

## **МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИХ ДВУСВЯЗНЫХ КРИВОЛИНЕЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ПЛАСТИН В ВЯЗКОЙ СРЕДЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЗРЫВНЫХ НАГРУЗОК**

Романова Т.П.

*ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики  
им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия*

### **АННОТАЦИЯ**

На основе модели идеально жесткопластического тела и структурной модели композита построено решение задачи динамического изгиба двусвязных криволинейных композитных пластин с шарнирно опертыми или защемленными контурами в вязкой среде под действием взрывных нагрузок. Пластины являются гибридными слоисто-волоконистыми с распределением слоев симметрично относительно срединной поверхности. В каждом слое находятся семейства армирующих волокон из разных материалов, расположенных в направлениях, параллельных или нормальных к внутреннему контуру пластины. Показано, что в зависимости от амплитуды нагрузки возможны две схемы деформирования пластин в виде совокупности нескольких линейчатых поверхностей, разделенных криволинейными пластическими шарнирами. Для каждой из схем получены уравнения динамического деформирования пластин на основе использования принципа виртуальной мощности в сочетании с принципом Даламбера. Проанализированы условия реализации этих механизмов деформирования. Для упрощения вычисления двойных интегралов по криволинейным областям с границами, изменяющимися во времени, введена криволинейная ортогональная система координат, связанная с уравнением внутреннего контура пластин. Проведен анализ динамического деформирования пластин под действием произвольных нагрузок взрывного типа. Определены расположение линейных поверхностей и разделяющих их пластических шарниров в момент начала движения пластины в зависимости от величины приложенной нагрузки в начальный момент времени. Определены предельная нагрузка, остаточные прогибы и время деформирования пластин. Приведены примеры численных решений для двусвязной пластины с внутренним контуром в форме эллипса при разных вариантах армирования, вязкого основания и крепления контуров при условии одинакового расхода армирующих волокон постоянной толщины. Количество параметров разработанной математической модели позволяет в широком диапазоне изменять структуру армирования пластин, объемное содержание армирующих волокон, толщину слоев и физические характеристики композита, вязкое основание, а также геометрическую форму двусвязных пластин и способы крепления контуров.

**Ключевые слова:** криволинейная армированная пластина; криволинейные волокна; жесткопластическая модель; структурная модель композита; двусвязная пластина; вязкое основание; взрывная нагрузка; предельная нагрузка

## **MODELING OF BEHAVIOR OF RIGID-PLASTIC DOUBLY-CONNECTED CURVILINEAR COMPOSITE PLATES IN VISCOUS MEDIUM UNDER ACTION OF EXPLOSION LOADS**

Romanova T.P.

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics of the Siberian Branch  
of the Russian Academy of Science, Novosibirsk, Russia*

### ABSTRACT

Based on the model of a perfectly rigid-plastic body and a structural model of the composite, the solution is constructed for dynamic bending of two-connected curvilinear composite plates with hinge-supported or clamped contours in a viscous medium under the action of explosive loads. The plates are hybrid, multilayered and fibrous with a symmetrical distribution of layers with respect to the middle surface. In each layer the reinforcing fibers of different materials are located in directions parallel or normal to the inner plate contour. It is shown that, depending on the load amplitude, two deformation schemes of the plate's deformation in the form of a set of several linear surfaces separated by curved plastic hinges are possible. For each of the schemes, the equations of the dynamic deformation of the plates are obtained on the basis of the virtual power principle in combination with the d'Alembert principle. The operating conditions of these deformation mechanisms are analyzed. To simplify the calculation of double integrals over curvilinear areas with time-varying boundaries, a curvilinear orthogonal coordinate system associated with the equation of the inner contour of the plates is introduced. The analysis of the dynamic deformation is carried out for the plates under the action of arbitrary loads of explosive type. The location of the linear surfaces and the plastic hinges separating them are determined at the moment of the beginning of the plate movement depending on the value of the applied load at the initial time. The limit load, final deflections and time of deformation of the plates are determined. Numerical examples are given for a two-connected plate with an internal contour in the form of an ellipse with different variants of reinforcement, viscous foundation and supporting of the contours under the condition of the same consumption of reinforcing fibers of constant thickness. The number of parameters of the developed mathematical model allows for a wide range to change the structure of reinforcement plates, volume content of reinforcing fibers, layer thickness and physical characteristics of the composite, viscous foundation, also the geometric shape of double-connected plates and conditions of support of the contours.

**Keywords:** curvilinear reinforced plate; curvilinear fiber; rigid-plastic model; structural model of composite; doubly-connected plate; viscous foundation; explosive load; limit load

### ВВЕДЕНИЕ

Анализ динамического поведения элементов конструкций в вязкой сопротивляющейся среде важен для оценки степени повреждаемости при воздействии на них взрывных нагрузок, а также при изучении процессов деформирования тонколистовых металлических заготовок методами импульсной штамповки. В настоящее время теоретических исследований динамического пластического деформирования армированных пластин и оболочек, несмотря на их актуальность, недостаточно [1-6]. Для решения динамических задач при взрывном типе нагрузок широкое распространение получила модель жесткопластического тела [1,7], благодаря ее простоте и удобству расчетных схем. В [1] обсуждается современное состояние расчетов неупругого динамического деформирования оболочечных конструкций слоисто-волокнутой структуры, приведено обоснование использования модели жесткопластического тела в таких задачах, а также рассмотрены достоинства и недостатки структурной модели армированного слоя [8,9]. В [10] в рамках модели жесткопластического тела оценена предельная нагрузка круглых сэндвич панелей с наполнителем из вспененного алюминия под действием квазистатической локальной нагрузки.

В [11,12] рассмотрено точное решение динамического поведения жесткопластических двусвязных однородных кольцевых пластин с закрепленными контурами при условиях пластичности Треска и Йогансена. В [13] построено приближенное решение аналогичной задачи в случае криволинейных опорных контуров и вязкоупругого сопротивления основания. В [14,15] рассмотрено предельное состояние армированных волокнами слоистых кольцевых жесткопластических пластин, закрепленных по обоим контурам. В [16] исследовано упругопластическое поведение относительно толстых армированных прямоугольных удлиненных и круглых с жесткой шайбой пластин под действием взрывных нагрузок.

Армирование элементов конструкций применяется для создания деталей, обладающих оптимальными технологическими и потребительскими свойствами. В настоящее время большой интерес представляют пластины, в которых армирующие волокна имеют криволинейную форму [17-19]. В области пластических деформаций разные виды армирования имеют свои особенности, поэтому они должны анализироваться отдельно. В настоящей работе построена модель динамического поведения жесткопластических гибридных слоистых композитных криволинейных двусвязных пластин с шарнирно опертыми или защемленными контурами. Действует динамическая нагрузка взрывного типа, равномерно распределенная по поверхности пластин. Пластины расположены на вязком основании. Армирование пластин выполнено в направлениях, параллельных (эквидистантных) и нормальных к внутреннему контуру пластины. Принято, что механические характеристики материалов, составляющих слоистый пакет, являются соразмерными (отличающимися не более чем на порядок). По толщине каждый слой имеет регулярную и квазиоднородную структуру, на границах между слоями выполняются условия идеального механического контакта. В этом случае для слоистых пластин приемлемо использование традиционных гипотез Кирхгофа-Лява.

Ранее автором изучалось динамическое поведение однородных криволинейных двусвязных пластин [13], армированных семействами угловых, радиальных и окружных волокон круглых пластин с отверстием, расположенных на вязком основании [20], армированных криволинейных пластин с закрепленным круглым отверстием [21], армированных криволинейными волокнами эллиптических пластин [22]. Настоящая работа является развитием модели деформирования, построенной в [13,22], и продолжает исследования в данном направлении применительно к слоисто-волокнистым гибридным армированным двусвязным криволинейным пластинам, закрепленным по обоим контурам, расположенным на вязком основании.

## **1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ, ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ**

Рассмотрим тонкую кирхгофовскую двусвязную композитную пластину, покоящуюся на вязком основании с коэффициентом сопротивления  $\beta$ . Пластина нагружена равномерно распределенной по поверхности взрывной нагрузкой интенсивности  $P(t)$ , которая характеризуется мгновенным достижением максимального значения  $P_{\max} = P(0)$  в начальный момент времени  $t = 0$  с последующим быстрым его уменьшением. Внешний и внутренний контуры пластины шарнирно оперты или защемлены. Прогибы пластины считаются

малыми. Влиянием мембранных сил и вертикальных сдвигов в условии пластичности и геометрическими изменениями пренебрегаем.

Пластина имеет произвольный гладкий выпуклый внутренний контур  $L_1$ , заданный в параметрической форме

$$x = x_1(\varphi), \quad y = y_1(\varphi) \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Радиус кривизны контура  $L_1$  равен

$$R(\varphi) = \frac{B^3(\varphi)}{(\partial x_1 / \partial \varphi)(\partial^2 y_1 / \partial \varphi^2) - (\partial^2 x_1 / \partial \varphi^2)(\partial y_1 / \partial \varphi)},$$

$$B(\varphi) = \sqrt{(\partial x_1 / \partial \varphi)^2 + (\partial y_1 / \partial \varphi)^2}.$$

Считаем, внешний контур  $L_2$  находится на одинаковом расстоянии  $D$  от контура  $L_1$  ( $D > 0, D = \text{const}$ ). Для определенности будем рассматривать пластины, симметричные относительно оси  $x$  (рис.1).

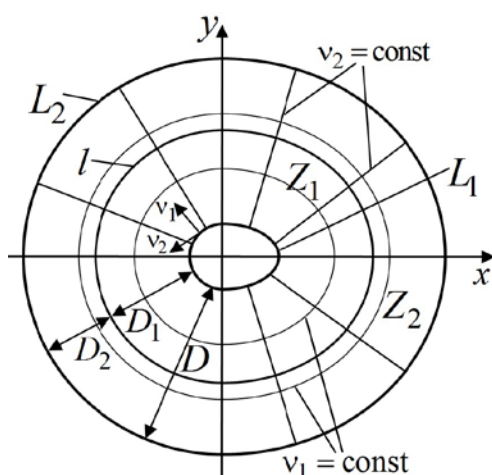


Рис.1. Криволинейная двусвязная армированная пластина. Схема деформирования 1.

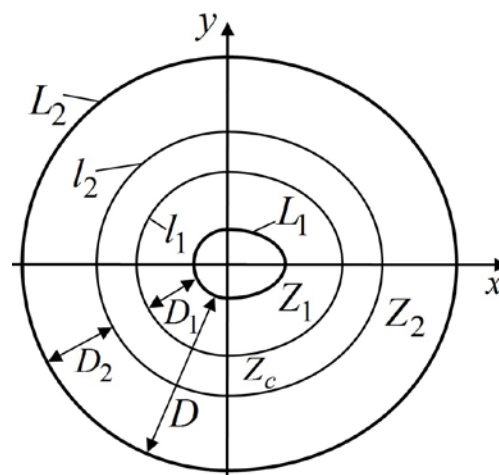


Рис.2. Криволинейная двусвязная армированная пластина. Схема деформирования 2.

Введем криволинейную ортогональную систему координат  $(v_1, v_2)$ , связанную с декартовой системой координат  $(x, y)$  соотношениями

$$x = x_1(v_2) + v_1 y_1'(v_2) / B(v_2); \quad y = y_1(v_2) - v_1 x_1'(v_2) / B(v_2), \quad (1)$$

где  $(\cdot)' = \partial(\cdot) / \partial v_2$ . Кривые  $v_1 = \text{const} \geq 0$  находятся на расстоянии  $v_1$  от контура  $L_1$  в сторону внешнего контура  $L_2$  и имеют радиус кривизны  $r_1 = R(v_2) + v_1$ . Прямые линии  $v_2 = \text{const}$  перпендикулярны контуру  $L_1$  (радиус кривизны  $r_2 = \infty$ ). Элементы длины и площади в координатах  $(v_1, v_2)$  равны

$$dl = B(v_2)[1 + v_1 / R(v_2)]dv_2; \quad ds = B(v_2)[1 + v_1 / R(v_2)]dv_1 dv_2.$$

В координатах  $(v_1, v_2)$  уравнения контуров  $L_1$  и  $L_2$  имеют вид

$$L_1: \quad v_1 = 0; \quad L_2: \quad v_1 = D \quad (0 \leq v_2 < 2\pi).$$

Угол  $\psi$  между направлением  $v_1$  и осью  $x$  и его дифференциал равны

$$\psi = -\arctg[x_1'(v_2) / y_1'(v_2)], \quad d\psi = [B(v_2) / R(v_2)]dv_2,$$

поэтому в силу симметрии пластины справедливо равенство

$$\int_0^{\pi} \frac{B(v_2)}{R(v_2)} dv_2 = \int_0^{\pi} d\psi = \pi. \quad (2)$$

Пластина выполнена из гибридного композитного материала, который является слоистым с симметричным относительно срединной поверхности пластины распределением слоев. Предполагается, что каждый слой пластины содержит по толщине большое количество армированных элементарных слоев и связующих их изотропных прослоек. В разных слоях материалы арматуры и связующего в общем случае различные, все они описываются моделью идеального жесткопластического материала. В каждом слое возможно расположение волокон арматуры в параллельном (по линиям  $v_1 = \text{const}$ ) и нормальном (по линиям  $v_2 = \text{const}$ ) направлении к контуру  $L_1$ . Структура армирования пластины из одних и тех же компонентов может иметь разный вид за счет взаимной перестановки армированных слоев.

Для рассматриваемой пластины приведенная поверхностная плотность материала пластины равна

$$\rho(v_1) = 2 \sum_{k=1}^n \rho_k (h_k - h_{k-1}), \quad \rho_k = (1 - \omega_{1k} - \omega_{2k}) \rho_{0k} + \omega_{1k} \rho_{1k} + \omega_{2k} \rho_{2k}, \quad (3)$$

где  $n$  – половина общего количества слоев;  $\rho_{0k}$  – плотность связующего материала в  $k$ -м слое;  $\rho_{1k}$  – плотность материала арматуры в  $k$ -м слое в направлении, нормальном к контуру пластины  $L_1$  (вдоль линий  $v_2 = \text{const}$ ; см. рис.1);  $\rho_{2k}$  – плотность материала арматуры в  $k$ -м слое в направлении, параллельном контуру пластины  $L_1$  (вдоль линий  $v_1 = \text{const}$ );  $\omega_{jk}(v_1)$  – плотность армирования (относительное объемное содержание волокон в слое) в  $k$ -м слое вдоль линий  $v_{3-j} = \text{const}$  ( $j=1,2$ ), в общем случае, зависящая от  $v_1$ ;  $h_k$  – координаты раздела слоев;  $h_0 = 0$ ;  $h_n = H$ ;  $2H$  – толщина пластины. Считаем армирование таким, что функция  $\rho(v_1)$  является непрерывной и ограниченной.

Для рассматриваемого вида армирования предельные изгибающие моменты  $M_{01}$ ,  $M_{02}$  (погонные), нормальные и тангенциальные к контуру  $L_1$  в рамках структурной модели армированного слоя [8,9] из жесткопластических компонентов равны

$$M_{0j}(v_1) = \sum_1^n \sigma_{0jk}(v_1)(h_k^2 - h_{k-1}^2); \quad (j=1,2) \quad (4)$$

$$\sigma_{0jk}(v_1) = [1 - \omega_{jk}(v_1)] \sigma_{0k} + \omega_{jk}(v_1) \sigma_{jk},$$

где  $\sigma_{0k}$  – предел текучести связующего в  $k$ -м слое;  $\sigma_{jk}$  – предел текучести материала арматуры, расположенной вдоль направлений  $v_j$  в  $k$ -м слое.

В динамике рассматриваемой пластины из жесткопластического материала в зависимости от значения  $P_{\max}$  возможно, как и в [13], существование двух схем деформирования. При нагрузках, не превышающих предельные нагрузки (“низких” нагрузках), пластина остается в покое. При нагрузках, незначительно превышающих предельные нагрузки (“средних” нагрузках), во внутренней области пластины образуется криволинейный пластический шарнир  $l$ , а вся пластина деформируется в две конусообразные поверхности  $Z_1$  и  $Z_2$  (схема 1,

представленная на рис.1). При достаточно высоких значениях  $P_{\max}$  динамика пластины может сопровождаться возникновением области интенсивного пластического деформирования  $Z_c$ , движущейся поступательно (схема 2, представленная на рис.2; “высокие” нагрузки). Область  $Z_c$  ограничена пластическими шарнирами  $l_1$  и  $l_2$ , при этом нормаль к  $L_i$  ( $i=1,2$ ), опущенная внутрь пластины, попадает на  $l_i$ . Как и в работе [13], из непрерывности скоростей на границе областей следует, что расстояние  $D_i$  по нормали к  $L_i$  между  $L_i$  и  $l_i$  ( $i=1,2$ ) зависит только от времени, тогда уравнения  $l_i$  в координатах  $(v_1, v_2)$  имеют вид

$$l_1: v_1 = D_1(t); \quad l_2: v_1 = D - D_2(t) \quad (0 \leq v_2 < 2\pi). \quad (5)$$

## 2. ВЫВОД УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ПЛАСТИНЫ

Уравнения движения пластины выведем из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [23]

$$K = A - N; \quad (6)$$

$$K = \iint_S \rho \dot{u} \dot{u}^* ds; \quad A = \iint_S [P(t) - \beta \dot{u}] \dot{u}^* ds; \quad (7)$$

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m [\theta^*]_{l_m} dl_m + \iint_S (M_{01} |k_1^*| + M_{02} |k_2^*|) ds. \quad (8)$$

Здесь  $K$  и  $A$  – мощности инерционных и внешних сил;  $N$  – мощность внутренних сил (скорость диссипации энергии пластической деформации);  $S$  – площадь пластины;  $u$  – прогиб;  $\beta$  – коэффициент вязкого сопротивления основания;  $m$  – количество линий разрыва поля скоростей;  $l_m$  – линии разрыва поля скоростей пластины;  $[\theta]_{l_m}$  – разрыв скорости угла поворота плоскости пластины на  $l_m$ ;  $M_m$  – нормальный изгибающий момент на  $l_m$ ;  $dl_m$  – элемент линии  $l_m$ ;  $k_1, k_2$  – главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины. Величины с верхним индексом “\*” – допустимые скорости;  $(\dot{\bullet}) = \partial(\bullet)/\partial t$ . В случае действия ударных волн на корабельные конструкции коэффициент  $\beta$  принимают равным  $\rho_s c$ , где  $\rho_s$  – плотность среды,  $c$  – скорость звука [24].

Обозначим скорость прогиба в области  $Z_c$  через  $\dot{w}_c(t)$ . В силу непрерывности скоростей на границах областей  $Z_c$  и  $Z_i$  ( $i=1,2$ ) и независимости  $D_i$  от параметра  $v_2$ , скорость угла поворота областей  $Z_i$  вокруг опорного контура  $L_i$  не зависит от параметра  $v_2$ . Обозначим ее через  $\dot{\alpha}_i(t)$ . В случае схемы деформирования 1, когда выполняется равенство

$$D_1(t) + D_2(t) = D \quad (9)$$

и область  $Z_c$  вырождается в кривую  $l$ , а линии  $l_1$  и  $l_2$  совпадут с  $l$ , поэтому уравнение  $l$  имеет вид (5) при условии (9). Следовательно, при схеме 1 скорость угла поворота областей  $Z_i$  вокруг опорного контура  $L_i$  также не зависит от параметра  $v_2$ . Обозначим ее тоже через  $\dot{\alpha}_i(t)$ .

Скорости прогибов  $u(x, y, t)$  в разных областях пластины будут представлены следующим образом (рис.3)

$$(x, y) \in Z_c : \dot{u}(x, y, t) = \dot{w}_c(t), \quad (10)$$

$$(x, y) \in Z_i : \dot{u}(x, y, t) = \dot{\alpha}_i(t) d_i(x, y), \quad (i=1, 2) \quad (11)$$

где  $d_i(x, y)$  – расстояния от точки  $(x, y) \in Z_i$  до кривой  $L_i$  по нормали к  $L_i$ ; в координатах  $(v_1, v_2)$  они равны

$$d_1 = v_1; \quad d_2 = D - v_1.$$

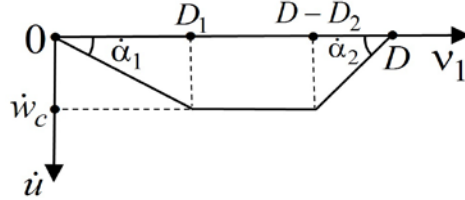


Рис.3. Скорости прогибов пластины в сечении  $v_1 = \text{const}$ .

Деформирование по схеме 2 является общим вариантом движения, так как при вырождении области  $Z_c$  схема 2 переходит в схему 1. Рассмотрим схему 2.

Главные кривизны поверхности скоростей прогибов в областях  $Z_i$  равны

$$\kappa_{1i} = -\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial v_1^2} = 0; \quad \kappa_{2i} = -\frac{\partial \dot{u}}{r_1 \partial v_1} \Big|_{Z_i} = (-1)^i \frac{\dot{\alpha}_i(t)}{R(v_2) + v_1}. \quad (i=1, 2) \quad (12)$$

Выражения (7) будут равны

$$K = \dot{w}_c^* \ddot{w}_c \iint_{Z_c} \rho ds + \sum_{i=1,2} \dot{\alpha}_i^* \ddot{\alpha}_i \iint_{Z_i} \rho d_i^2 ds; \quad (13)$$

$$A = \dot{w}_c^* \iint_{Z_c} (P - \beta \dot{w}_c) ds + \sum_{i=1,2} \dot{\alpha}_i^* \iint_{Z_i} (P - \beta \dot{\alpha}_i d_i) d_i ds. \quad (14)$$

Мощность внутренних сил  $N$  (8) равна сумме

$$N = \sum_{j=1}^6 N_j,$$

где  $N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6$  – мощности внутренних сил на линиях  $L_1$  и  $L_2$ , на линиях  $l_1$  и  $l_2$ , внутри областей  $Z_1$  и  $Z_2$  соответственно. На линиях  $L_i$  и  $l_i$  ( $i=1, 2$ ) разрыв угловых скоростей равен  $\dot{\alpha}_i^*$ . Тогда с учетом (2), (12) получим

$$N_1 = (1 - \eta_1) M_{01}(0) \oint_{L_1} [\dot{\theta}^*]_{L_1} dL_1 = 2(1 - \eta_1) M_{01}(0) \int_0^\pi B dv_2;$$

$$N_2 = (1 - \eta_2) M_{01}(D) \oint_{L_2} [\dot{\theta}^*]_{L_2} dL_2 = 2(1 - \eta_2) M_{01}(D) \left[ \int_0^\pi B(v_2) dv_2 + \pi D \right];$$

$$\begin{aligned} N_3 &= M_{01}(D_1) \oint_{l_1} [\dot{\theta}^*]_{l_1} dl_1 = 2\dot{\alpha}_1^* M_{01}(D_1) \int_0^\pi B \left(1 + \frac{D_1}{R}\right) dv_2 = \\ &= 2\dot{\alpha}_1^* M_{01}(D_1) \left[ \int_0^\pi B(v_2) dv_2 + \pi D_1 \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_4 &= M_{01}(D - D_2) \oint_{l_2} [\dot{\theta}^*]_{l_2} dl_2 = 2\dot{\alpha}_1^* M_{01}(D - D_2) \int_0^\pi B \left(1 + \frac{D - D_2}{R}\right) dv_2 = \\ &= 2\dot{\alpha}_1^* M_{01}(D - D_2) \left[ \int_0^\pi B(v_2) dv_2 + \pi(D - D_2) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_5 &= \iint_{Z_1} M_{02}(v_1) \left| \kappa_2^* \right| ds = 2\dot{\alpha}_1^* \int_0^{D_1} \int_0^\pi \frac{B(v_2)}{R(v_2)} M_{02}(v_1) dv_1 dv_2 = \\
 &= 2\pi \dot{\alpha}_1^* \int_0^{D_1} M_{02}(v_1) dv_1 ; \\
 N_6 &= \iint_{Z_2} M_{02}(v_1) \left| \kappa_2^* \right| ds = 2\dot{\alpha}_2^* \int_0^D \int_{D-D_2}^\pi \frac{B(v_2)}{R(v_2)} M_{02}(v_1) dv_1 dv_2 = \\
 &= 2\pi \dot{\alpha}_2^* \int_{D-D_2}^D M_{02}(v_1) dv_1 ,
 \end{aligned}$$

где  $\eta_i = 0$  при защемлении контура  $L_i$  и  $\eta_i = 1$  при его шарнирном опирании.

Полная мощность внутренних сил пластины  $N$  определится выражением

$$N = \sum_{i=1,2} \dot{\alpha}_i^* m_i(D_i); \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 m_1(D_1) &= 2 \left[ (1 - \eta_1) M_{01}(0) \int_0^\pi B dv_2 + M_{01}(D_1) \left( \int_0^\pi B dv_2 + \pi D_1 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \pi \int_0^{D_1} M_{02}(v_1) dv_1 \right];
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 m_2(D_2) &= 2 \left\{ (1 - \eta_2) M_{01}(D) \left( \int_0^\pi B dv_2 + \pi D \right) + \right. \\
 &\quad \left. + M_{01}(D - D_2) \left[ \int_0^\pi B dv_2 + \pi(D - D_2) \right] + \pi \int_{D-D_2}^D M_{02}(v_1) dv_1 \right\}.
 \end{aligned}$$

Подставляя (13)-(15) в (6), учитывая независимость функций  $\dot{\alpha}_1^*$ ,  $\dot{\alpha}_2^*$ ,  $\dot{w}_c^*$ , получим уравнения движения пластины для схемы деформирования 2

$$\ddot{\alpha}_i \iint_{Z_i} \rho d_i^2 ds + \beta \dot{\alpha}_i \iint_{Z_i} d_i^2 ds = P(t) \iint_{Z_i} d_i ds - m_i; \quad (i = 1, 2) \quad (16)$$

$$\ddot{w}_c \iint_{Z_c} \rho ds + \beta \dot{w}_c \iint_{Z_c} ds = P(t) \iint_{Z_c} ds. \quad (17)$$

Непрерывность скоростей на границах областей  $Z_c$  и  $Z_i$  ( $i = 1, 2$ ) дает равенства

$$\dot{\alpha}_i D_i = \dot{w}_c. \quad (i = 1, 2) \quad (18)$$

Система уравнений (16)-(18) описывает поведение пластины в случае деформирования по схеме 2. Начальные условия имеют вид

$$\alpha_i(0) = \dot{\alpha}_i(0) = 0; \quad (i = 1, 2) \quad (19)$$

$$w_c(0) = \dot{w}_c(0) = 0; \quad (20)$$

$$D_{i0} = D_i(0). \quad (21)$$

Начальные значения  $D_{i0}$  для функций  $D_i(t)$  определяют неизвестные границы областей  $Z_i$  ( $i = 1, 2$ ) в момент  $t = 0$  и определяются по значению  $P_{\max}$ , как это будет показано ниже.

При вырождении области  $Z_c$ , получим, что деформирование пластины по схеме 1 описывается уравнениями (9), (16) и

$$\dot{\alpha}_1 D_1 = \dot{\alpha}_2 D_2 \quad (22)$$

с начальными условиями (19), (21).



### 3. ПРЕДЕЛЬНАЯ НАГРУЗКА И АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ПЛАСТИНЫ ПРИ СХЕМЕ 1

Пределную нагрузку определим из (9), (16), считая при  $\ddot{\alpha}_i = 0$  ( $i = 1, 2$ ). Тогда при учете (2) получим

$$P_0 = \frac{m_1(D_1^a)}{2 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} B \left(1 + \frac{v_1}{R}\right) v_1 dv_1 dv_2} = \frac{3m_1(D_1^a)}{D_1^{a2} \left(3 \int_0^{\pi} B dv_2 + 2\pi D_1^a\right)}, \quad (23)$$

где  $D_1^a$  – значение  $D_1$  в предельном состоянии, которое определяется из уравнения

$$\begin{aligned} (D - D_1^a)^2 m_1(D_1^a) \left[ 3 \int_0^{\pi} B dv_2 + \pi(D + 2D_1^a) \right] = \\ = D_1^{a2} m_2(D - D_1^a) \left( 3 \int_0^{\pi} B dv_2 + 2\pi D_1^a \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Если  $P_0 < P_{\max} \leq P_1$  (“средние” нагрузки), где  $P_1$  – нагрузка, соответствующая появлению области  $Z_c$ , то движение пластины происходит без области  $Z_c$  по схеме 1 и описывается уравнениями (9), (16), (22) с начальными условиями (19). Нагрузку  $P_1$  определим при анализе движения по схеме 2.

Вычислим значения  $D_{i0}$  ( $i = 1, 2$ ). Дифференцируя (22) по времени и исключая из полученного выражения функции  $\ddot{\alpha}_1$  и  $\ddot{\alpha}_2$  с помощью (16), в результате получим

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 D_1 \left[ \beta \left( \iint_{Z_1} d_1^2 ds / \iint_{Z_1} \rho d_1^2 ds - \iint_{Z_2} d_2^2 ds / \iint_{Z_2} \rho d_2^2 ds \right) - \dot{D}_1 \left( \frac{1}{D_1} + \frac{1}{D - D_1} \right) \right] = \\ = D_1 \left[ P(t) \iint_{Z_1} d_1 ds - m_1 \right] / \iint_{Z_1} \rho d_1^2 ds - (D - D_1) \left[ P(t) \iint_{Z_2} d_2 ds - m_2 \right] / \iint_{Z_2} \rho d_2^2 ds. \end{aligned} \quad (25)$$

При  $P(0) = P_{\max}$  и учете начальных условий (19) из (25) получим уравнение для определения  $D_{10}$

$$\begin{aligned} D_{10} \left[ P_{\max} \iint_{Z_{10}} d_1 ds - m_1(D_{10}) \right] \iint_{Z_{20}} \rho d_2^2 ds = \\ = (D - D_{10}) \left[ P_{\max} \iint_{Z_{20}} d_2 ds - m_2(D - D_{10}) \right] \iint_{Z_{10}} \rho d_1^2 ds, \end{aligned} \quad (26)$$

где  $Z_{i0}$  означает область  $Z_i$  ( $i = 1, 2$ ) в момент  $t = 0$ , когда  $D_1 = D_{10}$ . Из (9) следует, что

$$D_{20} = D - D_{10}. \quad (27)$$

Система уравнений (9), (16), (22) с начальными условиями (19), (26), (27) решается численно. Момент остановки движения  $t_f$  определяется из условия

$$\dot{\alpha}_i(t_f) = 0. \quad (i = 1, 2) \quad (28)$$

Прогибы в пластине определяются из соотношений (11).

#### 4. АНАЛИЗ ПОВЕДЕНИЯ ПЛАСТИНЫ ПРИ СХЕМЕ 2

Если  $P_{\max} > P_1$  (“высокие” нагрузки), то движение начнется с развитой областью  $Z_c$ . Нагрузку  $P_1$  определим следующим образом. Продифференцируем (18) по времени и, исключив из полученных соотношений функции  $\ddot{\alpha}_1$ ,  $\ddot{\alpha}_2$  и  $\ddot{w}_c$  с помощью (16)-(18), получим

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_i \left[ -\dot{D}_i + \beta D_i \left( \iint_{Z_i} d_i^2 ds / \iint_{Z_i} \rho d_i^2 ds + \iint_{Z_c} ds / \iint_{Z_c} \rho ds \right) \right] = \\ = D_i \left( P(t) \iint_{Z_i} d_i ds - m_i \right) / \iint_{Z_i} \rho d_i^2 ds - P(t) \iint_{Z_c} ds / \iint_{Z_c} \rho ds. \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \tag{29}$$

При  $P(0) = P_{\max}$  и учете начальных условий (19)-(21) из (29) получим

$$D_{i0} \left( P_{\max} \iint_{Z_{i0}} d_i ds - m_i \right) / \iint_{Z_{i0}} \rho d_i^2 ds = P_{\max} \iint_{Z_c} ds / \iint_{Z_c} \rho ds. \quad (i = 1, 2) \tag{30}$$

Для непрерывной и ограниченной функции  $\rho(v_1)$  на основании теоремы о среднем значении можно записать

$$\iint_{Z_c} \rho ds = \rho(v_{1c}) \iint_{Z_c} ds; \quad D_1 < v_{1c} < D - D_2. \tag{31}$$

Из (30), (31) следуют равенства

$$P_{\max} \left[ D_{i0} \rho(v_c) \iint_{Z_{i0}} d_i ds - \iint_{Z_{i0}} \rho d_i^2 ds \right] = m_i (D_{i0}) D_{i0} \rho(v_c). \quad (i = 1, 2) \tag{32}$$

При  $P_{\max} = P_1$  выполняется условие (9) и  $D_{10} = v_c = D_1^b$  ( $D_1^b$  – значение  $D_{10}$  при  $P_{\max} = P_1$ ). Тогда из (32) получим уравнения для определения  $P_1$  и  $D_1^b$

$$P_1 = \frac{D_1^b m_1 (D_1^b) \rho(D_1^b)}{D_1^b \rho(D_1^b) \iint_{Z_1^b} d_1 ds - \iint_{Z_1^b} \rho d_1^2 ds}; \tag{33}$$

$$\frac{D_1^b m_1 (D_1^b)}{D_1^b \rho(D_1^b) \iint_{Z_1^b} d_1 ds - \iint_{Z_1^b} \rho d_1^2 ds} = \frac{(D - D_1^b) m_2 (D - D_1^b)}{(D - D_1^b) \rho(D_1^b) \iint_{Z_2^b} d_2 ds - \iint_{Z_2^b} \rho d_2^2 ds}, \tag{34}$$

где  $Z_i^b$  означает область  $Z_i$  ( $i = 1, 2$ ) в момент  $t = 0$ , когда  $D_1 = D_1^b$  и  $D_2 = D - D_1^b$ .

Начальные значения  $D_{i0}$  ( $i = 1, 2$ ) при движении по схеме 2 определяются из системы двух уравнений (30) в зависимости от значения  $P_{\max}$ . Если  $P_{\max} = P_1$ , то пластина движется по схеме 1, при этом начальное значение  $D_{10}$ , вычисленное из (26) совпадает с  $D_1^b$ , являющимся решением (34).

При  $P_{\max} > P_1$  в первой фазе деформирования ( $t_0 < t \leq t_1$ ) движение происходит по схеме 2 и описывается уравнениями (16)-(18) с начальными условиями (19)-(21). В этой фазе происходит изменение размеров области  $Z_c$  по закону (29), откуда видно, что при убывающей функции  $P(t)$  значения  $\dot{D}_i > 0$  ( $i = 1, 2$ ), а область  $Z_c$  сжимается. Время  $t_1$ , соответствующее исчезновению области  $Z_c$  определяется из условия

$$D_1(t_1) + D_2(t_1) = D.$$

В момент времени  $t_1$  определяются значения  $\dot{\alpha}_i(t_1)$ ,  $\alpha_i(t_1)$  ( $i = 1, 2$ ). В первой фазе невозможна остановка движения, когда область  $Z_c$  не вырождена, то есть при  $D_1(t) + D_2(t) < D$ , так как из (17), (20) следует

$$\dot{w}_c(t) = \exp(-F(t)) \int_0^t g(\tau) \exp(F(\tau)) d\tau;$$

$$F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau; \quad f(t) = \beta \iint_{Z_c} ds / \iint_{Z_c} \rho ds; \quad g(t) = P(t) \iint_{Z_c} ds / \iint_{Z_c} \rho ds$$

и видно, что  $\dot{w}_c(t) > 0$ .

Вторая фаза ( $t_1 < t \leq t_f$ ) движения пластины происходит по схеме 1 до остановки в момент времени  $t_f$ . Деформирование описывается уравнениями (9), (16), (22) с начальными условиями, определенными в конце первой фазы движения. Время остановки определяется условием (28). Все прогибы в пластине вычисляются из соотношений (3) с учетом всех фаз движения.

## 5. ДВУСВЯЗНАЯ ПЛАСТИНА С ВНУТРЕННИМ КОНТУРОМ В ФОРМЕ ЭЛЛИПСА, АРМИРОВАННАЯ ВОЛОКНАМИ ПОСТОЯННОГО СЕЧЕНИЯ

В качестве примера рассмотрим двусвязную армированную пластину с внутренним контуром  $L_1$  в форме эллипса (рис.4)

$$L_1: \quad x = a \cos \varphi; \quad y = \gamma a \sin \varphi \quad (\gamma \leq 1, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi).$$

Соотношения (1) для координат  $(x, y)$  и  $(v_1, v_2)$  имеют вид

$$x = a[1 + v_1 \gamma / B(v_2)] \cos v_2; \quad y = a[\gamma + v_1 / B(v_2)] \sin v_2,$$

при этом

$$R(v_2) = B^3(v_2) / (\gamma a^2); \quad B(v_2) = a \sqrt{\sin^2 v_2 + \gamma^2 \cos^2 v_2}, \quad (0 \leq v_2 < 2\pi).$$

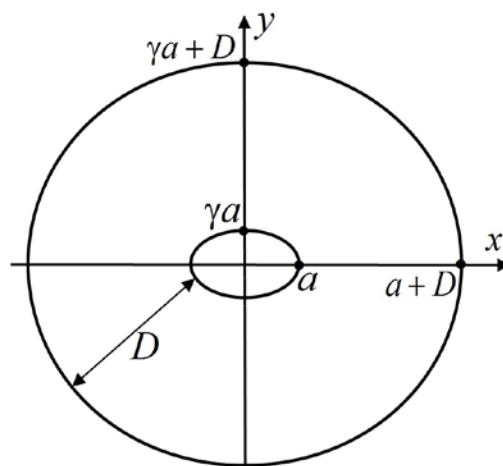


Рис.4. Двусвязная пластина с внутренним контуром в форме эллипса.

Будем рассматривать волокна постоянного сечения. В этом случае для волокон в направлении  $v_1 = \text{const}$  справедливо

$$\omega_{2k}(v_1) = \omega_{2k}(0) = \text{const}. \quad (35)$$

Для волокон в направлении  $v_2 = \text{const}$  из равенства

$$\omega_{1k}(0) \int_0^{2\pi} B(v_2) dv_2 = \omega_{1k}(v_1) \int_0^{2\pi} B(v_2) \left[ 1 + \frac{v_1}{R(v_2)} \right] dv_2$$

и соотношения (2) имеем

$$\omega_{1k}(v_1) = \frac{\omega_{1k}(0)}{1 + v_1 / Q}; \quad Q = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B(v_2) dv_2 = \text{const}. \quad (36)$$

Значение  $Q$  можно определить из приближенной формулы Рамануджана (Ramanujan) для периметра эллипса [25]

$$Q \approx a \frac{(1 + \gamma)}{2} \left( 1 + \frac{\mu}{10 + \sqrt{4 - \mu}} \right); \quad \mu = 3[(1 - \gamma) / (1 + \gamma)]^2.$$

Из (15), (23), (35), (36) следует, что для вычисления предельной нагрузки пластины в случае волокон постоянного сечения нужна только одна интегральная характеристика  $\int_0^{\pi} B(v_2) dv_2$  – половина длины внутреннего контура  $L_1$ .

Рассмотрим четырехслойную пластину при следующих значениях параметров

$$n = 2, \quad h_1 = 0.85H, \quad h_2 = H, \quad \rho_{0k} = \rho_0, \quad \rho_{jk} / \rho_0 = \rho_a / \rho_0 = 3, \\ \sigma_{jk} = \sigma_j, \quad \sigma_{0k} = \sigma_0, \quad \sigma_j = 10\sigma_0. \quad (j, k = 1, 2)$$

Такое соотношение значений армирующих параметров возможно, например, если связующий материал – алюминий, а материал вставки и арматуры – сталь.

Расчеты проводились для разных вариантов армирования в случае следующего условия одинакового расхода арматуры

$$h_1 \int_0^{\pi} \int_0^D [\omega_{11}(v_1) + \omega_{21}(v_1)] B(v_2) [1 + v_1 / R(v_2)] dv_1 dv_2 + \\ + (h_2 - h_1) \int_0^{\pi} \int_0^D [\omega_{12}(v_1) + \omega_{22}(v_1)] B(v_2) [1 + v_1 / R(v_2)] dv_1 dv_2 = \text{const}. \quad (37)$$

С учетом (35), (36) и равенств

$$\int_0^{\pi} \int_0^D B(v_2) [1 + v_1 / R(v_2)] dv_1 dv_2 = \pi D(Q + D/2); \\ \int_0^{\pi} \int_0^D B(v_2) \left[ 1 + \frac{v_1}{R(v_2)} \right] \frac{1}{1 + v_1 / Q} dv_1 dv_2 = \pi QD$$

в расчетах условие (37) принималось в виде

$$\left[ \frac{h_1 \omega_{11}(0) + (h_2 - h_1) \omega_{12}(0)}{1 + D / (2Q)} + h_1 \omega_{21} + (h_2 - h_1) \omega_{22} \right] / H = 0.1 \quad (38)$$

Результаты расчетов при условии (37) приведены на рис.5-8, где кривые 1 – 8 соответствуют следующим вариантам армирования

- 1)  $\omega_{21} = 0.1 / 0.85 \approx 0.118$ ,  $\omega_{11}(0) = \omega_{12}(0) = \omega_{22} = 0$ ;
- 2)  $\omega_{22} = 0.1 / 0.15 \approx 0.667$ ,  $\omega_{11}(0) = \omega_{12}(0) = \omega_{21} = 0$ ;
- 3)  $\omega_{11}(0) = \frac{0.1}{0.85} [1 + D / (2Q)]$ ,  $\omega_{12}(0) = \omega_{21} = \omega_{22} = 0$ ;

$$4) \omega_{12}(0) = \frac{0.1}{0.15} [1 + D / (2Q)], \quad \omega_{11}(0) = \omega_{21} = \omega_{22} = 0; \quad (39)$$

$$5) \omega_{21} = \omega_{22} = 0.1, \quad \omega_{11}(0) = \omega_{12}(0) = 0;$$

$$6) \omega_{11}(0) = \omega_{12}(0) = 0.1 [1 + D / (2Q)], \quad \omega_{21} = \omega_{22} = 0;$$

$$7) \omega_{12}(0) = \omega_{22} = \frac{0.1}{0.15 \{1 + 1/1 + D / (2Q)\}}, \quad \omega_{11}(0) = \omega_{21} = 0;$$

$$8) \omega_{11}(0) = \omega_{12}(0) = \omega_{21} = \omega_{22} = 0 \text{ – отсутствие армирования.}$$

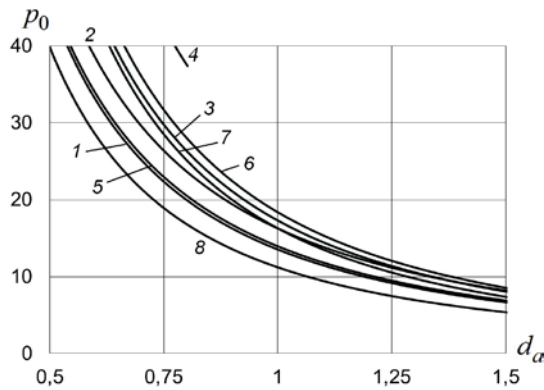


Рис.5. Безразмерная предельная нагрузка пластины при шарнирном опирании обоих контуров.

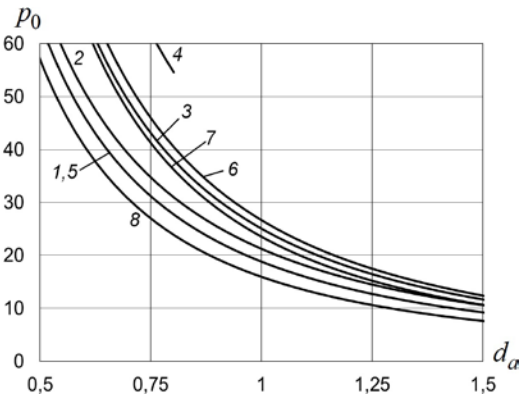


Рис.6. Безразмерная предельная нагрузка пластины при шарнирном опирании внутреннего контура и заземлении внешнего.

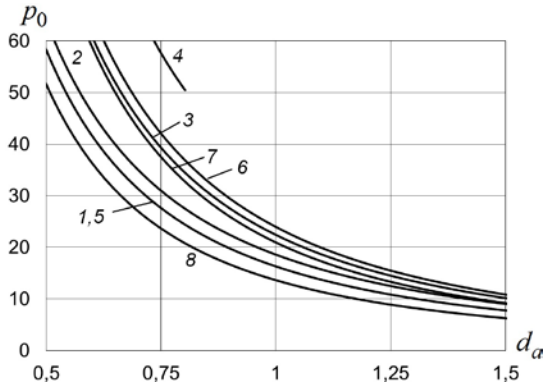


Рис.7. Безразмерная предельная нагрузка пластины при заземлении внутреннего контура и шарнирном опирании внешнего.

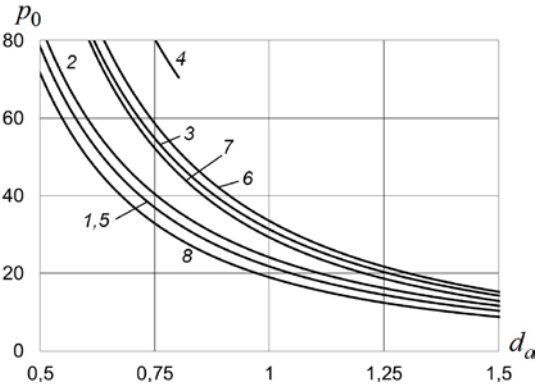


Рис.8. Безразмерная предельная нагрузка пластины при заземлении обоих контуров.

На рис.5-8 для разных случаев крепления внутреннего и внешнего контуров приведена безразмерная предельная нагрузка  $p_0 = P_0 a^2 / (\sigma_0 H^2)$ , вычисленная по формуле (23), в зависимости от параметра  $d_a = D / a$  при  $\gamma = 0.6$ . Рис.5 соответствует  $\eta_1 = \eta_2 = 1$ , рис.6 –  $\eta_1 = 1, \eta_2 = 0$ , рис.7 –  $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$ , рис.8 –  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ . На всех рисунках линии 1 и 5 практически совпадают. Видно, что при всех вариантах крепления контуров способ армирования существенно влияет на величину предельной нагрузки даже при условии одинакового расхода арматуры. Получено, что наибольшая предельная нагрузка – в случае 4

(армирование внешних слоев в направлении 1). В этом варианте она посчитана не для всех приведенных значений параметра  $d_a$ , потому что при выбранной для примера константе в условии одинакового расхода арматуры (38) при  $d_a \geq 0.8$  плотность армирования  $\omega_{12}(0)$  превышает значения равные единицы, но по смыслу задачи  $\omega_{12}(0) < 1$ .

На рис.9,10 приведены безразмерные прогибы  $w = ua^2\rho_0 / (\sigma_0HT^2)$  в сечении  $y = 0$  рассматриваемой двусвязной пластины с параметром  $d_a = 1.5$  под действием нагрузки с прямоугольной формой импульса:  $P(t) = 30\sigma_0H^2 / a^2$  при  $0 \leq t \leq T$ ,  $P(t) = 0$  при  $t > T$ . Штриховые линии соответствуют расчетам при коэффициенте сопротивления  $\bar{\beta} = \beta T / \rho_0 = 0.2$ , сплошные –  $\bar{\beta} = 0.5$ .

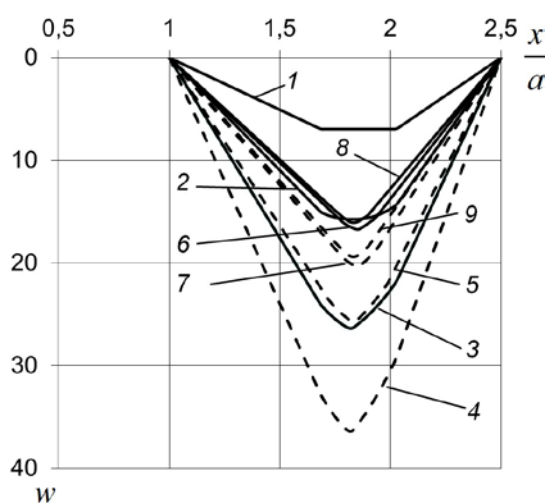


Рис.9. Безразмерные прогибы пластины при шарнирном опирании обоих контуров. Подробности в тексте.

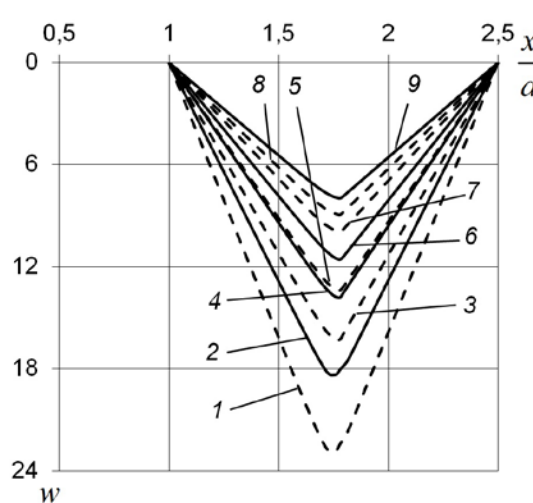


Рис.10. Безразмерные прогибы пластины при защемлении обоих контуров. Подробности в тексте.

На рис.9 изображены прогибы пластины с шарнирным опиранием обоих контуров. Линии 1–4 относятся к случаю отсутствия армирования (при этом  $p_0 = 6.67$ ,  $p_1 = P_1a^2 / (\sigma_0H^2) = 22.15$ ): 1 – прогибы в момент снятия нагрузки  $t = T$ ; 2 – прогибы в момент, когда  $t = t_1$ ; 3,4 – остаточные прогибы. Линии 5–9 изображают остаточные прогибы для разных случаев армирования (39) при условии одинакового расхода арматуры (38): 5 – случай 1 в (39) (при этом  $p_0 = 6.67$ ,  $p_1 = 22.15$ ); 6,7 – случай 2 в (39) ( $p_0 = 8.19$ ,  $p_1 = 27.35$ ); 8,9 – случай 6 в (39) ( $\omega_{11}(0) = \omega_{12}(0) = 0.192$ ,  $p_0 = 8.54$ ,  $p_1 = 29.17$ ). Для рассматриваемых случаев приложенная нагрузка является “высокой”.

На рис.10 изображены остаточные прогибы пластины с защемлением обоих контуров. Линии 1,2 относятся к случаю отсутствия армирования ( $p_0 = 8.78$ ,  $p_1 = 26.83$ ). Линии 3,4 – случай 1 в (39) ( $p_0 = 10.11$ ,  $p_1 = 31.09$ ); 5,6 – случай 2 в (39) ( $p_0 = 11.67$ ,  $p_1 = 36.16$ ); 7 – случай 3 в (39) ( $\omega_{11}(0) = 0.226$ ,  $p_0 = 14.29$ ,  $p_1 = 45.61$ ). 8,9 – случай 6 в (39) ( $\omega_{11}(0) = \omega_{12}(0) = 0.192$ ,  $p_0 = 15.25$ ,  $p_1 = 48.81$ ). В случае защемления обоих контуров для неармированной пластины приложенная нагрузка является “высокой”, а для остальных рассмотренных

вариантов – “средней”.

Из рис.9,10 видно, что способ армирования существенно влияет на остаточные прогибы пластины и что при увеличении коэффициента вязкого сопротивления основания остаточные прогибы пластины уменьшаются. В расчетах системы дифференциальных уравнений, описывающих динамическое поведение пластины, решались численно методом Рунге-Кутты. При движении пластины по схеме 2 начальные значения  $D_{i0}$  ( $i=1,2$ ) определялись из численного решения системы (30) методом локальных вариаций [26], где в качестве первого приближения выбирались  $D_1 = D_1^b - \Delta$  и  $D_2 = D - D_1^b - \Delta$  ( $\Delta > 0$ ).

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе модели идеального жесткопластического материала с использованием структурной модели армированного слоя построено общее решение задачи о динамическом изгибе композитных шарнирно опертых или защемленных двусвязных пластин с произвольными гладкими контурами при расположении внешнего контура на одинаковом расстоянии от внутреннего. На пластины действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Пластины находятся на вязком основании. Пластины являются гибридными слоисто-волоконистыми с распределением слоев симметрично относительно срединной поверхности. В каждом слое находятся семейства армирующих волокон из разных материалов, расположенных в направлениях, параллельных или нормальных к внешнему контуру пластины. В зависимости от амплитуды нагрузки возможны две схемы деформирования пластин в форме линейчатых поверхностей. На основе принципа виртуальной мощности в сочетании с принципом Даламбера для каждой из схем получены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия их реализации. Для упрощения вычисления двойных интегралов по криволинейным областям с границами, изменяющимися во времени, введена криволинейная ортогональная система координат, связанная с внутренним контуром пластин. Представлены аналитические зависимости для описания движения пластических шарниров, времени остановки и остаточных прогибов, позволяющие построить простую численную процедуру для решения рассматриваемой сложной проблемы. Получены простые аналитические выражения для оценки предельных нагрузок. Найденная предельная нагрузка соответствует определению несущей способности рассматриваемых пластин по второму предельному состоянию. Приведены примеры численных решений для четырехслойной пластины с эллиптическим отверстием на вязком основании при разных способах армирования и крепления контуров при одинаковом расходе армирующих волокон постоянной толщины. Получено, что способы армирования существенно влияют на предельную нагрузку и динамическое поведение пластин. Обнаружено, что пластины являются более прочными, согласно критерию на основе максимума предельной нагрузки, в случае расположения армирующих волокон в направлениях, нормальных к внешнему контуру, и в слоях, находящихся ближе к лицевым поверхностям пластин. Предложенные решения могут быть использованы при проектировании армированных металлокомпозитных плоских криволинейных двусвязных элементов конструкций. Количество параметров разработанной

математической модели позволяет в широком диапазоне изменять структуру армирования пластин, объемное содержание армирующих волокон, толщину слоев и физические характеристики композита, вязкого основания, а также геометрическую форму пластин и способы крепления контуров.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Янковский А.П. *Вязкопластическая динамика металлокомпозитных оболочек слоисто-волокнутой структуры при действии нагрузок взрывного типа. I. Постановка задачи и метод решения* // Математичні методи та фізикомеханічні поля. – 2012. – Т.55. – №2. – С.119-130.
2. Янковский А.П. *Применение явного по времени метода центральных разностей для численного моделирования динамического поведения упругопластических гибких армированных пластин* // Вычислительная механика сплошных сред. – 2016. – Т.9. – №3. – С.279-297.
3. Абросимов Н.А., Елесин А.В., Новосельцева Н.А. *Численный анализ влияния структуры армирования на динамическое поведение и предельную деформируемость композитных оболочек вращения* // Механика композитных материалов. – 2014. – Т.50. – №2. – С.313-326.
4. Alderliesten R.C., Benedictus R. *Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates - A review* // Int. J. Impact Eng. – 2014. – Vol.67. – Pp.27-38.
5. Arora H., Linz P.D., Dear J.P. *Damage and deformation in composite sandwich panels exposed to multiple and single explosive blasts* // Int. J. Impact Eng. – 2017. – Vol.104. – Pp.95-106.
6. Jones N. *Some recent developments in the dynamic inelastic behaviour of structures* // Ships and Offshore Structures. – 2006. – Vol.1. – No.1. – Pp.37-44.
7. Немировский Ю.В., Романова Т.П. *Динамическое сопротивление плоских пластических преград*. – Новосибирск: Изд-во “ГЕО”, 2009. – 311 с.
8. Немировский Ю.В. *Об условиях пластичности (прочности) для армированного слоя* // Прикладная механика и техническая физика. – 1969. – №5. – С.81-88.
9. Nemirovsky Ju.V., Resnikoff B.S. *On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement* // Archiwum Inzynierii Ladowej. – 1975. – Vol.XXI. – No.1. – Pp.57-67.
10. Wang Z., Lu G., Zhu F., Zhao L. *Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection* // J. of Engineering Mechanics. – 2017. – Vol.143. – No.9. – Pp.04017057-1-12.
11. Мазалов В.Н. *Динамический изгиб кольцевых жесткопластических пластин с неподвижными круговыми контурами* / Динамика сплошной среды. АН СССР. Сиб. Отд-ние. Ин-т гидродинамики. – 1973. – Вып.14. – С.57-66.
12. Niepostyn D., Stanczyk A. *Pulse load of annular plastic plates supported on both edges* // Arch. Mech. – 1981. – Vol.33. – No.5. – Pp.675-689.
13. Немировский Ю.В., Романова Т.П. *Моделирование динамического поведения жесткопластических двусвязных пластин с произвольными закрепленными контурами на сопротивляющемся основании* // Прикладная механика и техническая физика. – 2011. – Т.52. – №2. – С.156-172.
14. Kubishaev I.N. *Bearing capacity of composite annular plate with different fixing conditions, situated under the action of uniformly distributed load* // Trans. of IMM of NAS of Azerbaijan. – 2009. – Vol.27. – Pp.187-198.



15. Джагангиров А.А. *Предельная нагрузка кольцевой трехслойной пластинки, внутренний слой которой армирован четырьмя слоями волокон* // Механика машин, механизмов и материалов. – 2017. – №4. – С.96-100.
16. Янковский А.П. *Построение уточненной модели упругопластического поведения гибких армированных пластин при динамическом нагружении* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2017. – Т.23 – №2. – С.283-304.
17. Passos A.G., Luersen M.A., Steeves C.A. *Optimal curved fibre orientations of a composite panel with cutout for improved buckling load using the Efficient Global Optimization algorithm* // Engineering optimization. – 2017. – Vol.49. – No.8. – Pp.1354-1372.
18. Боровков А.И., Мамчиц Д.В., Немов А.С., Новокшенов А.Д. *Задачи моделирования и оптимизации панелей переменной жесткости и конструкций из слоистых композитов* // Известия Российской Академии Наук. Механика твердого тела. – 2018. – №1. – С.113-122.
19. Hyer M.W., Charette R.F. *Use of curvilinear fiber format in composite structure design* // AIAA Journal. – 1991. – Vol.29. – No.6. – Pp.1011-1015.
20. Романова Т.П. *Моделирование динамического изгиба жесткопластических армированных слоистых круглых пластин с произвольным отверстием на вязком основании при взрывных нагрузках* // Проблемы прочности и пластичности. – 2017. – Вып.79(3). – С.267-284.
21. Романова Т.П. *Моделирование динамического изгиба жесткопластической армированной слоистой криволинейной пластины с закрепленным круглым отверстием при взрывных нагрузках* // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2017. – №3. – С.67-187.
22. Романова Т.П. *Моделирование динамического изгиба жесткопластических гибридных композитных эллиптических пластин с жесткой вставкой* // Механика композитных материалов. – 2017. – Т.53. – №5. – С.809-828.
23. Ерхов М.И. *Теория идеально пластических тел и конструкций.* – М.: Наука, 1978. – 352 с.
24. Keil A.H. *Problems of plasticity in naval structures: explosive and impact loading / Second Symposium on Naval Structural Mechanics. Proceedings.* – Pergamon Press, 1961. – Pp.22-42.
25. Almkvist G., Berndt B. *Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses,  $\pi$ , and the Ladies diary* // Amer. Math. Monthly. – 1988. – Vol.95. – No.7. – Pp.585-608.
26. Черноусько Ф.Л., Баничук В.Н. *Вариационные задачи механики и управления.* – М.: Наука, 1973. – 238 с.

## REFERENCES

1. Yankovskii A.P. *Viscoplastic dynamics of metallic composite shells of layered-fibrous structure under the action of loads of explosive type. I. Statement of the problem and method for solution.* J. of Mathematical Sciences, 2013, Vol.192, No.6, Pp.623-633.
2. Yankovskii A.P. *Using of explicit time-central difference method for numerical simulation of dynamic behavior of elasto-plastic flexible reinforced plates.* Computational continuum mechanics, 2016, Vol.9, No.3, Pp.279-297.

3. Abrosimov N.A., Elesin A.V., Novoseltseva N.A. *Numerical analysis of the effect of reinforcement structure on the dynamic behavior and ultimate deformability of composite shells of revolution*. Mechanics of Composite Materials, 2014, Vol.50, No.2, Pp.223-232.
4. Alderliesten R.C., Benedictus R. *Modelling of impact damage and dynamics in fibre-metal laminates - A review*. Int. J. Impact Eng., 2014, Vol.67, Pp.27-38.
5. Arora H., Linz P.D., Dear J.P. *Damage and deformation in composite sandwich panels exposed to multiple and single explosive blasts*. Int. J. Impact Eng., 2017, Vol.104, Pp.95-106.
6. Jones N. *Some recent developments in the dynamic inelastic behaviour of structures*. Ships and Offshore Structures, 2006, Vol.1, No.1, Pp.37-44.
7. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. *Dinamicheskoe soprotivlenie ploskikh plasticheskikh pregrad [Dynamic behavior of flat plastic barriers]*. Novosibirsk, GEO, 2009, 311 p.
8. Nemirovsky Ju.V. *Plasticity (strength) condition for a reinforced layer*. J. Appl. Mech. Tech. Phys., 1969, Vol.10, No.5, Pp.759-765.
9. Nemirovsky Ju.V., Resnikoff B.S. *On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement*. Archiwum Inzynierii Ladowej, 1975, Vol.XXI, No.1, Pp.57-67.
10. Wang Z., Lu G., Zhu F., Zhao L. *Load-carrying capacity of circular sandwich plates at large deflection*. J. of Engineering Mechanics, 2017, Vol.143, No.9, Pp.04017057-1-12.
11. Mazalov V.N. *Dinamicheskii izgib kol'tsevykh zhestkoplasticheskikh plastin s nepodvizhnymi krugovymi konturami [Dynamic bending of annular rigid-plastic plates with motionless circular contours]*. In: Dinamika sploshnoi sredy, Novosibirsk: Izd-vo SO RAN, In-t Gidrodinamiki, 1973(14), Pp.57-66.
12. Niepostyn D., Stanczyk A. *Pulse load of annular plastic plates supported on both edges*. Arch. Mech., 1981, Vol.33, No.5, Pp.675-689.
13. Nemirovsky Yu.V., Romanova T.P. *Modeling of dynamic deformation of rigid-plastic doubly connected plates with arbitrary fixed curvilinear contours on a viscoelastic foundation*. J. Appl. Mech. Tech. Phys., 2011, Vol.52, No.2, Pp.288-302.
14. Kubishaev I.N. *Bearing capacity of composite annular plate with different fixing conditions, situated under the action of uniformly distributed load*. Trans. of IMM of NAS of Azerbaijan, 2009, Vol.27, Pp.187-198.
15. Dzhagangirov A.A. *Predel'naia nagruzka kol'tsevoi trekhsloinoi plastinki, vnutrennii sloi kotoroi armirovan chetyr'mia sloiami volokon [Limit load of annular three-layer plate, inner layer of which is reinforced with four layers of fibers]*. Mekhanika mashin, mekhanizmov i materialov, 2017, Vol.4, Pp.96-100.
16. Yankovskii A.P. *Construction of refined model of elastic-plastic behavior of flexible reinforced plates under dynamic loading* // Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsii, 2017, T.23, №2, C.283-304.
17. Passos A.G., Luersen M.A., Steeves C.A. *Optimal curved fibre orientations of a composite panel with cutout for improved buckling load using the Efficient Global Optimization algorithm*. Engineering optimization, 2017, Vol.49, No.8, Pp.1354-1372.
18. Borovkov A.I., Mamchits D.V., Nemov A.S., Novokshenov A.D. *Problems of modeling and optimization of variable-hardness panels and structures made of layered composites*. Mechanics of solids, 2018, No.1, Pp. 93-100.

19. Hyer M.W., Charette R.F. *Use of curvilinear fiber format in composite structure design*. AIAA Journal, 1991. Vol.29, No.6, Pp.1011-1015.
20. Romanova T.P. *Modelirovanie dinamicheskogo izgiba zhestkoplasticheskikh armirovannykh sloistyykh kruglykh plastin s proizvol'nym otverstiem na viazkom osnovanii pri vzryvnykh nagruzkakh [Modeling of rigid-plastic dynamic bending of reinforced layered circular plates with arbitrary hole on viscous foundation under explosive loads]*. Problemy prochnosti i plastichnosti, 2017, Vol.79(3), Pp.267-284.
21. Romanova T.P. *Modelirovanie dinamicheskogo izgiba zhestkoplasticheskoi armirovannoi sloistoi krivolineinoi plastiny s zakreplennym kruglym otverstiem pri vzryvnykh nagruzkakh [Modeling of dynamic bending of rigid-plastic reinforced layered curvilinear plate with supported circular hole under explosive loads]*. PNRPU Mechanics Bulletin, 2017, No.3, Pp.167-187.
22. Romanova T.P. *Modeling of dynamic bending of rigid-plastic hybrid composite elliptical plates with rigid insert*. Mechanics of Composite Materials, 2017, Vol.53, No.5, Pp.565-578.
23. Erkhov M.I. *Teoriia ideal'no plasticheskikh tel i konstruksii [Theory of perfectly plastic bodies and structures]*. Moscow, Nauka, 1978, 352 p.
24. Keil A.H. *Problems of plasticity in naval structures: explosive and impact loading*. Second Symp. on Naval Structural Mech. Proceedings. Pergamon Press, 1961, Pp.22-42.
25. Almkvist G., Berndt B. *Gauss, Landen, Ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses,  $\pi$ , and the Ladies diary*. Amer. Math. Monthly, 1988, Vol.95, No.7, Pp.585-608.
26. Chernous'ko F.L., Banichuk V.N. *Variatsionnye zadachi mekhaniki i upravleniia [Variational problems of mechanics and control]*. Moscow, Nauka, 1973, 238 p.

*Поступила в редакцию 19 июня 2018 года.*

---

Сведения об авторе:

Романова Татьяна Павловна – к.ф.-м.н., с.н.с., Лаборатория «Физики быстропротекающих процессов», ФГБУН Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, г. Новосибирск, Россия; e-mail: [lab4nemir@rambler.ru](mailto:lab4nemir@rambler.ru)