.П., Щетинин В.Н.

*Московский Государственный технический университет им. Н.Э.Баумана,
г. Москва, Россия*

АННОТАЦИЯ

Предложена численная методика идентификации упругих свойств межкомпонентного адгезионного слоя композитных материалов на основе известных характеристик композита, полученных экспериментально. Задача поставлена как «задача обратной гомогенизации», при решении которой использовался метод асимптотического осреднения. Представлен широкий литературный обзор работ, посвященных решению и исследованию задачи обратной гомогенизации. В рамках метода асимптотического осреднения для решения «локальных задач» на ячейках периодичности использовался метод конечных элементов. Обратная задача сводится к задаче оптимизации, для решения которой применялся метод последовательного квадратичного программирования. Для регуляризации решения используется регуляризация Тихонова с классическим априорным подходом к выбору коэффициента регуляризации. Представлена методика гомогенизации с учетом адгезионного слоя композитного материала. Адгезионный слой введен как дополнительная изотропная фаза композита. Для анализа устойчивости решения задачи идентификации к погрешностям экспериментальных данных использовался метод Монте-Карло. В вычислительных экспериментах рассматривался дисперсно-армированный стеклянными микросферами композит. Приведено сравнение с экспериментальными данными и показана необходимость включения модели адгезионного слоя при решении задач расчета эффективных упругих характеристик дисперсно-армированных композиционных материалов при высоких концентрациях армирующей фазы. Апробирован подход к идентификации упругих свойств адгезионного слоя на основе экспериментальных данных с учетом шумов математической модели и погрешностей эксперимента.

Ключевые слова: композитные материалы; обратная задача; метод гомогенизации; эффективные свойства композитов; адгезионный слой; параметрическая идентификация; регуляризация обратных задач; анализ устойчивости решения; идентификация по экспериментальным данным.

IDENTIFICATION OF ELASTIC PROPERTIES OF THE ADHESION LAYER OF DISPERSED-REINFORCED COMPOSITE MATERIALS FROM EXPERIMENTAL DATA

Sokolov A.P., Shchetinin V.N.

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

ABSTRACT

A numerical technique for identifying the elastic properties of an adhesive layer of composite materials from experimental data is presented. The problem is posed as the "inverse

homogenization problem". Homogenization problem was solved by the asymptotic averaging method. A wide literature review of papers devoted to solving and investigating the problem of inverse homogenization is presented. Finite element method was used for solving "local problem" on periodic cell of composite. The inverse problem was reduced to the optimization problem, for which the method of sequential quadratic programming was applied. Tikhonov's regularization with a classical a priori approach to the choice of the regularization coefficient was used for regularize the solution. The method of homogenization taking into account the adhesive layer of the composite material is considered. The adhesive layer is introduced as an additional isotropic phase of the composite. The Monte Carlo method was used to analyze the stability of the identification problem solution to the errors in the experimental data. Dispersed-reinforced composite filled with glass microspheres is considered in computational experiments. A comparison with the experimental data is given. The necessity of including of an adhesive layer in model for calculating the effective elastic characteristics of dispersed-reinforced composite materials is substantiated. Approach of the elastic properties of the adhesive layer identification from experimental data taking into account the noise of mathematical models and experimental errors is approved.

Keywords: composite materials; inverse problem; homogenization method; effective properties of composites; adhesion layer; parametric identification; regularization of inverse problems; stability analysis of solution; identification by experimental data.

ВВЕДЕНИЕ

На сегодняшний день количество различных типов используемых в технике композитных материалов (КМ) неуклонно растёт. Актуальной является задача моделирования поведения изделий из композитных материалов под нагрузкой. Непосредственное конечно-элементное моделирование физико-механики композитных конструкций сопряжено с существенными вычислительными затратами за счет наличия микронеоднородностей и на практике не применяется. Чаще для решения задач инженерного анализа композитных конструкций применяются те или иные теории эффективных сред. Многие методы теорий эффективных сред обзорно описаны в работе [1], включая основанные на них различные методы гомогенизации. В основе всех методов гомогенизации лежит замена определяющих соотношений композита, включающих зависящие от координат параметры отдельных компонент КМ, на осреднённые определяющие соотношения, зависящие от средних (эффективных) параметров некоторой однородной среды. Другими словами, осуществляется замена неоднородного материала на однородный сплошной материал с новыми механическими свойствами, называемыми эффективными, обеспечивающими приближенно такое же поведение изделия при действии внешних нагрузок.

В данной работе используется разновидность метода гомогенизации – метод асимптотического осреднения, разработанный Бахваловым Н.С. в 70-х годах прошлого века для осреднения дифференциальных уравнений в частных производных [2] и примененный Победрей Б.Е. в конце 70-х годов для решения задачи гомогенизации при исследовании упругих, а позже вязкоупругих и упругопластических характеристик композиционных материалов [3].

Методы гомогенизации могут быть использованы при моделировании различных физических процессов в неоднородной среде (упругое деформирование, теплопроводность, разрушение и пр.). В методах гомогенизации применяют различные математические модели композитов, описывающие микроструктуру и физические процессы в компонентах исследуемого

композитного материала при внешних воздействиях. Основные модели композитов были разработаны в 70-х годах прошлого века [4-6] и позволяли прогнозировать свойства композитов на основе свойств их компонент и параметров схемы армирования. Обычно эти модели были основаны на предположениях о конкретных видах функциональных зависимостей, описывающих: поля компонент тензоров напряжения и деформации, тепловые и электромагнитные поля, эффективные упругие постоянные от упругих постоянных и объемных концентраций компонент и прочие. Такие модели, как правило, обеспечивают приемлемую точность для большинства «классических композитов»: слоистых, однонаправленно-армированных и некоторых видов тканевых. В настоящее время класс широко применяемых в технике композитных материалов существенно расширился, – в него вошли дисперсно-армированные (или наполненные КМ), в том числе, наномодифицированные (например, углеродными нанотрубками (УНТ)), пространственно-армированные волокнистые (3D, 4D армированные КМ) и прочие. Для таких КМ аналитические модели и методы гомогенизации на их основе дают большую погрешность или неприемлемы вовсе [7]. Подробный обзор, в том числе современных, методов гомогенизации для композитов произвольной схемы армирования представлен, например, в работе [8], а также описания различных методов гомогенизации представлены в работах [1,9-13].

В рамках метода асимптотического осреднения предполагается, что модель схемы армирования композитного материала обладает периодической структурой, определяемой ячейкой периодичности (ЯП). Моделирование физических процессов в материалах с периодической структурой базируется на асимптотическом подходе к осреднению процессов в периодических средах [14]. Метод асимптотического осреднения позволяет вычислять эффективные свойства композитов с различными схемами армирования на основе решения специальных краевых задач на ячейках периодичности, называемых «локальными». Локальные задачи представляют собой дифференциальные уравнения с условиями периодичности.

В работах Димитриенко Ю.И. и Соколова А.П. [15,16] представлена численная реализация метода Бахвалова Н.С. и Победри Б.Е., основанная на сведении задач на ЯП к задачам «классического типа». Получаемые задачи решались методом конечных элементов (МКЭ). В настоящей работе использовалась программная реализация метода, разработанная Щетининым В.Н. на языке программирования C++ в рамках научного коллектива доцента Соколова А.П.

Следует отметить, что метод асимптотического осреднения обладает недостатками, которые существенно усложняют его прикладное использование. Для вычисления эффективных свойств исследуемых композитов с использованием метода асимптотического осреднения необходимо определить все соответствующие свойства каждой компоненты, экспериментальное определение которых, как правило, дорого или технически невозможно в связи с их малыми размерами. На практике свойства готового композита зависят от технологических режимов его изготовления, что не учитывается в рамках метода асимптотического осреднения. Также в процессе изготовления композиционных материалов возможно возникновение новых компонент с неизвестными свойствами и/или дефектов сплошности. Примером такой

компоненты может служить адгезионный слой – интерфейс между фазами композита.

С целью устранения указанных недостатков в работе предложена вычислительная методика, позволяющая идентифицировать упругие свойства отдельных компонент на основе свойств композита в целом.

Задача идентификации математической модели композита на основе экспериментальных данных получила широкое рассмотрение в литературе в различных формулировках. Например, в работе [17] предложен гибкий подход к задаче идентификации уравнения состояния вязкоупругой среды с помощью создания иерархической математической модели нарастающей сложности адаптивно подстраиваемой под известные экспериментальные данные. В работе [18] рассматривается задача идентификации вязкоупругих определяющих соотношений в форме нелинейного интегрального оператора типа Гаммерштейна на основе известных экспериментальных данных, полученных при исследовании реологического поведения невулканизированного эластомерного композита на основе матрицы из натурального каучука (полиизопрен), наполненного на 20% (по массе) техническим углеродом.

В рассматриваемой в статье постановке с использованием МКЭ для идентификации упругих свойств компонент КМ задача решалась в работах [19,20]. В зарубежной литературе задача вычисления «микропараметров» гетерогенного материала на основе его гомогенизированных «макропараметров» называется задачей обратной гомогенизации (ОГ) [21-24]. Отметим, что обратную гомогенизацию применяют не только для поиска упругих свойств включений: в работе [24] решалась задача идентификации электромагнитных свойств, а в работе [25] решалась задача идентификации прочностных свойств включений.

Альтернативой идентификации параметров адгезионного слоя (или других компонент, возникающих в результате технологического процесса) на основе экспериментальных данных является разработка его аналитических или численных моделей, как это сделано, например, в работах [26-28].

Задача обратной гомогенизации относится к некорректным слабо поставленным обратным задачам [29,30]. Обзор техник регуляризации для таких задач представлен в работе [31]. В работе [32] представлены методы регуляризации некорректных задач в механике вязкоупругих сред.

Выделяют два типа задач обратной гомогенизации: геометрическая [33,34] и коэффициентная [35-37]. В работах по геометрической обратной гомогенизации исследуют процесс идентификации схемы армирования, а в коэффициентной – идентификацию параметров компонент композитного материала.

Обратную гомогенизацию применяют не только для более точного решения прямой задачи гомогенизации, но и для задач проектирования материалов с заранее заданными свойствами [38], задач неразрушающего контроля [39], задач реологического анализа [40].

Наиболее популярным подходом к решению задачи обратной гомогенизации является сведение ее к задаче минимизации невязки между решением задачи гомогенизации и некоторыми целевыми значениям «макропараметров» [41,42]. В задачах геометрической обратной гомогенизации часто используют методы топологической оптимизации [43]. Для решения задач коэффициентной обратной гомогенизации используются методы локальной и глобальной оптимизации (например, метод градиентного спуска) или генетические алгоритмы.

Задача обратной гомогенизации, как и большинство обратных задач, является неустойчивой к погрешностям во входных данных. Для оценки необходимой точности входных данных используют анализ неопределенностей (или анализ чувствительности) [44]. Для оценки устойчивости решения к погрешностям при определении объемной концентрации наполнителя, параметров геометрии схемы армирования, значений свойств компонент ставят задачу идентификации значений этих параметров на основе решения прямой задачи стохастической гомогенизации [45]. Для задачи стохастической гомогенизации значения входных параметров варьируются с учетом заранее определенных погрешностей с помощью метода Монте-Карло, а решением считаются математические ожидания эффективных свойств, получаемых с помощью многократного применения того или иного метода гомогенизации [46-48].

В рамках данной работы предполагается, что: а) исследуемый композит изотропен; б) в состав исследуемого композита искусственно введена дополнительная объемная изотропная компонента (адгезионный слой) с неизвестными упругими свойствами; в) эффективные свойства композита при некоторой объемной концентрации включений известны из эксперимента и их достаточно, для постановки задачи идентификации характеристик его отдельных компонент.

В работе поставлена и численно решена задача идентификации упругих свойств армирующего включения (наполнителя) и адгезионного слоя между матрицей и наполнителем дисперсно-армированного композитного материала. Применение обратной гомогенизации для идентификации упругих свойств адгезионного слоя не является новым и представлено, например, в работе [49].

Для решения прямой задачи гомогенизации используется подход из работы [15] с применением МКЭ для решения «локальных задач». Для решения обратной задачи гомогенизации в работе применялся метод последовательного квадратичного программирования [50].

1. ГОМОГЕНИЗАЦИЯ УПРУГИХ СВОЙСТВ КОМПОЗИТНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Композитный материал или композит является неоднородной средой с определяющими соотношениями вида

$$\sigma = \mathbf{F}(\underline{\varepsilon}, \mathbf{x}), \quad (1)$$

где \mathbf{F} – оператор определяющих соотношений; \mathbf{x} – декартовы координаты точки неоднородной среды; $\underline{\sigma}$ и $\underline{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформации соответственно. Для случая упругой неоднородной среды определяющие соотношения могут быть записаны в виде обобщенного закона Гука в покомпонентной форме

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\mathbf{x})\varepsilon_{kl}, \quad (2)$$

где σ_{ij} – компоненты тензора напряжений; ε_{kl} – компоненты тензора деформации; $C_{ijkl}(\mathbf{x})$ – компоненты тензора модулей упругости, зависящие от координат \mathbf{x} точки неоднородной среды, или в более общем случае называемые материальными функциями.

Для композитов функции $C_{ijkl}(\mathbf{x})$ являются разрывными, быстро-осциллирующими зависимостями. Численное моделирование сред с такими материальными функциями на основе использования МКЭ является вычислительно сложной задачей, а зачастую и вовсе невозможно. В настоящей работе с помощью метода асимптотического осреднения осуществляется переход от соотношений в форме (2) к осредненному аналогу

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \bar{C}_{ijkl} \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad (3)$$

где \bar{C}_{ijkl} – компоненты эффективного тензора модулей упругости; $\langle \cdot \rangle$ – оператор осреднения, определяемый выражением

$$\langle \cdot \rangle = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} (\cdot) dv, \quad (4)$$

где V_c – объем ячейки периодичности исследуемого композита.

Задачей гомогенизации является определение эффективных модулей \bar{C}_{ijkl} .

Для пояснения алгоритма расчета эффективных модулей \bar{C}_{ijkl} запишем формулировку исходной задачи статики линейной теории упругости на макроуровне

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0; \\ \sigma_{ij} = C_{ijkl}(\mathbf{x}) \varepsilon_{kl}; \\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \end{cases} \quad (5)$$

где u_i – компоненты вектора перемещений, первое уравнение (5) – уравнение равновесия, второе – закон Гука, третье – деформационные соотношения Коши.

В рамках теории метода асимптотического осреднения решение (5) ищется в виде асимптотического разложения по малому параметру κ

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{x}) &\approx \sum_{s=0}^n \kappa^s u_i^{(s)}(\bar{x}, \xi) = u_i^{(0)}(\bar{x}) + \kappa u_i^{(1)}(\bar{x}, \xi) + \dots, \quad \kappa = \frac{l}{L}, \\ \varepsilon_{ij}(\mathbf{x}) &\approx \sum_{s=0}^n \kappa^s \varepsilon_{ij}^{(s)}(\bar{x}, \xi) = \varepsilon_{ij}^{(0)}(\bar{x}) + \kappa \varepsilon_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \xi) + \dots \\ \sigma_{ij}(\mathbf{x}) &\approx \sum_{s=0}^n \kappa^s \sigma_{ij}^{(s)}(\bar{x}, \xi) = \sigma_{ij}^{(0)}(\bar{x}) + \kappa \sigma_{ij}^{(1)}(\bar{x}, \xi) + \dots \end{aligned} \quad (6)$$

где x_i – декартовы координаты, $\bar{x}_i = \frac{x_i}{L}$; $\xi_i = \frac{x_i}{l}$ – два типа координат «медленные» (изменяются в области композита) и «быстрые» (изменяются в области ЯП V_c); L, l – характерные размеры композитной области и ЯП V_c соответственно.

Если в (6) принять $n=1$ и подставить (6) в (5), то задача (5) «распадётся» на две: а) осреднённую задачу на макроуровне относительно неизвестных $u_i^{(0)}$, для которой будут верны определяющие соотношения в форме (3) относительно осреднённых компонент тензора модулей упругости \bar{C}_{ijkl} , называемых

эффективными [1] и б) на так называемые «локальные задачи» на ячейках периодичности (ЯП) V_c относительно $u_i^{(1)}$.

Соотношения в форме (3) применяют для решения практических задач о напряженно-деформируемом состоянии на макроуровне в композитной области. Следует отметить, что в асимптотическом разложении решения $u_i(\mathbf{x})$ (6) использовались только первые два члена ряда, что окажет влияние на погрешность численного решения макрозадачи с использованием определенных компонент \bar{C}_{ijkl} эффективного тензора модулей упругости. В работе [2] представлены исследования зависимости погрешности решения макрозадачи от количества членов в используемом асимптотическом разложении решения с учетом периодичности функций $u_i^{(1)}(\bar{x}, \xi)$, разрывов первого рода характеристик фаз на поверхностях контакта и определения малого параметра.

В работе [15] показано, что решение задачи определения компонент \bar{C}_{ijkl} эффективного тензора модулей упругости сводится к решению «локальных задач» на ячейке периодичности V_c , которые в компонентой форме имеют вид

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{ij}^{(0)}}{\partial \xi_j} = 0; \\ \sigma_{ij}^{(0)} = C_{ijkl}^{\alpha} \varepsilon_{kl}^{(0)}; \\ \varepsilon_{ij}^{(0)} = \bar{\varepsilon}_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial u_j^{(1)}}{\partial \xi_i} \right); \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(0)}}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial u_j^{(0)}}{\partial \bar{x}_i} \right); \\ \left[\sigma_{ij}^{(0)} \right] \cdot n_j \Big|_{\xi \in \Sigma^{\alpha\gamma}} = 0, \quad \left[u_i^{(1)} \right] \Big|_{\xi \in \Sigma^{\alpha\gamma}} = 0; \\ \left[\left[\sigma_{ij}^{(0)} \right] \right] \cdot n_j \Big|_{\xi \in \Sigma^{bc}} = 0, \quad \left[\left[u_i^{(1)} \right] \right] \Big|_{\xi \in \Sigma^{bc}} = 0; \\ \bar{u}_i^{(1)}(\bar{x}) = \left\langle u_i^{(1)}(\bar{x}, \xi) \right\rangle_{V_c} = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} u_i^{(1)}(\bar{x}, \xi) d\xi = 0; \end{array} \right. \quad (7)$$

где $\bar{\varepsilon}_{ij}$ – средние деформации по ЯП; обозначение $[\cdot]$ определяет скачок соответствующей функции при переходе через поверхность $\Sigma^{\alpha\gamma}$ – поверхность контакта компонент α и γ , исследуемого КМ; Σ^{bc} – внешние поверхности ЯП (боковые грани), относительно которых должны выполняться условия периодичности, для соответствующих функций, заключённых в двойные квадратные скобки $[[\cdot]]$, где $[[f(x_i)]] \Big|_{x \in \Sigma^{bc}} = 0 \Leftrightarrow f(\dots, x_i, \dots) \Big|_{x \in \Sigma^{bc}} = f(\dots, x_i + l, \dots) \Big|_{x \in \Sigma^{bc}}$, для $\forall x_i$, предполагая, что ЯП кубическая; условие $\left\langle u_i^{(1)} \right\rangle_{V_c} = 0$ включено в систему (7) для единственности решения задачи [2].

Согласно работе [51], а также с учетом допущений об ортотропности исследуемого КМ и симметричности ЯП относительно боковых граней, задача (7) может быть решена путём сведения к серии задач, обозначаемых L_{pq} , с классическими краевыми условиями. Индексы $(p, q) = \{(1,1); (2,2); (3,3); (1,2); (1,3); (2,3)\}$ используются для обозначения задач:

три задачи о растяжении вдоль трех взаимно перпендикулярных осей $(1,1);(2,2);(3,3)$ и три задачи сдвига $(1,2);(1,3);(2,3)$ с условиями специального закрепления граней ячейки. Результатом решения задач L_{pq} являются функции $u_i^{(1)}(\xi)$. Математически строгая формулировка задач L_{pq} представлена в работе [52].

После решения задач L_{pq} на основе полученных $u_{i(pq)}^{(1)}$, используя соотношения (7), вычисляются и далее усредняются по объёму ЯП поля компонент тензоров деформации $\varepsilon_{ij(pq)}^{(0)}$ и напряжений $\sigma_{ij(pq)}^{(0)}$, используя (4).

Наконец, используя осредненные определяющие соотношения (3), на основе $\langle \varepsilon_{ij(pq)}^{(0)} \rangle_{V_c}$ и $\langle \sigma_{ij(pq)}^{(0)} \rangle_{V_c}$ может быть составлена система линейных алгебраических уравнений и определены искомые эффективные упругие модули \bar{C}_{ijkl} .

Используя соотношения из работы [52] на основе полученных компонент эффективного тензора модулей упругости \bar{C}_{ijpq} могут быть определены эффективные упругие технические константы (модули Юнга E_i , коэффициенты Пуассона μ_{ij} , модули сдвига G_{ij}).

Для дальнейшего изложения удобно ввести вектор упругих технических констант ортотропного композитного материала для каждой компоненты α исследуемого КМ

$$\mathbf{P}^\alpha = ((\mathbf{E}^\alpha)^T, (\mathbf{G}^\alpha)^T, (\boldsymbol{\mu}^\alpha)^T)^T, \quad (8)$$

где $\mathbf{E}^\alpha = (E_1^\alpha, E_2^\alpha, E_3^\alpha)^T$, $\mathbf{G}^\alpha = (G_{12}^\alpha, G_{13}^\alpha, G_{23}^\alpha)^T$, $\boldsymbol{\mu}^\alpha = (\mu_{12}^\alpha, \mu_{13}^\alpha, \mu_{23}^\alpha)^T$.

А также вектор эффективных упругих технических констант ортотропного композитного материала в целом, вычисленных на основе значений компонент эффективного тензора модулей упругости \bar{C}_{ijpq}

$$\bar{\mathbf{P}} = (\bar{\mathbf{E}}^T, \bar{\mathbf{G}}^T, \bar{\boldsymbol{\mu}}^T)^T. \quad (9)$$

Количество компонент векторов \mathbf{P}^α и $\bar{\mathbf{P}}$ определяется допущением о типе анизотропии исследуемого КМ [53]. В работе рассматривается изотропный случай, для которого характерно 2 независимые упругие технические константы, полностью определяющие эффективные упругие характеристики исследуемого КМ.

В данном исследовании использовалась параллельная программная реализация метода гомогенизации из работы [54].

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АДГЕЗИОННОГО СЛОЯ

В классических моделях композитов адгезионный слой не рассматривается. На границе фаз КМ предполагается идеальный контакт

$$\begin{cases} u_i^\alpha = u_i^\gamma, \\ (\sigma_{ij}^\alpha - \sigma_{ij}^\gamma) \vec{n} \Big|_{\xi \in \Sigma^{\alpha\gamma}} = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где $\Sigma^{\alpha\gamma}$ поверхность контакта между фазами α и γ ; ξ – координаты точки; \vec{n} – вектор внешней нормали.

Теоретическое исследование влияния наличия адгезионного слоя на свойства композита рассматривается в работе [55] на примере дисперсно-армированного сферами и 1D-армированного волокнами композитов. Адгезионный слой в работе [55] вводится как тонкая изотропная пленка между фазами, далее с помощью МКЭ исследуется поведение полей компонент тензора напряжений σ_{ij} в области ячейки периодичности композита в зависимости от толщины и механических свойств адгезионного слоя.

В работе [56] моделируется процесс деформирования клеевого соединения. Рассматривается контактная задача, в которой для адгезионного слоя определяется контактная жесткость. Аппроксимация адгезионного слоя осуществляется с помощью специального контактного конечного элемента нулевой толщины. Такого же подхода придерживаются в работе [57], в которой оценивается влияние случайно распределенных дефектов в адгезионном слое. В работе [58] адгезионный слой рассматривается как тонкая вязкоупругая пленка.

В настоящей работе адгезионный слой рассматривается как еще одна объемная фаза композита с фиксированной толщиной при варьируемой объемной доли включений, а также изотропными упругими свойствами, которые в дальнейшем будут идентифицированы из решения задачи обратной гомогенизации на основе экспериментальных данных. Задача была поставлена в общей трёхмерной постановке. Принципиальная схема ЯП модели рассматриваемого дисперсно-армированного композита со сферическими включениями представлена на рис.1.

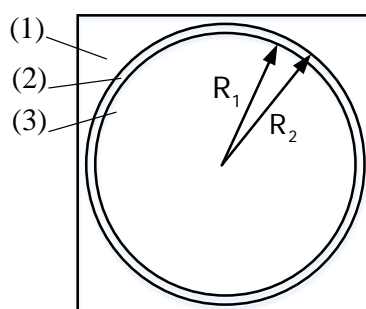


Рис.1. Модель ячейки периодичности, рассматриваемого дисперсно-армированного сферическими включениями композита с объемной моделью адгезионного слоя: (1) – матрица, (2) – адгезионный слой, (3) – сферическое включение.

Известно, что в процессе изготовления композитов свойства материала вблизи поверхности контакта компонент будут отличаться от свойств матрицы и свойств включения [47,61]. Для настоящей работы выбор толщины модели адгезионного слоя не столь важен, зависит лишь от возможностей применяемых конечного-элементных генераторов и наличия вычислительных ресурсов, при этом её конкретное значение рационально выбрать сравнимым с его реальной толщиной, если она будет известна при проведении исследования реального КМ. Следует иметь в виду, что введение в расчетную модель объемных адгезионных слоев малой толщины может привести к существенному увеличению вычислительной сложности задачи за счет увеличения количества конечных элементов в расчетной сетке.

На внешних поверхностях модели адгезионного слоя, контактирующих с остальными фазами композита, используются классические условия идеального контакта (10).

3. ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ СВОЙСТВ ОТДЕЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

Задача идентификации свойств компонент КМ ставится как задача обратной гомогенизации [19-22].

Здесь и далее пространством $\Omega(\mathbb{R}^n, N)$ многокомпонентных гетерогенных структур (МГС) с заданным числом компонент $N \in \mathbb{N}$ и заданным числом параметров $n \in \mathbb{N}$ каждой компоненты над полем действительных чисел \mathbb{R} будем называть декартово произведение пространств \mathbb{R}^n само на себя N раз, т.е.:

$$\Omega(\mathbb{R}^n, N) = \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_N = \prod_{i=1}^N \mathbb{R}^n.$$

Обозначим G множество всех возможных геометрий ячеек периодичности.

Определим оператор задачи прямой гомогенизации вычисления эффективных свойств КМ как следующее отображение

$$\mathcal{H}_1^{(N)} : G \times \Omega(\mathbb{R}^n, N) \rightarrow \Omega(\mathbb{R}^n, 1). \quad (11)$$

Таким образом, для случая поиска эффективных упругих характеристик КМ, в предположении ортотропии компонент и КМ в целом, а также с учетом (8) и (9) $\mathbf{P}^\alpha \in \Omega(\mathbb{R}^9, 1)$, $\bar{\mathbf{P}} \in \Omega(\mathbb{R}^9, 1)$ и оператор задач прямой гомогенизации будет иметь вид

$$\mathcal{H}_1^{(N)} : G \times \Omega(\mathbb{R}^9, N) \rightarrow \Omega(\mathbb{R}^9, 1), \quad (12)$$

для которого верно $\bar{\mathbf{P}} = \mathcal{H}_1^{(N)}(\Gamma, \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \dots, \mathbf{P}^N)$, где $\bar{\mathbf{P}}$ – вектор эффективных упругих технических констант КМ согласно (9); \mathbf{P}^α – вектор упругих технических констант каждой компоненты α исследуемого КМ согласно (8); $\Gamma \in G$ – геометрия ячейки периодичности, N – определяет количество компонент в рассматриваемом КМ.

Отметим, что для рассматриваемого в работе случая трехкомпонентной модели дисперсно-армированного КМ со сферическими включениями с учетом объёмного адгезионного слоя оператор задачи прямой гомогенизации имеет вид

$$\mathcal{H}_1^{(3)} : G \times \Omega(\mathbb{R}^9, 3) \rightarrow \Omega(\mathbb{R}^9, 1), \quad (13)$$

для которого верно $\bar{\mathbf{P}} = \mathcal{H}_1^{(3)}(\Gamma, \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \mathbf{P}^3)$.

Пусть для некоторой компоненты КМ с индексом i отдельные (или все) элементы вектора технических констант неизвестны: обозначим эти параметры $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}^i$.

Определим оператор задачи обратной гомогенизации идентификации свойств компоненты i КМ следующим образом

$$\mathcal{H}_{1,(i)}^{-1} : G \times \Omega(\mathbb{R}^n, 1) \times \Omega(\mathbb{R}^n, N-1) \rightarrow \Omega(\mathbb{R}^n, 1), \quad (14)$$

для которого $\mathbf{P}^* = \mathbf{P}^i = \mathcal{H}_{1,(i)}^{-1}(\Gamma, \mathbf{P}^{exp}, \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \dots, \mathbf{P}^{i-1}, \mathbf{P}^{i+1}, \dots, \mathbf{P}^N)$, где \mathbf{P}^{exp} – вектор технических констант композита (упругих в настоящей работе), найденный экспериментально.

Пусть элементы вектора \mathbf{P}^{exp} содержат абсолютную погрешность не превышающую Δ , то есть: $\|\mathbf{P} - \mathbf{P}^{exp}\| \leq \Delta$, где \mathbf{P} – вектор точных значений.

Предположим, что закон распределения значений элементов \mathbf{P}^{exp} нормальный, тогда $\delta = (\Delta/3)^2$ является дисперсией и можно сделать предположение о том, что неизвестные значения элементов вектора \mathbf{P}^* компоненты КМ с индексом i также будут распределены по нормальному закону с дисперсией ψ . В этом случае, с учётом (14), запишем

$$\mathbf{P}_\psi^* = \mathcal{H}_{1,(i)}^{-1}(\Gamma, \mathbf{P}_\delta^{exp}, \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \dots, \mathbf{P}^{i-1}, \mathbf{P}^{i+1}, \dots, \mathbf{P}^N) \quad (15)$$

Как и большинство обратных задач задача (15) некорректна по Адамару [29], то есть нельзя предполагать, что входные данные достаточно согласованы, решение единственно и достаточно устойчиво к погрешностям во входных данных. В связи с этим для решения задачи (15) необходимо дополнительно использовать регуляризирующие подходы [29].

Введем специальное сокращенное обозначение для задачи прямой гомогенизации, для которой осуществляется варьирование свойств одной компоненты γ КМ

$$\mathcal{H}_1^{(N)}(\mathbf{P}^\gamma) \triangleq \mathcal{H}_1^{(N)}(\Gamma, \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \dots, \mathbf{P}^\gamma, \dots, \mathbf{P}^N), \quad (16)$$

где $\Gamma = const$, $\mathbf{P}^j = const$, $1 \leq j \neq \gamma \leq N$ – вектор технических констант компоненты, свойства которой не варьируются.

Аналогичное специальное сокращенное обозначение будем использовать для задачи обратной гомогенизации при варьировании результатов экспериментальных данных при фиксированных остальных параметрах

$$\mathcal{H}_{1,(i)}^{-1}(\mathbf{P}^{exp}) \triangleq \mathcal{H}_{1,(i)}^{-1}(\Gamma, \mathbf{P}^{exp}, \mathbf{P}^1, \mathbf{P}^2, \dots, \mathbf{P}^{i-1}, \mathbf{P}^{i+1}, \dots, \mathbf{P}^N), \quad (17)$$

где $\Gamma = const$, $\mathbf{P}^j = const$, $1 \leq j \neq i \leq N$.

Запишем задачу (15) с учетом (16) в форме задачи минимизации нормы вектора невязки между решением задачи прямой гомогенизации и данными, получаемыми экспериментально

$$\left\| \mathcal{H}_1^{(N)}(\mathbf{P}^\gamma) - \mathbf{P}_\delta^{exp} \right\|_2 \xrightarrow{\mathbf{P}^\gamma = \mathbf{P}^*} \min; \quad (18)$$

В данной задаче есть два источника шумов: шумы расчетной модели задачи прямой гомогенизации, возникающие в связи с дискретизацией расчетной области V_c , и шумы экспериментальных измерений \mathbf{P}_δ^{exp} . В связи с этим применяем регуляризацию Тихонова с введением коэффициента ρ , как меры нашего доверия к модели и эксперименту [44] и заменяем задачу (18) на задачу вида

$$\left(\left\| \mathcal{H}_1^{(N)}(\mathbf{P}^\gamma) - \mathbf{P}_\delta^{exp} \right\|_2 + \rho \left\| \mathbf{P}^\gamma \right\|_2 \right) \xrightarrow{\mathbf{P}^\gamma = \mathbf{P}^*} \min; \quad (19)$$

Наиболее важной проблемой при реализации метода регуляризации Тихонова является выбор коэффициента ρ . Данная задача сама по себе является оптимизационной: при выборе слишком малого параметра регуляризации ρ проявляется некорректность исходной задачи (18). В рамках данной работы используется классический априорный подход к выбору ρ [45]

$$\rho = \frac{\Delta}{M}, \quad \left\| \mathcal{H}_{1,(i)}^{-1}(\mathbf{P}_\delta^{exp}) \right\|_2 \leq M, \quad (20)$$

где $M \in \mathbb{R}$ является ограничением компакта, на котором происходит поиск решения обратной задачи, а погрешность Δ задаётся суммой погрешностей конечно-элементной модели, определяемой с помощью метода сеточной сходимости и погрешности экспериментальных данных.

Задача (19) может быть решена с использованием различных методов оптимизации как градиентных, так и эвристических. В данной работе использовался метод последовательного квадратичного программирования (SQP) [46].

4. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБРАТНОЙ ГОМОГЕНИЗАЦИИ ПРИ ЗАШУМЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

Введем обозначение для описания некоторого возмущённого вектора параметров Φ_χ , получаемых экспериментально или численно. Допустим, что компоненты Φ_χ являются случайными величинами, распределенными по нормальному закону с одинаковыми дисперсиями χ

$$\Phi_\chi \triangleq \bar{\Phi} + \mathbf{G}(0, \chi), \quad \bar{\Phi} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \Phi^s, \quad (21)$$

где $\bar{\Phi}$ – вектор средних по выборке величин, полученных экспериментально или численно; N – количество проведенных измерений или вычислений (объем выборки); Φ^s – вектор значений параметров, полученный в эксперименте или расчете с индексом s ; $\mathbf{G}(0, \chi)$ – вектор случайных отклонений, распределенных по нормальному закону с нулевыми математическими ожиданиями и одинаковыми дисперсиями χ .

Для анализа устойчивости решения задачи обратной гомогенизации к погрешностям во входных данных рассмотрим в общем случае вектор свойств композита \mathbf{P}_δ^{exp} . Используя обозначение (21) и соответствующее допущения о законе распределения компонент, вектор \mathbf{P}_δ^{exp} можно представить в следующем виде

$$\mathbf{P}_\delta^{exp} = \bar{\mathbf{P}}^{exp} + \mathbf{G}(0, \delta), \quad \bar{\mathbf{P}}^{exp} = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N \mathbf{P}^{exp,s}, \quad (22)$$

где формально $\Phi_\chi \equiv \mathbf{P}_\delta^{exp}$, $\chi \equiv \delta$, $\bar{\mathbf{P}}^{exp}$ – вектор средних по выборке упругих свойств композита, полученных экспериментально, вычисленный согласно (22); δ – дисперсия в обозначениях (21), s – номер эксперимента.

Согласно (14) и в обозначениях (17) и (21), выразим вектор искомых свойств компоненты КМ:

$$\mathbf{P}_\psi^* = \mathbf{P}_\psi^\gamma = \mathcal{H}_{1,(\gamma)}^{-1}(\mathbf{P}_\delta^{exp}). \quad (23)$$

Вектор \mathbf{P}_ψ^* искомых свойств компоненты γ КМ также будет вектором случайных величин, распределенных по нормальному закону (21)

$$\mathbf{P}_\psi^* = \bar{\mathbf{P}}^* + \mathbf{G}(0, \psi), \quad \bar{\mathbf{P}}^* = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{P}^{*,t}, \quad (24)$$

где $\bar{\mathbf{P}}^*$ – вектор средних (эффективных) упругих свойств композита, которые могут быть получены численно согласно (24); t – номер расчета при фиксированном с помощью метода Монте-Карло векторе $\mathbf{P}^{*,t}$.

Очевидно, что

$$\bar{\mathbf{P}}^* = \mathcal{H}_{1,(\gamma)}^{-1}(\bar{\mathbf{P}}^{exp}), \quad (25)$$

где $\bar{\mathbf{P}}^{exp}$ определен согласно (22).

Построим вектор случайных величин \mathbf{V}^s , соответствующий эксперименту s

$$\mathbf{V}^s = \left((\mathbf{P}^{*,s})^T, (\mathbf{P}^{exp,s})^T \right)^T. \quad (26)$$

Построим матрицу ковариаций \mathbf{COV}^s , включающую ковариации входных $\mathbf{P}_i^{exp,s}$ и выходных $\mathbf{P}_j^{*,s}$ параметров задачи обратной гомогенизации для поиска среднеквадратичных отклонений $S_i^{P^{*,s}}$ и коэффициентов корреляций R_{ij} , позволяющих определять зависимости параметров исследуемой компоненты КМ от результатов экспериментов.

$$\mathbf{COV}_{ij}^s = \mathbf{M}[(V_i^s - \mathbf{M}[V_i^s])(V_j^s - \mathbf{M}[V_j^s])], \quad (27)$$

где $i = 1, \dots, M$, $j = 1, \dots, M$, – индексы элементов векторов параметров; $M = |2\mathbf{P}^{exp,s}| = |2\mathbf{P}^{*,s}|$ – количество параметров определяется согласно (9).

$$S_i^{P^{*,s}} = \sqrt{\mathbf{COV}_{ii}}, R_{ij} = \frac{\mathbf{COV}_{ij}}{\sqrt{\mathbf{COV}_{ii} \mathbf{COV}_{jj}}} \quad (28)$$

Для вычисления (28) потребуется N раз решить задачу обратной гомогенизации в соответствии с количеством экспериментов

$$\mathbf{P}^{*,s} = \mathcal{H}_{1,(\gamma)}^{-1}(\mathbf{P}^{exp,s}), \quad (29)$$

где $\mathbf{P}^{exp,s}$ – реализация вектора случайных величин, полученная из распределения (22) с помощью метода Монте-Карло.

Анализ устойчивости решения задачи обратной гомогенизации при зашумленных экспериментальных данных осуществлялся путём определения уровня дисперсии ψ восстанавливаемых свойств \mathbf{P}_ψ^* исследуемой компоненты γ КМ.

С учетом ранее представленных обозначений возможно поставить следующую задачу

$$\bar{\mathbf{P}}^s = \mathcal{H}_1^{\{2\}}(\mathbf{P}_\psi^{*,t}) \Big|_{t=1, \dots, N} \quad (30)$$

Таким образом, анализ устойчивости сведётся к решению одной задачи обратной гомогенизации над средним значением вектора $\bar{\mathbf{P}}^{exp}$ (25) и N -кратному решению задачи прямой гомогенизации над реализациями вектора $\mathbf{P}^{*,t}$, получаемыми из распределения (24) с помощью метода Монте-Карло с последующим его использованием для решения задачи (30). Такой подход позволяет получить уровень погрешности Δ в экспериментальных данных требуемый для восстановления свойств включений с уровнем дисперсии ψ .

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

5.1. Идентификация свойств армирующих стеклянных микросфер.

Рассмотрим двухфазный композит на основе некоторого связующего, наполненного стеклянными микросферами. В рамках данного вычислительного эксперимента: адгезионный слой между фазами не учитывался, а эффективные свойства КМ были рассчитаны на основе решения задачи прямой гомогенизации. Были определены упругие свойствами изотропной матрицы: $E_m = 3.0$ [ГПа], $\mu_m = 0.4$, а также упругие свойства изотропных микросфер: $E_{sp} = 76$ [ГПа], $\mu_{sp} = 0.23$.

Многokrратно решая задачу прямой гомогенизации $\mathcal{H}_1^{(2)}(\phi_{sp})$ (12) при изменении объёмной концентрации микросфер ϕ_{sp} в рамках обозначений (15), построим зависимости эффективных модуля Юнга E_c и коэффициента Пуассона μ_c КМ от ϕ_{sp} (рис.2).

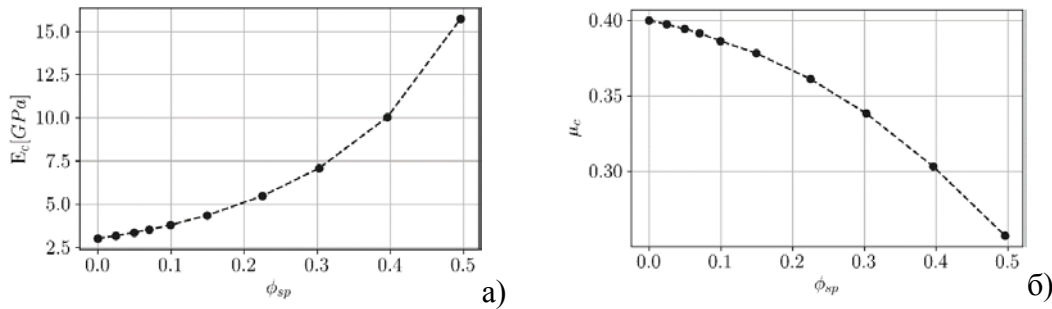


Рис.2. Модуль Юнга а) и коэффициент Пуассона б) дисперсно-армированного микросферами композита.

Поставим задачу идентификации упругих свойств микросфер $\mathbf{P}^{sp} = (E_{sp}, \mu_{sp})^T$ (модуля Юнга и коэффициента Пуассона) по известным свойствам композита $\mathbf{P}^{exp} = (E_c^{exp}, \mu_c^{exp})^T$, полученным на основе решения задачи прямой гомогенизации ранее, и матрицы $\mathbf{P}^m = (E_m, \mu_m)^T$ при разных объёмных концентрациях микросфер ϕ_{sp}

$$F(\mathbf{P}^{sp}) = \left\| \mathcal{H}_1^{(2)}(\mathbf{P}^{sp}) - \mathbf{P}_\delta^{exp} \right\|_2^2 \xrightarrow{\mathbf{P}^{sp} = \mathbf{P}^{*,sp}} \min \quad (31)$$

$$F(\mathbf{P}^{sp}) = F(E_{sp}, \mu_{sp}) = (E_c - E_c^{exp})^2 + (\mu_c - \mu_c^{exp})^2 \xrightarrow{E_{sp}^*, \mu_{sp}^*} \min \quad (32)$$

где E_c, μ_c – свойства композита, получаемые путём решения задачи прямой гомогенизации; E_c^{exp}, μ_c^{exp} – целевые свойства композита.

Для решения задачи оптимизации использовался алгоритм последовательного квадратичного программирования (SQP) [52]. Предварительно был проведен анализ ландшафта целевой функции $F(\mathbf{P}^{sp})$, для чего она была вычислена на равномерной сетке варьируемых упругих параметров микросфер, многократно решая задачу прямой гомогенизации. Вычислительные эксперименты проводились при трёх различных объёмных концентрациях микросфер ϕ_{sp} . Полученные зависимости целевой функции от параметров микросфер представлены на рис.3.

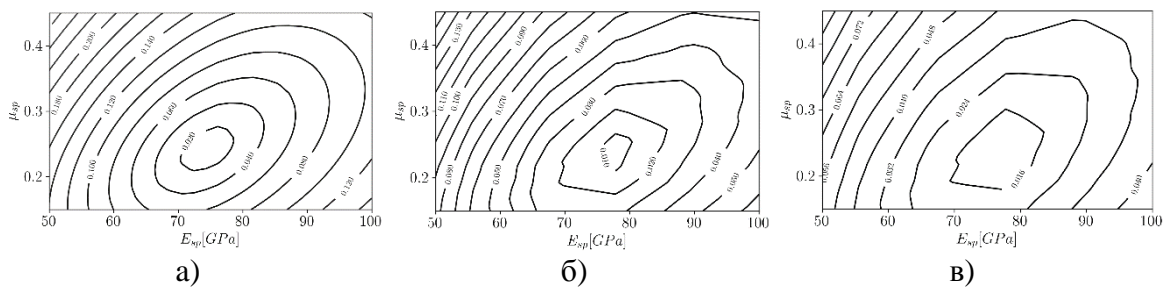


Рис.3. Линии уровня целевой функции $F(\mathbf{P}^{sp})$ задачи идентификации свойств микросфер при различных концентрациях: а) $\phi_{sp} = 0.5$; б) $\phi_{sp} = 0.4$; в) $\phi_{sp} = 0.3$.

Согласно данным, представленным на рис.3, можно видеть, что с уменьшением объёмной доли микросфер представленные линии уровня целевой функции в области оптимальных значений указывают на формирование плато. Другими словами, рис.3 демонстрирует соответствующее падение чувствительности целевой функции к параметру μ_{sp} с уменьшением объёмной доли микросфер. Несмотря на полученные особенности целевой функции алгоритм последовательного квадратичного программирования сходится на данных задачах за 100-200 вычислений прямой задачи гомогенизации. Соответствующие графики истории сходимости представлены на рис.4.

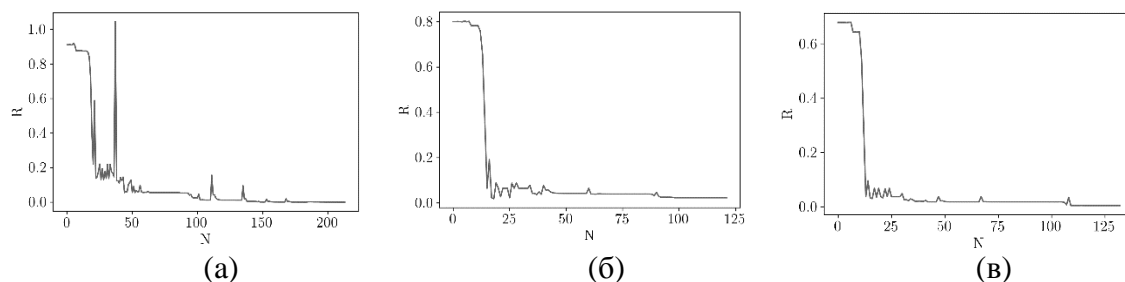


Рис.4. Сходимость оптимизационной задачи идентификации свойств сфер при различных концентрациях: а) $\phi_{sp} = 0.5$; б) $\phi_{sp} = 0.4$; в) $\phi_{sp} = 0.3$.

В таблице 1 представлены результаты решения и их погрешности. Следует отметить, что с уменьшением концентрации ϕ_{sp} сильно растет погрешность решения.

Таблица 1.

Решение задачи идентификации свойств армирующих сфер.

Концентрация, ϕ_{sp} , %	0.5	0.4	0.3
Матрица, $\mathbf{P}^m = (E_m, \mu_m)^T$, ([ГПа],[б/р]) ^T	(3.0; 0.4)	(3.0; 0.4)	(3.0; 0.4)
КМ, $\mathbf{P}_c^{exp} = (E_c^{exp}, \mu_c^{exp})^T$, ([ГПа],[б/р]) ^T	(16.; 0.26)	(10.; 0.3)	(7.; 0.34)
Решение, $\mathbf{P}^{sp} = (E_{sp}, \mu_{sp})^T$, ([ГПа],[б/р]) ^T	(76.013; 0.230)	(70.546; 0.249)	(80.241; 0.250)
Погрешность	(0.0002; 0.000)	(0.072; 0.085)	(0.055; 0.089)

Исследование показало, что задачу идентификации свойств армирующих микросфер в такой постановке можно решать для очень высоких концентраций наполнителя – от 50%.

5.1.1. Применение регуляризации Тихонова.

Решаем задачу идентификации с использованием регуляризации Тихонова (18). Коэффициент регуляризации принимаем $\rho = 10^{-6}$. Минимизируем целевую функцию вида

$$F_{tih}(\mathbf{P}^{sp}) = \left\| \mathcal{H}_1^{(2)}(\mathbf{P}^{sp}) - \mathbf{P}_\delta^{exp} \right\|_2^2 + \rho \left\| \mathbf{P}^{sp} \right\|_2^2 \xrightarrow{\mathbf{P}^{sp} = \mathbf{P}^{*,sp}} \min \quad (33)$$

$$F_{tih}(\mathbf{P}^{sp}) = F_{tih}(E_{sp}, \mu_{sp}) = (E_c - E_c^{exp})^2 + (\mu_c - \mu_c^{exp})^2 + \rho(E_{sp}^2 + \mu_{sp}^2) \xrightarrow{E_{sp}^*, \mu_{sp}^*} \min \quad (34)$$

Результаты поведенных расчетов представлены в таблице 2. Погрешности решения для концентраций $\phi_{sp} = 40\%$ и $\phi_{sp} = 30\%$ улучшились. Также решались задачи идентификации при концентрациях $\phi_{sp} = 20\%$ и $\phi_{sp} = 10\%$.

Таблица 2.

Решение задачи идентификации с регуляризацией Тихонова.

Концентрация, ϕ_{sp} , %	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1
Матрица, $\mathbf{P}^m = (E_m, \mu_m)^T$, ([ГПа],[б/р]) ^T	(3.0; 0.4)	(3.0; 0.4)	(3.0; 0.4)	(3.0; 0.4)	(3.0; 0.4)
КМ, $\mathbf{P}_c^{exp} = (E_c^{exp}, \mu_c^{exp})^T$, ([ГПа],[б/р]) ^T	(16.; 0.26)	(10.; 0.3)	(7.; 0.34)	(5.; 0.367)	(4.; 0.386)
Решение (микросферы), $\mathbf{P}^{sp} = (E_{sp}, \mu_{sp})^T$, ([ГПа],[б/р]) ^T	(76.0; 0.23)	(76.012; 0.231)	(76.2646; 0.238)	(75.984; 0.23)	(60.88; 0.2545)
Погрешность	(0.0; 0.0)	(0.0002; 0.004)	(0.0034; 0.034)	(0.0002; 0.0)	(0.199; 0.106)

Исследование показало, что задачу идентификации в такой постановке возможно решать и для концентраций наполнителя меньших 50%. Однако, для решения задач при концентрациях меньших 20% необходимы другие подходы.

5.1.2. Анализ устойчивости решения.

Для анализа устойчивости варьируем свойства сфер в окрестности решения с погрешностями $\psi_{E_{sp}} = 0.1$ [ГПа], $\psi_{\mu_{sp}} = 0.01$. Для каждой концентрации проводим 250 вычислений задачи прямой гомогенизации.

На рис.5 представлена зависимость коэффициента корреляции $R_{E_c^{exp}, E_{sp}}$ модулей Юнга композита E_c^{exp} и микросфер E_{sp} . При уменьшении концентрации ϕ_{sp} коэффициент корреляции $R_{E_c^{exp}, E_{sp}}$ убывает. Полученные среднеквадратичные отклонения модуля Юнга S_{E_c} и коэффициента Пуассона S_{μ_c} композита также

убывают при уменьшении концентрации (рис.6). Таким образом, можно сделать вывод о том, что при малых концентрациях окрестность оптимума представляет собой плато. Данный анализ показывает, что для того, чтобы решать обратную задачу при таких концентрациях микросфер, необходимо задавать свойства композита с очень малой погрешностью.

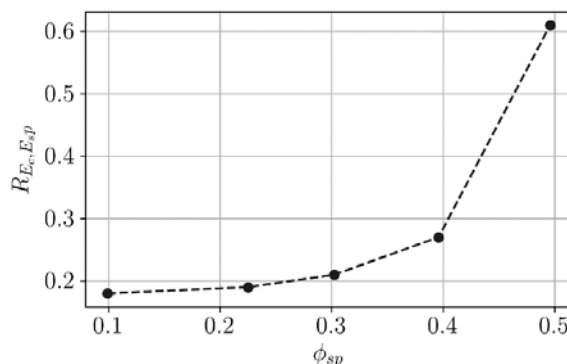


Рис.5. Коэффициент корреляции $R_{E_c^{exp}, E_{sp}}$ модулей Юнга композита E_c^{exp} и микросфер E_{sp} .

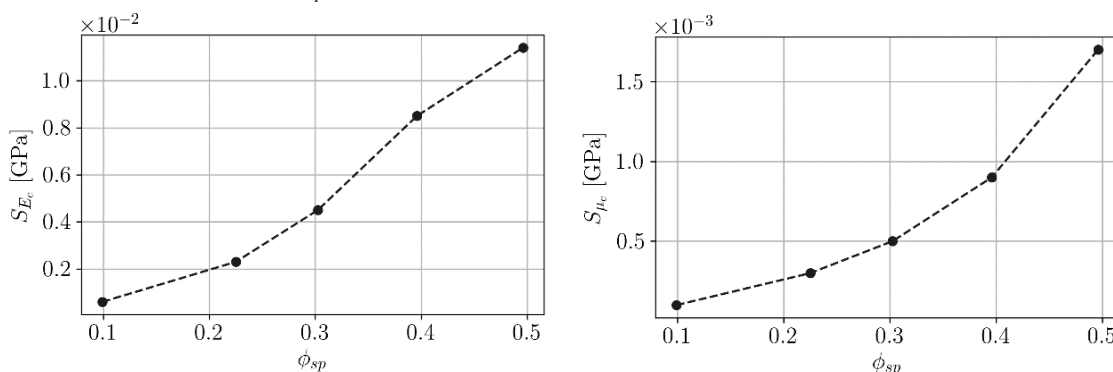


Рис.6. Среднеквадратические отклонения модуля Юнга S_{E_c} и коэффициента Пуассона S_{μ_c} .

5.2. Сравнение с экспериментальными данными.

Для композита, рассмотренного в п.5.1, в работе [47] представлены экспериментальные данные. На рис.7 отражено сравнение экспериментальных данных и численного решения, полученного с помощью метода гомогенизации. В области больших концентраций видна большая погрешность предсказания модели.

Таким образом, при малых концентрациях решение задачи идентификации свойств армирующей фазы невозможно из-за слабой устойчивости решения, а при больших концентрациях невозможно из-за большой погрешности метода гомогенизации.

Таким образом, для получения качественного решения задачи обратной гомогенизации необходима более точная модель композита.

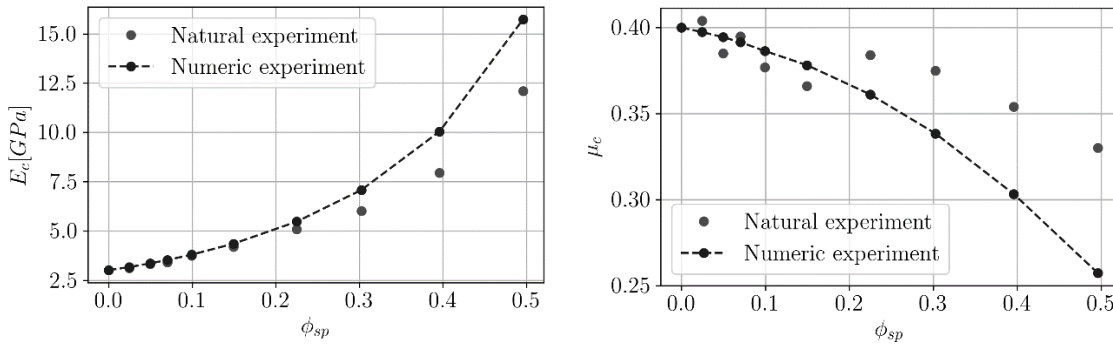


Рис.7. Сравнение результатов решения задачи прямой гомогенизации с результатами эксперимента.

5.3. Идентификация свойств адгезионного слоя.

Исходя из проведенных исследований можно сделать следующий вывод. С ростом концентрации растет площадь соприкосновения фаз исследуемого КМ. С ростом площади соприкосновения фаз растет вклад в напряженно-деформированное состояние эффектов, связанных с механикой адгезионного слоя между фазами.

Сформулируем задачу идентификации свойств адгезионного слоя

$$\|\mathcal{H}_1^{(3)}(\mathbf{P}^{ad}) - \mathbf{P}_\delta^{exp}\|_2^2 \xrightarrow{\mathbf{P}^{*,ad}} \min; \quad (35)$$

где $\mathbf{P}^{ad} = (E^{ad}, \mu^{ad})^T$ – вектор упругих свойств адгезионного слоя в предположении, что слой изотропен; \mathbf{P}_δ^{exp} – вектор средних упругих свойств композита в целом, полученный экспериментально; $\mathbf{P}^{*,ad}$ – вектор оптимальных упругих свойств адгезионного слоя.

Поставленная задача (35) была решена для концентрации $\phi_{sp} = 0.5$, и с полученными свойствами \mathbf{P}^{ad} были решены прямые задачи с учетом адгезионного слоя с полученными свойствами при различных концентрациях. Результаты решения задач прямой гомогенизации с учетом адгезионного слоя имеют малые отклонения от экспериментальных данных при всех рассмотренных концентрациях (рис.8).

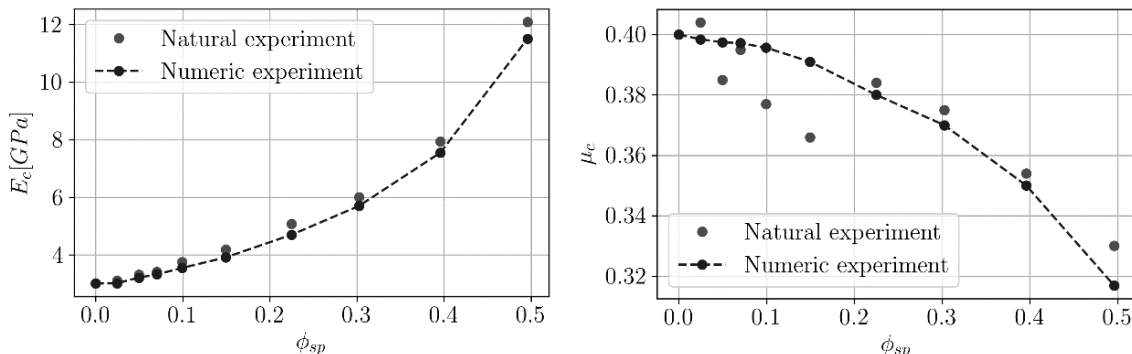


Рис.8. Сравнения численных результатов решения задачи прямой гомогенизации с учетом адгезионного слоя с экспериментальными данными.

Решение задачи идентификации свойств адгезионного слоя для других концентраций приводило к примерно тем же свойствам адгезионного слоя (Таблица 3).

Таблица 3.

Решения задачи идентификации свойств адгезионного слоя при различных концентрациях микросфер.

Концентрация, ϕ_{sp} , %	0.5	0.4	0.3
Свойства адгезионного слоя, $\mathbf{P}^{ad} = (E^{ad}, \mu^{ad})^T, ([\text{ГПа}], [\text{б/р}])^T$	(0.399, 0.499)	(0.431, 0.498)	(0.427, 0.497)

В результате применения метода асимптотического осреднения с учетом адгезионного слоя максимальное отклонения результатов вычислительного и натурного экспериментов удалось снизить с 21% до 3%.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В рамках исследования была разработана вычислительная методика решения задачи идентификации упругих свойств отдельных изотропных компонент исследуемых композитных материалов на основе известных свойств КМ, получаемых экспериментально.

Предложена численная методика анализа устойчивости рассматриваемых задач к погрешностям в исходных экспериментальных данных. Показано, что при малых концентрациях микросфер решение задачи идентификации свойств армирующей фазы невозможно из-за слабой устойчивости решения.

Предложена математическая модель упругого межфазного слоя на основе включения в исходную модель КМ дополнительной изотропной объемной компоненты с неизвестными свойствами, которые идентифицируются с использованием предложенной вычислительной методики.

Проведено сравнительное исследование численных результатов, получаемых с помощью метода гомогенизации при учете модели межфазного слоя для исследуемых КМ и без него при различных объемных концентрациях включений. Показано, что применение метода асимптотического осреднения для расчета эффективных упругих характеристик дисперсно-армированных КМ без учёта модели межфазного слоя приводит к существенным расхождениям с экспериментом при объемных концентрациях включений больших 20%.

Согласно полученным результатам применять предлагаемый в работе подход следует, если есть возможность изготовления образцов КМ с долей включений около 30% и более. В этом случае результаты экспериментальных исследований с такими образцами могут использоваться для постановки и решения задачи обратной гомогенизации для идентификации характеристик «виртуального» адгезионного слоя. Далее, полученные свойства адгезионного слоя могут использоваться в трехкомпонентной модели дисперсно-армированного композита на основе сферических включений, с последующим расчетом его эффективных упругих характеристик методом асимптотического осреднения при различных объемных долях наполнителя без проведения дополнительных испытаний.

Разработана вычислительная методика расчета эффективных упругих свойств КМ на основе метода асимптотического осреднения с учетом адгезионного слоя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Buryachenko V. *Micromechanics of Heterogeneous Materials*. – Springer, 2007. – 687 p.
2. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П. *Осреднение процессов в периодических средах*. – М. Наука, 1984. – 352 с.
3. Победря Б.Е. *Механика композиционных материалов*. – М.: МГУ, 1984. – 336 с.
4. Christensen R. *Mechanics of Composite Materials*. – John Wiley and Sons, 1979. – 348 p.
5. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций*. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
6. Ван Фо Фы. *Конструкции из армированных пластмасс*. – Киев: Техника, 1971. – 220 с.
7. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Система автоматизированного прогнозирования свойств композиционных материалов // Информационные технологии. – 2008. – №8. – С.31-38.
8. Horstemeyer M., Leszczynski J., Shukla M. *Multiscale Modeling: A Review* // In: Practical Aspects of Computational Chemistry. – Springer, 2010. – Pp.87-135.
9. Panasenko G. *Multi-scale modelling for structures and composites*. – Springer, 2005. – 407 p.
10. Vasiliev V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. – Elsevier, 2013. – 816 p.
11. Ronald F., Gibson. *Principles of Composite Material Mechanics. Third edition*. – CRC Press, Taylor & Francis Group, 2013. – 659 p.
12. Robert M. Jones. *Mechanics of Composite Materials. Second Edition*. – Taylor & Francis, 1999. – 270 p.
13. Aboudi J., Arnold S.M., Bednarczyk B.A. *Micromechanics of Composite Materials. A Generalized Multiscale Analysis Approach*. – Butterworth-Heinemann: Elsevier, 2013. – 1011 p.
14. Bensoussan A., Papanicolau G., Lions L.J. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*. – North-Holland Publishing Company, 1978. – 699 p.
15. Dimitrienko Y.I., Sokolov A.P. *Elastic properties of composite materials* // Mathematical Models and Computer Simulations. – 2010. – Vol.2. – No.1. – Pp.116-130.
16. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. Численное моделирование композиционных материалов с многоуровневой структурой // Известия РАН. Физическая серия. – 2011. – Т.75. – №11. – С.1551-1556.
17. Басистов Ю.А., Яновский Ю.Г. Иерархически-адаптивная модель для идентификации уравнений состояния вязкоупругих сред. // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1996. – Т.2. – №3-4. – С.24-58.
18. Басистов Ю.А., Яновский Ю.Г. Развитие метода идентификации интегральных нелинейных моделей вязкоупругих сред на базе нелинейной «демпинг-функции» // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2012. – Т.18. – №4. – С.580-594.
19. Schnur D. S., Zabaraz N. *An inverse method for determining elastic material properties and a material interface* // Intern. J. for Numerical Methods in Engineering. – 1992. – Vol.33. – No.10. – Pp.2039-2057.

20. Burczynski T., Kus W. *Microstructure Optimization and Identification in Multiscale Modelling* / ECCOMAS Multidisciplinary Jubilee Symposium: New Computational Challenges in Materials, Structures, and Fluids. – 2009. – Pp.169-181.
21. Cherkaev E. *Inverse homogenization for evaluation of effective properties of a mixture* // Inverse Problems. – 2001. – Vol.17. – No.4. – Pp.1203.
22. Jamaian S., Mackay T. *On limitations of the Bruggeman formalism for inverse homogenization* // J. of Nanophotonics. – 2010. – Vol.4. – No.1. – Pp.043510-043510.
23. Weiglhofer W. *On the inverse homogenization problem of linear composite materials* // Microwave and Optical Technology Letters. – 2001. – Vol.28. – No.6. – Pp.421-423.
24. Bottauscio O., Chiampi M., Manzin A. *Determination of the electromagnetic properties in magnetic composite materials by inverse homogenisation* // J. of Magnetism and Magnetic Materials. – 2008. – Vol.320. – No.20. – Pp.547-550.
25. Chafra M., Smaoui H., Arfa D. *Identification of mechanical properties and damage of composites at the mesoscale based on an inverse method coupled with homogenization* // J. of Composite Materials. – 2010. – Vol.44. – No.5. – Pp.529-541.
26. Згаевский В.Э., Яновский Ю.Г., Власов А.Н., Балабаев Н.К., Карнет Ю.Н. *Структура и микромеханические свойства межфазных слоёв полимерных матричных композитов* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 1999. – Т.5. – №2. – С.109-122.
27. Образцов И.Ф., Яновский Ю.Г., Згаевский В.Э., Власов А.Н. *Коэффициенты Пуассона межфазных слоёв полимерных композитов* // Доклады академии наук – 2001. – Т.378. – №3. – С.336-338.
28. Образцов И.Ф., Яновский Ю.Г., Згаевский В.Э. *Механические свойства межфазных слоев полимерных матричных композитов при больших упругих деформациях* // Доклады Академии наук – 2003. – Т.389. – №5. – С.621-623.
29. Ватульян А.О. *Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела*. – М: Физматлит, 2007. – 223 с.
30. Ватульян А.О., Соловьев А. Н. *Прямые и обратные задачи для однородных и неоднородных упругих и электроупругих тел*. – Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2008. – 176 с.
31. Nolen J., Pavliotis G., Stuart-Andrew M. *Multiscale Modelling and Inverse Problems* – Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2012. – 34 p.
32. Басистов Ю.А., Яновский Ю.Г. *Некорректные задачи в механике (реологии) вязкоупругих сред и их регуляризация*. // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2010. – Т.16. – №1. – С.117-143.
33. Yi Y., Park S., Youn S. *Design of microstructures of viscoelastic composites for optimal damping characteristics* // Intern. J. of Solids and Structures. – 2000. – Vol.37. – No.35. – Pp.4791-4810.
34. Li Q., Zhou S. *The Design of Functional Gradient Materials with Inverse Homogenization Method* // Frontiers in Materials Science and Technology. – 2008. – Vol.32. – No.3. – Pp.245-250.
35. Schmidt U., Mergheim J., Steinmann P. *Computational homogenization and parameter-identification for heterogeneous inelastic materials* // PAMM. – 2011. – Vol.11. – №1. – Pp.951-954.

36. Schmidt U., Mergheim J., Steinmann P. *Identification of elastoplastic microscopic material parameters within a homogenization scheme* // Intern. J. for Numerical Methods in Engineering. – 2015. – Vol.104. – No.6. – Pp.391–407.
37. Klinge S., Steinmann P. *Inverse analysis for heterogeneous materials and its application to viscoelastic curing polymers* // Computational Mechanics. – 2015. – Vol.55. – No.3. – Pp.603-615.
38. Sigmund O. *Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem* // Intern. J. of Solids and Structures. – 1994. – Vol.31. – No.17. – Pp.2313-2329.
39. Ватульян А.О., Соловьев А.Н., Спожакин А.С., Шевцов С.Н. *Реконструкция дефектов в слоистых композитах* // Вестник ДГТУ. – 2009. – Т.9. – №2. – С.3-14.
40. Gavrus A., Massoni E., Chenot J. *An inverse analysis using a finite element model for identification of rheological parameters* // J. of Materials Processing Technology. – 1996. – Vol.60. – No.1. – Pp.447-454.
41. Ватульян А. О. *О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел* // Доклады РАН. – 2008. – Т.422. – С.182-184.
42. Ватульян А.О. *О вариационном подходе при исследовании обратных коэффициентных задач в теории упругости* // Владикавказский математический журнал. – 2009. – Vol.11. – №1. – Pp.3-8.
43. Bendsoe M., Ben-Tal A., Zowe J. *Optimization methods for truss geometry and topology design* // Structural optimization. – 1994. – Vol.7. – No.3. – Pp.141-159.
44. Schmidt U., Steinmann P., Mergheim J. *Two-scale elastic parameter identification from noisy macroscopic data* // Archive of Applied Mechanics. – 2016. – Vol.86. – No.1. – Pp.303-320.
45. Legoll F., Minvielle W., Obliger A., Simon M. *A parameter identification problem in stochastic homogenization* // ESAIM. – 2015. – Vol.48. – Pp.190-214.
46. Efendiev Y., Kronsbein C., Legoll F. *Multilevel Monte Carlo Approaches for Numerical Homogenization* // Multiscale Modeling & Simulation. – 2015. – Vol.13. – No.4. – Pp.1107-1135.
47. Icardi M., Boccardo G., Tempone R. *On the predictivity of pore-scale simulations: Estimating uncertainties with multilevel Monte Carlo* // Advances in Water Resources. – 2016. – Vol.95. – Pp.46-60.
48. Brown D., Hoang V. *A hierarchical finite element Monte Carlo method for stochastic two-scale elliptic equations* // J. of Computational and Applied Mathematics. – 2017. – Vol.323. – Pp.16-35.
49. Kang Y., Lin X., Qin Q. *Inverse/genetic method and its application in identification of mechanical parameters of interface in composite* // Composite Structures. – 2004. – Vol.66. – No.1. – Pp.449-458.
50. Измаилов А.Ф. Солодов М.В. *Численные методы оптимизации: Учеб. пособие.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.
51. Победря Б.Е., Горбачев В.И. *О статических задачах упругих композитов.* // Вестник Московского университета. Серия математика, механика. – 1977. – №5. – С.101-110.
52. Димитриенко Ю.И., Соколов А.П. *Разработка численного метода расчета эффективных упругих характеристик композиционных материалов* // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Естественные науки. – 2008. – №2. – С.56-57.
53. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела.* – М.: Гостехиздат, 1950. – 416 с.

54. Соколов А.П., Щетинин В.Н., Сапелкин А.С. *Параллельный алгоритм построения поверхности прочности КМ для архитектуры Intel MIC (Intel Many Integrated Core Architecture)* // Программные системы: теория и приложения. – 2016. – Т.7. – №1. – С.61-88.
55. Broutman L., Agarwal B. *A theoretical study of the effect of an interfacial layer on the properties of composites* // Polymer Engineering and Science. – 1974. – Vol.14. – No.8. – Pp.581-588.
56. Gonçalves J.P.M, de Moura M.F.S.F, de Castro P.M.S.T. *A three-dimensional finite element model for stress analysis of adhesive joints* // Intern. J. of Adhesion and Adhesives. – 2002. – Vol.22. – No.5. – Pp.357-365.
57. Kaminski M, Kleiber M. *Numerical homogenization of N-component composites including stochastic interface defects* // Intern. J. for Numerical Methods in Engineering. – 2000. – Vol.47. – No.5. – Pp.1001-1027.
58. Fisher F., Brinson L. *Viscoelastic interphases in polymer–matrix composites: theoretical models and finite-element analysis* // Composites Science and Technology. – 2001. – Vol.61. – No.5. – Pp.731-748.
59. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. – М: Наука, 1986. – 285 с.
60. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. *Численные методы решения обратных задач математической физики*. – М: Эдиториал УРСС, 2004. – 480 с.
61. Smith J. *Experimental values for the elastic constants of a particulate-filled glassy polymer* // J. Res. NBS. – 1976. – No.80A. – Pp.45-49.

REFERENCES

1. Buryachenko V.A. *Micromechanics of Heterogeneous Materials*. Springer, 2007, 687 p.
2. Bakhvalov N.S. Panasenko G.P. *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh [Averaging processes in periodic media]*. Moskva, Nauka, 1984, 352 p.
3. Pobedria B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov [Mechanics of composite materials]*. Moskva, MGU, 1984, 336 p.
4. Christensen R. *Mechanics of Composite Materials*. John Wiley and Sons, 1979, 348p.
5. Bolotin V.V., Novichkov Iu.N. *Mekhanika mnogoslownykh konstruksii [Mechanics of laminated constructions]*. Moskva, Mashinostroenie, 1980, 375 p.
6. Van Fo Fy *Konstruksii iz armirovannykh plastmass [Structures of reinforced plastics]*. Kiev, Tekhnika, 1971, 220 p.
7. Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Sistema avtomatizirovannogo prognozirovaniia svoistv kompozitsionnykh materialov [System for automated calculation of composites characteristics]*. Informatsionnye tekhnologii, 2008, No.8, Pp.31-38.
8. Horstemeyer M.F., Leszczynski J., Shukla M.K. *Multiscale Modeling: A Review. Practical Aspects of Computational Chemistry*, Springer, 2010, Pp.87-135.
9. Panasenko G. *Multi-scale modelling for structures and composites*. Springer, 2005, 407 p.
10. Vasiliev V., Morozov E. *Advanced Mechanics of Composite Materials and Structural Elements*. Elsevier, 2013, 816 p.
11. Gibson R.F. *Principles of Composite Material Mechanics. Third edition*. CRC Press, Taylor & Francis Group, 2013, 659 p.

12. Jones R.M. *Mechanics of Composite Materials. Second Edition.* Taylor & Francis, 1999, 270 p.
13. Aboudi J., Arnold S.M., Bednarczyk B.A. *Micromechanics of Composite Materials. A Generalized Multiscale Analysis Approach.* Butterworth-Heinemann, Elsevier, 2013, 1011 p.
14. Bensoussan A., Papanicolau G., Lions L.J. *Asymptotic Analysis for Periodic Structures.* North-Holland Publishing Company, 1978, 699 p.
15. Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Elastic properties of composite materials // Mathematical Models and Computer Simulations*, 2010, Vol.2, No.1, Pp.116-130.
16. Dimitrienko Yu.I., Sokolov A.P. *Numerical Modeling of Composites with Multiscale Microstructure // Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Physics*, 2011, Vol.75, No.11, Pp.1457-1461.
17. Basistov Yu.A., Yanovsky Yu.G. *Ierarkhicheski-adaptivnaia model' dlia identifikatsii uravnenii sostoianiiia viazkouprugikh sred [Hierarchical-adaptive model for the identification of equations of state of viscoelastic media].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 1996, Vol.2, No.3-4, Pp.24-58.
18. Basistov Yu.A., Yanovsky Yu.G. *Razvitie metoda identifikatsii integral'nykh nelineinykh modelei viazkouprugikh sred na baze nelineinoi «demping-funktsii» [Development of the method of identification of integral nonlinear models of viscoelastic media on the basis of a nonlinear "dumping function"].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2012, Vol.18, No.4, Pp.580-594.
19. Schnur D., Zabarav N. *An inverse method for determining elastic material properties and a material interface.* Intern. J. for Numerical Methods in Engineering, 1992, Vol.33, No.10, Pp.2039-2057.
20. Burczynski T., Kus W. *Microstructure Optimization and Identification in Multi-scale Modelling.* ECCOMAS Multidisciplinary Jubilee Symposium "New Computational Challenges in Materials, Structures, and Fluids", 2009, Pp.169-181.
21. Cherkaev E. *Inverse homogenization for evaluation of effective properties of a mixture.* Inverse Problems, 2001, Vol.17, No.4, Pp.1203.
22. Jamaian S., Mackay T. *On limitations of the Bruggeman formalism for inverse homogenization.* J. of Nanophotonics, 2010, Vol.4, No.1, Pp.043510-043510.
23. Weiglhofer W. *On the inverse homogenization problem of linear composite materials.* Microwave and Optical Technology Letters, 2001, Vol.28, No.6, pp.421-423.
24. Bottauscio O., Chiampi M., Manzin A. *Determination of the electromagnetic properties in magnetic composite materials by inverse homogenization.* J. of Magnetism and Magnetic Materials, 2008, Vol.320, No.20, Pp.547-550.
25. Chafra M., Smaoui H., Arfa D. *Identification of Mechanical Properties and Damage of Composites at the Mesoscale based on an Inverse Method Coupled with Homogenization.* J. of Composite Materials, 2010, Vol.44, No.5, Pp.529-541.
26. Zgaevskiy V.E., Yanovsky Yu.G., Vlasov A.N., Balabaev N.K., Karnet Yu.N. *Struktura i mikromekhanicheskie svoistva mezhfaznykh sloev polimernykh matrichnykh kompozitov [Structure and micromechanical properties of interphase layers of polymer matrix composites].* Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 1999, Vol.5, No.2, Pp.109-122.
27. Obraztsov I.F., Yanovsky Yu.G., Zgaevskii V.E., Vlasov A.N. *Koeffitsienty Puassona mezhfaznykh sloev polimernykh kompozitov [Poisson's coefficients of interphase layers of polymer composites].* Doklady Physics, 2001, Vol.378, No.3, Pp.336-338.

28. Obratstov I.F., Yanovsky Yu.G., Zgaevsky V.E. *Mechanical properties of interface layers in polymer matrix composites for large elastic deformations*. Doklady Physics, 2003, Vol.48, No.4, Pp.191-193.
29. Vatul'ian A.O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela [Inverse problems in the mechanics of a deformed solid]*. Moskva: Fizmatlit, 2007, 223 p.
30. Vatul'ian A.O., Solov'ev A.N. *Priamye i obratnye zadachi dlia odnorodnykh i neodnorodnykh uprugikh i elektrouprugikh tel [Direct and inverse problems for homogeneous and inhomogeneous elastic and electroelastic bodies]*. Rostov-na-Donu, Izd-vo Iuzhnogo federal'nogo universiteta, 2008, 176 p.
31. Nolen J., Pavliotis G., Stuart-Andrew M. *Multiscale Modelling and Inverse Problems*. Berlin, Heidelberg, Springer Berlin Heidelberg, 2012, 34 p.
32. Basistov Yu.A., Yanovsky Yu.G. *Nekorrektnye zadachi v mekhanike (reologii) viazkouprugikh sred i ikh regularizatsiia [Ill-posed problems in the mechanics (rheology) of viscoelastic media and their regularization]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2010, Vol.16, No.1, Pp.117-143.
33. Yi Y., Park S., Youn S. *Design of microstructures of viscoelastic composites for optimal damping characteristics*. Intern. J. of Solids and Structures, 2000, Vol.37, No.35, Pp.4791-4810.
34. Li Q., Zhou S. *The Design of Functional Gradient Materials with Inverse Homogenization Method*. Frontiers in Materials Science and Technology, 2008, Vol.32, No.3, Pp.245-250.
35. Schmidt U., Mergheim J., Steinmann P. *Computational homogenization and parameter-identification for heterogeneous inelastic materials*. PAMM, 2011, Vol.11, No.1, Pp.951-954.
36. Schmidt U., Mergheim J., Steinmann P. *Identification of elastoplastic microscopic material parameters within a homogenization scheme*. Intern. J. for Numerical Methods in Engineering, 2015, Vol.104, No.6, Pp.391-407.
37. Klinge S., Steinmann P. *Inverse analysis for heterogeneous materials and its application to viscoelastic curing polymers*. Computational Mechanics, 2015, Vol.55, No.3, Pp.603-615.
38. Sigmund O. *Materials with prescribed constitutive parameters: An inverse homogenization problem*. Intern. J. of Solids and Structures, 1994, Vol.31, No.17, Pp.2313-2329.
39. Vatul'ian A.O., Solov'ev A.N., Spozhakin A.S., Shevtsov S.N. *Rekonstruktsiia defektov v sloistyykh kompozitakh [Reconstruction of defects in layered composites]*. Vestnik DGTU, 2009, Vol.9, No.2, Pp.3-14.
40. Gavrus A., Massoni E., Chenot J. *An inverse analysis using a finite element model for identification of rheological parameters*. J. of Materials Processing Technology, 1996, Vol.60, No.1, Pp.447-454.
41. Vatul'ian A. O. *O variatsionnoi postanovke obratnykh koefitsientnykh zadach dlia uprugikh tel [On the variational formulation of inverse coefficient problems for elastic bodies]*. Doklady RAN, 2008, Vol.422, Pp.182-184.
42. Vatul'ian A.O. *O variatsionnom podkhode pri issledovanii obratnykh koefitsientnykh zadach v teorii uprugosti [On the variational approach in the study of inverse coefficient problems in the theory of elasticity]*. Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal, 2009, Vol.11, No.1, Pp.3-8.
43. Bendsoe M., Ben-Tal A., Zowe J. *Optimization methods for truss geometry and topology design*. Structural optimization, 1994, Vol.7, No.3, Pp.141-159.

44. Schmidt U., Steinmann P., Mergheim J. *Two-scale elastic parameter identification from noisy macroscopic data*. Archive of Applied Mechanics, 2016, Vol.86, No.1, Pp.303-320.
45. Legoll F., Minvielle W., Obliger A., Simon M. *A parameter identification problem in stochastic homogenization*. ESAIM, 2015, Vol.48, Pp.190-214.
46. Efendiev Y., Kronsbein C., Legoll F. *Multilevel Monte Carlo Approaches for Numerical Homogenization*. Multiscale Modeling & Simulation, 2015, Vol.13, No.4, Pp.1107-1135.
47. Icardi M., Boccardo G., Tempone R. *On the predictivity of pore-scale simulations: Estimating uncertainties with multilevel Monte Carlo*. Advances in Water Resources, 2016, Vol.95, Pp.46-60.
48. Brown D., Hoang V. *A hierarchical finite element Monte Carlo method for stochastic two-scale elliptic equations*. J. of Computational and Applied Mathematics, 2017, Vol.323, Pp.16-35.
49. Kang Y., Lin X., Qin Q. *Inverse/genetic method and its application in identification of mechanical parameters of interface in composite*. Composite Structures, 2004, Vol.66, No.1, Pp.449-458.
50. Izmailov A.F. Solodov M.V. *Chislennye metody optimizatsii: Ucheb. Posobie [Numerical optimization methods]*. Moskva, FIZMATLIT, 2005, 304 p.
51. Pobedria B.E., Gorbachev V.I. *O staticheskikh zadachakh uprugikh kompozitov [On static problems of elastic composites]*. Bulletin of Moscow University, A series of mathematics, mechanics, 1977, No.5, Pp.101-110.
52. Dimitrienko Iu.I., Sokolov A.P. *Razrabotka chislennogo metoda rascheta effektivnykh uprugikh kharakteristik kompozitsionnykh materialov [Development of a numerical method for calculating the effective elastic characteristics of composite materials]*. Vestnik MGTU im. N.E. Baumana. Estestvennye nauki, 2008, No.2, Pp.56-57.
53. Lekhnitskii S.G. *Teoriia uprugosti anizotropnogo tela [The theory of elasticity of an anisotropic body]*. Moskva, Gostekhizdat, 1950, 416 p.
54. Sokolov A.P., Shchetinin V.N., Sapelkin A.S. *Parallel'nyi algoritm postroeniia poverkhnosti prochnosti KM dlia arkhitektury Intel MIC (Intel Many Integrated Core Architecture) [Parallel algorithm for calculating the CM strength surface for the Intel MIC architecture(Intel Many Integrated Core Architecture)]*. Programmnye sistemy: teoriia i prilozheniia, 2016, Vol.7, No.1, Pp.61-88.
55. Broutman L., Agarwal B. *A theoretical study of the effect of an interfacial layer on the properties of composites*. Polymer Engineering and Science, 1974, Vol.14, No.8, Pp.581-588.
56. Goncalves J.P.M., de Moura M.F.S.F., de Castro P.M.S.T. *A three-dimensional finite element model for stress analysis of adhesive joints*. Intern. J. of Adhesion and Adhesives, 2002, Vol.22, No.5, Pp.357-365.
57. Kaminski M., Kleiber M. *Numerical homogenization of N-component composites including stochastic interface defects*. Intern. J. for Numerical Methods in Engineering, 2000, Vol.47, No.5, Pp.1001-1027.
58. Fisher F., Brinson L. *Viscoelastic interphases in polymer-matrix composites: theoretical models and finite-element analysis*. Composites Science and Technology, 2001, Vol.61, No.5, Pp.731-748.
59. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ia. *Metody resheniia nekorrektnykh zadach [Methods for solving ill-posed problems]*. Moskva, Nauka, 1986, 285 p.

60. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. [*Numerical Methods for Solving Inverse Problems of Mathematical Physics*]. Moskva, Editorial URSS, 2004, 480 p.
61. Smith J. *Experimental values for the elastic constants of a particulate-filled glassy polymer*. J. Res. NBS, 1976, No.80A, Pp.45-49.

Поступила в редакцию 10 октября 2017 года.

Сведения об авторах:

Соколов Александр Павлович – к.ф.-м.н., доц., доцент Кафедры «Системы автоматизированного проектирования», Московский Государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, г. Москва, Россия; e-mail: alsokolo@bmstu.ru

Щетинин Виталий Николаевич – асп. Кафедры «Системы автоматизированного проектирования», Московский Государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, г. Москва, Россия; e-mail: sch_vitaliy@mail.ru