

ДИФРАКЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЗВУКОВОЙ ВОЛНЫ НА НЕПРЕРЫВНО-НЕОДНОРОДНОЙ ТЕРМОУПРУГОЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ*

Ларин Н.В.

Тульский государственный университет, г. Тула, Россия

АННОТАЦИЯ

Рассматривается дифракция цилиндрической гармонической звуковой волны, излучаемой бесконечно длинным линейным источником, на изотропной термоупругой сферической оболочке произвольной толщины. Физико-механические характеристики материала оболочки описываются непрерывными функциями радиальной координаты. Полагается, что поверхности оболочки граничат с невязкими теплопроводными жидкостями, в общем случае разными. Искомые потенциалы скоростей звуковых и тепловых волн снаружи и в полости оболочки являются решениями уравнений Гельмгольца и удовлетворяют условиям излучения на бесконечности и условию ограниченности. Смещение частиц и изменение температуры в термоупругой оболочке описываются системой уравнений линейной связанной динамической задачи термоупругости неоднородного изотропного тела. Для упрощения данной системы уравнений вводятся две новые неизвестные функции, связанные определенными соотношениями с угловыми компонентами вектора смещения. Радиальная компонента вектора смещения, две новые введенные функции и изменение температуры в теле находятся в виде разложений в ряды по сферическим гармоникам с неизвестными коэффициентами, зависящими от радиальной координаты. С учетом этих разложений система уравнений для описания термомеханических возмущений в оболочке сводится к системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. На внешней и внутренней поверхностях оболочки выполняются условия идеального термомеханического контакта. Из граничных условий находятся выражения для коэффициентов потенциальных функций и краевые условия для системы дифференциальных уравнений. Полученная краевая задача решена методом сплайн-коллокации с использованием аппарата кубических *B*-сплайнов. Получены аналитические выражения, описывающие волновые поля снаружи и в полости оболочки. Представлены результаты расчетов частотной и угловой зависимостей амплитуды рассеянного звукового поля в дальней зоне. Показано заметное различие характеристик рассеяния звука, обусловленное как разными законами неоднородности материала оболочки, так и термоупругостью ее материала.

Ключевые слова: дифракция звука; неоднородная термоупругая оболочка; теплопроводная жидкость

DIFFRACTION OF THE CYLINDRICAL SOUND WAVE ON THE CONTINUOUS INHOMOGENEOUS THERMOELASTIC SPHERICAL SHELL

Larin N.V.

Tula State University, Tula, Russia

* Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект 18-11-00199).

ABSTRACT

The diffraction of a cylindrical harmonic sound wave emitted by an infinitely long linear source is considered on an isotropic thermoelastic spherical shell of random thickness. The physical and mechanical characteristics of the shell material are described by continuous functions of the radial coordinate. It is assumed that the shell surfaces are bordered by non-viscous heat-conducting liquids, which are mostly different. The desired velocity potentials of acoustic and thermal waves outside and inside the shell cavity are the solutions of the Helmholtz equations, which satisfy the radiation conditions at infinity and the boundedness condition. The displacement of particles and temperature change in the thermoelastic shell are described by the system of equations of the linear coupled dynamic problem of the inhomogeneous isotropic body thermoelasticity. To simplify this system of equations, two new unknown functions are introduced. The functions are related by certain relations with the angular components of the displacement vector. The radial component of the displacement vector, the two new introduced functions and the change of the body temperature are in the form of expansions into series in spherical harmonics with unknown coefficients, which depend on the radial coordinate. Taking these expansions into account, the system of equations for describing thermomechanical perturbations in the shell reduces to a system of linear ordinary differential equations of the second order. Conditions for an ideal thermomechanical contact are satisfied on the outer and inner surfaces of the shell. Expressions for the coefficients of potential functions and boundary conditions for a system of differential equations are found from the boundary conditions. The obtained boundary value problem is solved by a spline-collocation method with the help of the cubic *B*-splines device. Analytic expressions describing the wave fields outside and inside the cavity of the shell are obtained. The results of the frequency and angular dependences calculations of the scattered sound field amplitude in the far zone are presented. We showed the noticeable difference in the characteristics of the sound scattering, caused by both different laws of the inhomogeneity of the shell material and the thermoelasticity of its material.

Keywords: diffraction of sound; inhomogeneous thermoelastic shell; heat-conducting fluid

ВВЕДЕНИЕ

Для многих технических задач актуальна проблема взаимодействия акустических волн в жидкости с упругими телами различной конфигурации. В большинстве исследований в теории дифракции звуковых волн на упругих телах, материал тел полагался однородным. Характерной особенностью всякого реального материала является его неоднородность. Неоднородную структуру материалы могут приобрести как при эксплуатации, так и в процессе изготовления. В современных конструкциях все более широкое применение находят композиционные материалы, в частности, функционально-градиентные материалы с непрерывно изменяющимися по глубине от поверхности термомеханическими свойствами.

Задачи дифракции плоских гармонических звуковых волн на неоднородных упругих телах сферической формы решены для радиально-слоистой изотропной сферы [1], для непрерывно-неоднородного по толщине трансверсально-изотропного сферического слоя [2], для однородного шара с покрытием в виде непрерывно-неоднородного сферического слоя [3,4], для многослойного шара [5]. Получено решение задачи дифракции нестационарной акустической волны на неоднородной трансверсально-изотропной полой сфере [6].

В работе [7], где исследовано рассеяние цилиндрической звуковой волны однородным упругим шаром с непрерывно-неоднородным упругим покрытием отмечалось, что аппроксимация реального первичного акустического поля

плоской волной справедлива, только когда расстояние от источника звука до рассеивателя много больше длины звуковой волны. На практике это условие часто не выполняется. В этом случае нельзя не учитывать криволинейность фронта падающей волны. Расходимость падающей волны приводит не только к количественным, но и качественным изменениям дифракционной картины. Наибольший интерес представляет изучение дифракции звуковых волн, излучаемых сферическими и цилиндрическими источниками. С помощью таких источников можно моделировать акустические поля сложных излучателей. В работе [8] из решения задачи для случая плоской падающей волны [3], с использованием разложения сферической волны по сферическим функциям, получено решение задачи дифракции сферической звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием. В указанных выше работах тепловые процессы в телах не учитывались.

Реальный процесс деформирования тела от воздействия на него звуковой волны сопровождается изменением температурного поля. Изучению процессов деформирования упругих тел при наличии температурных полей (термоупругих тел) посвящены, например, работы [9-11], в которых взаимодействие звуковых волн с термоупругими телами не рассматривалось. В [12] решена задача о рассеянии плоских гармонических волн на границе невязкой теплопроводной жидкости с термоупругим телом. Исследовано рассеяние сферической [13] и плоской [14] гармонических звуковых волн непрерывно-неоднородной термоупругой сферической оболочкой. Показано, что термоупругость материала оболочки, как и его неоднородность, может заметно влиять на рассеянное акустическое поле.

Рассматриваемая ниже задача дифракции цилиндрической звуковой волны на непрерывно-неоднородной термоупругой сферической оболочке с математической точки зрения значительно сложнее по сравнению с осесимметричными задачами дифракции плоской и сферической волн.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть на неоднородную изотропную термоупругую сферическую оболочку с внешним радиусом r_1 и внутренним r_2 , внутри и снаружи которой находятся невязкие теплопроводные сжимаемые жидкости, в общем случае разные, падает цилиндрическая звуковая волна, излучаемая бесконечно длинным линейным источником, с временной зависимостью $\exp(-i\omega t)$, где ω – круговая частота (в дальнейшем временной множитель будем опускать). Полагаем, что модули упругости λ и μ , температурный коэффициент линейного расширения α_T и теплопроводность λ_T материала оболочки являются дифференцируемыми функциями координаты r сферической системы координат r, θ, φ , связанной с телом, а плотность материала оболочки ρ и его объемная теплоемкость c_ε – непрерывными функциями координаты r . Источники тепла в теле отсутствуют. В невозмущенном состоянии тело и жидкости имеют одну и ту же постоянную температуру T_0 . Окружающая оболочку жидкость ($j=1$) и жидкость в полости ($j=2$) имеют равновесную плотность ρ_j , скорость звука c_j , отношение удельных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме γ_j , теплопроводность λ_j^T , температуропроводность χ_j^T , коэффициент температурного расширения α_j^T .

При падении на термоупругую оболочку звуковой волны, распространяющейся в невязкой теплопроводной жидкости, в последней возникают рассеянная звуковая и возбужденная тепловая волны, само тело деформируется, его температура изменяется, а в жидкости, находящейся в полости тела, возбуждаются звуковая и тепловая волны.

Определим волновые поля вне термоупругого тела и в самом теле.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ

Для решения задачи выберем сферическую r, θ, φ и цилиндрическую \hat{r}, φ, z системы координат, начала которых совмещены с центром оболочки (рис.1).

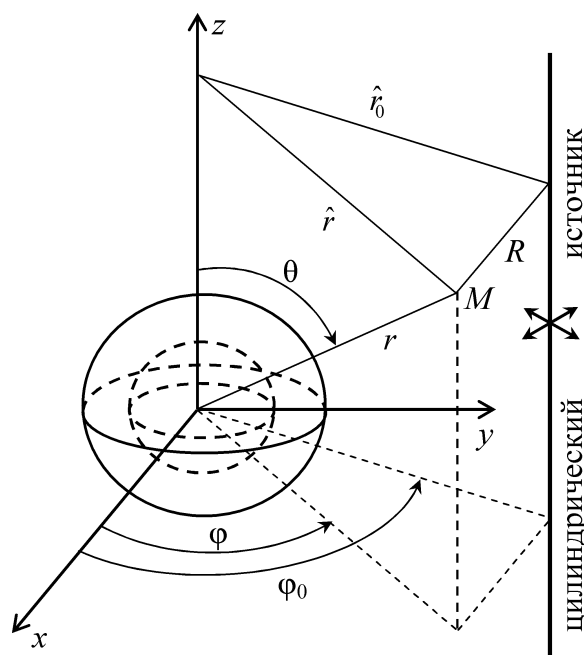


Рис.1. Геометрия задачи.

Линейный источник параллелен оси z и имеет цилиндрические координаты (\hat{r}_0, φ_0) .

Потенциал скоростей падающей волны имеет вид

$$\Psi_0 = A_0 H_0(k_{11}R), \quad R = \left[\hat{r}^2 + \hat{r}_0^2 - 2\hat{r}\hat{r}_0 \cos(\varphi - \varphi_0) \right]^{1/2}$$

и может быть представлен разложением [15]

$$\Psi_0 = A_0 \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \cos m(\varphi - \varphi_0) \begin{cases} J_m(k_{11}\hat{r})H_m(k_{11}\hat{r}_0), & \hat{r} < \hat{r}_0, \\ H_m(k_{11}\hat{r})J_m(k_{11}\hat{r}_0), & \hat{r} > \hat{r}_0, \end{cases}$$

где A_0 – амплитуда волны; $H_0(x)$ – цилиндрическая функция Ганкеля первого рода нулевого порядка; k_{11} – волновое число звуковых волн в окружающей жидкости; R – расстояние от источника до произвольной точки M внешнего пространства; δ_{0m} – символ Кронекера; $J_m(x)$ и $H_m(x)$ – цилиндрические функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка m .

Хотя падающее поле двумерно, искомые волновые поля будут трехмерными.

Скорость частиц жидкости снаружи ($j=1$) и в полости ($j=2$) сферической оболочки представим в виде

$$\mathbf{v} = \text{grad}(\Psi_{j1} + \Psi_{j2}), \quad j = 1, 2.$$

Потенциалы скоростей звуковых Ψ_{j1} и тепловых Ψ_{j2} волн являются решениями уравнений Гельмгольца

$$\Delta \Psi_{jl} + k_{jl}^2 \Psi_{jl} = 0, \quad j, l = 1, 2,$$

которые получены из полной системы уравнений гидродинамики вязкой теплопроводной жидкости [16-18], состоящей из уравнений Навье-Стокса, неразрывности, притока тепла и физического состояния, записанных для малых возмущений, при отсутствии вязкости и для установившегося режима колебаний. Здесь $\Psi_{11} = \Psi_0 + \Psi'_{11}$ – потенциал скоростей полного акустического поля во внешнем пространстве, Ψ'_{11} – потенциал скоростей рассеянной звуковой волны, k_{j1} и k_{j2} – волновые числа звуковых и тепловых волн соответственно. При этом в предположении выполнения условия $\omega \chi_j^T / c_j^2 \ll 1$ ($j=1, 2$) будем иметь

$$k_{j1} = \frac{\omega}{c_j}, \quad k_{j2} = \left(\frac{\omega \gamma_j}{2 \chi_j^T} \right)^{1/2} (1 + i), \quad j = 1, 2.$$

Учитывая условия излучения на бесконечности для внешних волновых полей, отвечающие уходящим от тела волнам, и условие ограниченности для волновых полей в полости, функции Ψ'_{11} , Ψ_{12} , Ψ_{21} , Ψ_{22} будем искать в виде

$$\begin{aligned} \Psi'_{11}(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n V_{1mn} h_n(k_{11}r) P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \\ \Psi_{12}(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n V_{2mn} h_n(k_{12}r) P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \\ \Psi_{21}(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n W_{1mn} j_n(k_{21}r) P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \\ \Psi_{22}(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n W_{2mn} j_n(k_{22}r) P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \end{aligned} \quad (1)$$

где $j_n(x)$ и $h_n(x)$ – сферические функции Бесселя и Ганкеля первого рода порядка n , $P_n^m(\cos \theta)$ – присоединенный многочлен Лежандра степени n порядка m .

Определим волновые поля в оболочке, воспользовавшись системой уравнений линейной связанной динамической задачи термоупругости неоднородного изотропного тела [10], которая включает общими уравнениями движения сплошной среды

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{r\theta} \text{ctg} \theta) &= -\rho \omega^2 u_r, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} [(\sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) \text{ctg} \theta + 3\sigma_{r\theta}] &= -\rho \omega^2 u_{\theta}, \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} (3\sigma_{r\varphi} + 2\sigma_{\theta\varphi} \text{ctg} \theta) &= -\rho \omega^2 u_{\varphi} \end{aligned} \quad (2)$$

и уравнение притока тепла

$$\lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \left(\lambda'_T + \frac{2\lambda_T}{r} \right) \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\lambda_T}{r^2} L(T) + i\omega T_0 \beta \text{div} \mathbf{u} = -i\omega c_{\varepsilon} T, \quad (3)$$

где

$$L(\) = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2},$$

а штрихом обозначена производная по координате r . Компоненты тензора напряжений $\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \dots$ связаны с компонентами тензора деформаций $\varepsilon_{rr}, \varepsilon_{r\theta}, \dots$ и изменением температуры T в теле соотношениями Дюгамеля-Неймана [10]

$$\sigma_{kk} = 2\mu\varepsilon_{kk} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{u} - \beta T \quad (k = r, \theta, \varphi),$$

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu\varepsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{r\varphi} = 2\mu\varepsilon_{r\varphi}, \quad \sigma_{\theta\varphi} = 2\mu\varepsilon_{\theta\varphi},$$

где

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left(u_r + \operatorname{ctg} \theta u_\theta + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right),$$

$$\varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right], \quad \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi \right) + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \right],$$

$$\varepsilon_{\theta\varphi} = \frac{1}{2r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi} - \operatorname{ctg} \theta u_\varphi + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} \right),$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad \beta = (3\lambda + 2\mu)\alpha_T,$$

u_r, u_θ, u_φ – компоненты вектора смещения \mathbf{u} в теле.

Подставим соотношения (4) в уравнения (2), (3). При этом введем новые функции u_2 и u_3 , связанные с u_θ и u_φ соотношениями [7]

$$u_\theta = \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi}, \quad u_\varphi = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_3}{\partial \theta}.$$

В результате приходим к системе уравнений, записанных относительно функций u_r, u_2, u_3 и T :

$$\begin{aligned} & (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \left[\lambda' + 2\mu' + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r} \right] \frac{\partial u_r}{\partial r} + \left[\frac{2}{r} \left(\lambda' - \frac{\lambda + 2\mu}{r} \right) + \rho\omega^2 \right] u_r + \\ & + \frac{\mu}{r^2} L(u_r) + \frac{1}{r} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} + \lambda' - \frac{\lambda + 3\mu}{r} \right] L(u_2) - \left(\beta \frac{\partial}{\partial r} + \beta' \right) T = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} + \mu' + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r} \right] \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} L(u_2) + \frac{\mu}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} L(u_3) + \\ & + \left[\mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\mu' + \frac{2\mu}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu'}{r} + \rho\omega^2 \right] \left(\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} \right) - \frac{\beta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r \sin \theta} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} + \mu' + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r} \right] \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\lambda + 2\mu}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} L(u_2) - \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} L(u_3) + \\ & + \left[\mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\mu' + \frac{2\mu}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu'}{r} + \rho\omega^2 \right] \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_3}{\partial \theta} \right) - \frac{\beta}{r \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\lambda_T \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \left[\left(\lambda'_T + \frac{2\lambda_T}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} + i\omega c_\varepsilon \right] T + \frac{\lambda_T}{r^2} L(T) +$$

$$+ i\omega T_0 \beta \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{r} \right) u_r + \frac{i\omega T_0 \beta}{r} L(u_2) = 0. \quad (7)$$

Проделаем следующие преобразования схожие с преобразованиями, сделанными в работе [7]. Уравнение (5) домножим на $\sin\theta$ и продифференцируем по θ , а уравнение (6) продифференцируем по φ . Складывая полученные уравнения, приходим к уравнению, содержащему только функции u_r , u_2 и T

$$\frac{1}{r} \left[(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial r} + \mu' + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{r} \right] L(u_r) + \left[\mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\mu' + \frac{2\mu}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu'}{r} + \rho\omega^2 + \frac{\lambda + 2\mu}{r^2} L(\cdot) \right] L(u_2) - \frac{\beta}{r} L(T) = 0. \quad (8)$$

Затем продифференцируем уравнение (5) по φ и вычтем уравнение (6), предварительно умноженное на $\sin\theta$ и продифференцированное по θ . Получим уравнение, в котором присутствует только функция u_3 :

$$\left[\mu \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left(\mu' + \frac{2\mu}{r} \right) \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mu'}{r} + \rho\omega^2 + \frac{\mu}{r^2} L(\cdot) \right] L(u_3) = 0. \quad (9)$$

В результате приходим к системе, состоящей из уравнений (4), (7)-(9). Функции u_r , u_2 , u_3 и T будем искать в виде разложений

$$\begin{aligned} u_r(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n U_{1mn}(r) P_n^m(\cos\theta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \\ u_2(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n U_{2mn}(r) P_n^m(\cos\theta) \cos m(\varphi - \varphi_0), \\ u_3(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n U_{3mn}(r) P_n^m(\cos\theta) \sin m(\varphi - \varphi_0), \\ T(r, \theta, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n U_{4mn}(r) P_n^m(\cos\theta) \cos m(\varphi - \varphi_0). \end{aligned} \quad (10)$$

При этом вид зависимостей от φ в этих разложениях определяется соображениями симметрии вектора смещения \mathbf{u} и изменения температуры T относительно плоскости $\varphi = \varphi_0$, $\varphi_0 + \pi$.

Граничные условия на внешней и внутренней поверхностях сферической оболочки заключаются в равенстве нормальных скоростей частиц термоупругой среды и жидкости, в отсутствии на этих поверхностях касательных напряжений, в равенстве на них нормального напряжения и акустического давления, в непрерывности акустической температуры и теплового потока на поверхностях оболочки:

$$\begin{aligned} r = r_j : -i\omega u_r &= \mathfrak{G}_{jr}, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{r\varphi} = 0, \quad \sigma_{rr} = -p_j, \\ T = \Theta_j, \quad \lambda_T \frac{\partial T}{\partial r} &= \lambda_j^T \frac{\partial \Theta_j}{\partial r}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{jr} &= \partial(\Psi_{j1} + \Psi_{j2})/\partial r, \quad p_j = i\omega\rho_j(\Psi_{j1} + \Psi_{j2}), \\ \Theta_j &= \frac{i}{\alpha_j^T} \left(\frac{\omega\gamma_j}{c_j^2} (\Psi_{j1} + \Psi_{j2}) + \frac{1}{\omega} \Delta(\Psi_{j1} + \Psi_{j2}) \right), \end{aligned}$$

где \mathfrak{G}_{jr} – нормальные компоненты скоростей частиц жидкости, p_j – акустические давления, Θ_j – акустические температуры.

Введем безразмерные величины

$$r^* = r/H, U_{pmn}^* = U_{pmn}/H, p = 1,2,3, U_{4mn}^* = U_{4mn}/T_0, \rho^* = \rho/\rho^0, \\ \lambda^* = \lambda/\lambda^0, \mu^* = \mu/\mu^0, \alpha_T^* = \alpha_T/\alpha_T^0, \lambda_T^* = \lambda_T/\lambda_T^0, c_\varepsilon^* = c_\varepsilon/c_\varepsilon^0.$$

Здесь $H=(r_1-r_2)$ – толщина сферического слоя, верхним нулевым индексом помечены характерные величины. Звездочку в дальнейшем опускаем.

Подставим разложения (10) в уравнения (4), (7)-(9). Воспользовавшись уравнением для присоединенных многочленов Лежандра и свойством ортогональности сферических гармоник [19], получим для каждой пары индексов m, n ($n=0,1,\dots; m \leq n$) систему линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций $U_{pmn}(r)$ ($p=1,2,3,4$)

$$AU'' + BU' + CU = 0, \mathbf{U} = (U_{1mn}, U_{2mn}, U_{3mn}, U_{4mn})^T, \quad (12)$$

где

$$A = \text{diag}\{a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}\}, B = (b_{pq})_{4 \times 4}, C = (c_{pq})_{4 \times 4}.$$

Здесь

$$a_{11} = l_0\lambda + 2\mu, a_{22} = a_{33} = \mu, a_{44} = \lambda_T, \\ b_{11} = l_0\lambda' + 2\mu' + 2(l_0\lambda + 2\mu)/r, b_{12} = -n_1(l_0\lambda + \mu)/r, \\ b_{13} = b_{23} = b_{24} = b_{31} = b_{32} = b_{34} = b_{42} = b_{43} = 0, b_{14} = -l_1\beta, \\ b_{21} = (l_0\lambda + \mu)/r, b_{22} = b_{33} = \mu' + 2\mu/r, b_{41} = q_2\beta, b_{44} = \lambda_T' + 2\lambda_T/r, \\ c_{11} = q_0\rho + [2l_0r\lambda' - 2(l_0\lambda + 2\mu) - n_1\mu]/r^2, c_{12} = n_1(l_0\lambda + 3\mu - l_0r\lambda')/r^2, \\ c_{13} = c_{23} = c_{31} = c_{32} = c_{34} = c_{43} = 0, c_{14} = -l_1\beta', \\ c_{21} = [r\mu' + 2(l_0\lambda + 2\mu)]/r^2, c_{22} = q_0\rho - [r\mu' + n_1(l_0\lambda + 2\mu)]/r^2, \\ c_{24} = -l_1\beta/r, c_{33} = q_0\rho - (r\mu' + n_1\mu)/r^2, \\ c_{41} = 2q_2\beta/r, c_{42} = -n_1q_2\beta/r, c_{44} = q_1c_\varepsilon - n_1\lambda_T/r^2, \\ \beta = (3l_0\lambda + 2\mu)\alpha_T, n_1 = n(n+1), l_0 = \lambda^0/\mu^0, l_1 = \alpha_T^0 T_0, \\ q_0 = \rho^0 H^2 \omega^2 / \mu^0, q_1 = i c_\varepsilon^0 H^2 \omega / \lambda_T^0, q_2 = i \mu^0 \alpha_T^0 H^2 \omega / \lambda_T^0,$$

штрихом обозначена производная по безразмерной координате r .

Анализ системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (12) показывает, что все коэффициенты системы не зависят от индекса m . В третье уравнение системы (12) входит только функция U_{3mn} , причем в остальные уравнения этой системы она не входит.

Рассмотрим граничные условия. Из условий равенства нормальных скоростей и непрерывности акустической температуры при $r=r_1$ найдем коэффициенты V_{1mn}, V_{2mn} , а при $r=r_2$ – коэффициенты W_{1mn}, W_{2mn} . Для этого при использовании граничных условий на поверхности $r=r_1$ заменим в разложении для цилиндрической волны цилиндрическую координату \hat{r} ее выражением $r\sin\theta$ в сферических координатах, применим интегральные соотношения [15]

$$\int_0^\pi J_m(x \sin \theta) P_n^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 2i^{n-m} j_n(x) P_n^m(0), \\ \int_0^\pi J_m'(x \sin \theta) P_n^m(\cos \theta) \sin^2 \theta d\theta = 2i^{n-m} j_n'(x) P_n^m(0)$$

и воспользуемся выражением для вронскиана [20]

$$j_n(x)h'_n(x) - j'_n(x)h_n(x) = i/x^2.$$

Здесь и далее штрихом обозначена производная по аргументу.

Используя условия ортогональности сферических гармоник получаем

$$\begin{aligned} V_{lmn} &= \alpha_{l1}^{(1)}U_{1mn}(r_1) + \alpha_{l2}^{(1)}U_{4mn}(r_1) + \alpha_{l3}^{(1)}\eta_{mn}, \\ W_{lmn} &= \alpha_{l1}^{(2)}U_{1mn}(r_2) + \alpha_{l2}^{(2)}U_{4mn}(r_2), \quad l=1,2. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{(j)} &= -\frac{i\omega H^2 \xi_{j2} r_j z_n(x_{j2})}{\Delta_j}, \quad \alpha_{12}^{(j)} = \frac{i\alpha_j^T T_0 x_{j2} z'_n(x_{j2})}{\Delta_j}, \quad j=1,2, \\ \alpha_{13}^{(1)} &= \frac{i\xi_{11} x_{12} h'_n(x_{12})}{x_{11}^2 h'_n(x_{11}) \Delta_1} - \frac{j'_n(x_{11})}{h'_n(x_{11})}, \\ \alpha_{21}^{(j)} &= \frac{i\omega H^2 \xi_{j1} r_j z_n(x_{j1})}{\Delta_j}, \quad \alpha_{22}^{(j)} = -\frac{i\alpha_j^T T_0 x_{j1} z'_n(x_{j1})}{\Delta_j}, \quad \alpha_{23}^{(1)} = -\frac{i\xi_{11}}{x_{11} \Delta_1}, \\ \Delta_j &= \xi_{j2} x_{j1} z'_n(x_{j1}) z_n(x_{j2}) - \xi_{j1} x_{j2} z_n(x_{j1}) z'_n(x_{j2}), \\ \eta_{mn} &= 2i^{n-m} \eta_m \frac{P_n^m(0)}{Q_n^m}, \quad \eta_m = A_0(2 - \delta_{0m}) H_m(k_{11} \hat{r}_0), \quad Q_n^m = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \\ \xi_{jl} &= \frac{\omega \gamma_j}{c_j^2} - \frac{k_{jl}^2}{\omega}, \quad x_{jl} = k_{jl} r_j H, \quad z_n(x) = \begin{cases} h_n(x) & \text{при } j=1, \\ j_n(x) & \text{при } j=2. \end{cases} \end{aligned}$$

Из оставшихся неиспользованными граничных условий получим восемь краевых условий, которым должно удовлетворять решение системы дифференциальных уравнений (12). При этом на обеих поверхностях оболочки для уравнений $\sigma_{r\theta}=0$ и $\sigma_{r\varphi}=0$ будем выполнять преобразования, аналогичные проделанным при получении уравнений (8) и (9). С учетом выражений (13) получаем следующие краевые условия

$$(AU' + E_j U)_{r=r_j} = D_j, \quad j=1,2, \quad (14)$$

где

$$E_j = (e_{pq}^{(j)})_{4 \times 4}, \quad D_j = (d_1 \delta_{1j}, 0, 0, d_4 \delta_{1j})^T.$$

Здесь

$$\begin{aligned} d_1 &= -(i\omega r_1 / \mu^0) (\alpha_3^{(1)} h_n(x_{11}) + \alpha_3^{(2)} h_n(x_{12}) + j_n(x_{11})) \eta_{mn}, \\ d_4 &= (s_1 / r) (\alpha_3^{(1)} \xi_{11} x_{11} h'_n(x_{11}) + \alpha_3^{(2)} \xi_{12} x_{12} h'_n(x_{12}) + \xi_{11} x_{11} j'_n(x_{11})) \eta_{mn}, \\ e_{11}^{(j)} &= 2l_0 \lambda / r + (i\omega r_j / \mu^0) (\alpha_{11}^{(j)} z_n(x_{j1}) + \alpha_{21}^{(j)} z_n(x_{j2})), \quad e_{12}^{(j)} = -n_1 l_0 \lambda / r, \\ e_{13}^{(j)} &= e_{23}^{(j)} = e_{24}^{(j)} = e_{31}^{(j)} = e_{32}^{(j)} = e_{34}^{(j)} = e_{42}^{(j)} = e_{43}^{(j)} = 0, \\ e_{14}^{(j)} &= -l_1 \beta + (i\omega r_j / \mu^0) (\alpha_{12}^{(j)} z_n(x_{j1}) + \alpha_{22}^{(j)} z_n(x_{j2})), \quad e_{21}^{(j)} = -e_{22}^{(j)} = -e_{33}^{(j)} = \mu / r, \\ e_{41}^{(j)} &= -s_j (\alpha_{11}^{(j)} \xi_{j1} x_{j1} z'_n(x_{j1}) + \alpha_{21}^{(j)} \xi_{j2} x_{j2} z'_n(x_{j2})) / r, \\ e_{44}^{(j)} &= -s_j (\alpha_{12}^{(j)} \xi_{j1} x_{j1} z'_n(x_{j1}) + \alpha_{22}^{(j)} \xi_{j2} x_{j2} z'_n(x_{j2})) / r, \quad s_j = i\lambda_j^T / (\alpha_j^T T_0 \lambda_T^0), \end{aligned}$$

δ_{lj} – символ Кронекера.

Функция $U_{3mn}(r)$ не связана с функциями $U_{1mn}(r)$, $U_{2mn}(r)$ и $U_{4mn}(r)$ не только в уравнениях системы (12), но и в краевых условиях (14). Так как

дифференциальное уравнение и краевые условия для нахождения функции $U_{3mn}(r)$ однородны, то можно утверждать, что $U_{3mn}(r) \equiv 0$.

В результате получаем, что $u_3(r, \theta, \varphi) \equiv 0$.

Элементы всех матриц, присутствующих в краевых условиях (14), за исключением \mathbf{D}_j не зависят от индекса m , причем индекс m входит в \mathbf{D}_j в виде множителя η_{mn} .

Также, как и в работе [7], перейдем от решения краевой задачи, записанной для каждой пары индексов m, n , к решению краевой задачи, записанной только для индекса n . Введем новые неизвестные функции $U_{1n}(r)$, $U_{2n}(r)$ и $U_{4n}(r)$ по формулам

$$U_{1mn}(r) = \eta_{mn} U_{1n}(r), \quad U_{2mn}(r) = \eta_{mn} U_{2n}(r), \quad U_{4mn}(r) = \eta_{mn} U_{4n}(r). \quad (15)$$

Тогда для нахождения функций $U_{1n}(r)$, $U_{2n}(r)$ и $U_{4n}(r)$ следует решить краевую задачу вида (12), (14), где под вектором \mathbf{U} следует понимать вектор $(U_{1n}, U_{2n}, U_{4n})^T$, а под вектором \mathbf{D}_j – вектор $(d_1 \delta_{1j}, 0, d_4 \delta_{1j})^T$, где в d_1 и d_4 исключен множитель η_{mn} . При этом матрицы A, B, C и E_j – матрицы третьего порядка, которые получены из соответствующих прежних матриц четвертого порядка вычеркиванием третьей строки и третьего столбца.

Решив эту краевую задачу для каждого индекса $n=0, 1, 2, \dots$, согласно выражениям (15) находим функции $U_{1mn}(r)$, $U_{2mn}(r)$ и $U_{4mn}(r)$ для всех $m=0, 1, \dots, n$.

После определения значений функций $U_{1mn}(r)$ и $U_{4mn}(r)$ при $r=r_j$ ($j=1, 2$) вычисляем по выражениям (13) коэффициенты V_{1mn} , V_{2mn} , W_{1mn} , W_{2mn} . В результате получаем описание волновых полей вне термоупругого тела и в самом теле.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Рассмотрим дальнюю зону акустического поля. Используя асимптотическую формулу для сферической функции Ганкеля первого рода при больших значениях аргумента [20], получаем выражение для потенциала рассеянной звуковой волны

$$\Psi'_{11}(r, \theta, \varphi) = \frac{A_0 r_1}{2r} \exp(ik_{11}r) F(\theta, \varphi),$$

где

$$F(\theta, \varphi) = \frac{2}{A_0 k_{11} r_1} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (-i)^{n+1} V_{1mn} P_n^m(\cos \theta) \cos m(\varphi - \varphi_0) \quad (16)$$

Были проведены расчеты амплитуды рассеяния звука $|F(\theta, \varphi)|$ для сферической оболочки при соотношении ее внешнего радиуса r_1 к внутреннему r_2 равном двум. Полагалось, что снаружи и в полости оболочки находится вода ($\rho_1 = \rho_2 = 1000$ кг/м³, $c_1 = c_2 = 1485$ м/с, $\gamma_1 = \gamma_2 = 1.006$, $\lambda_1^T = \lambda_2^T = 0.59$ Вт/(м·К), $\chi_1^T = \chi_2^T = 1.43 \cdot 10^{-7}$ м²/с, $\alpha_1^T = \alpha_2^T = 2.1 \cdot 10^{-4}$ 1/К, $T_0 = 293$ К). Рассматривался случай падения звуковой волны с единичной амплитудой, излучаемой линейным источником, расположенным в направлении $\varphi_0 = \pi$ на расстоянии $\hat{r}_0 = 1.2r_1$.

Расчеты проводились для неоднородных материалов, безразмерная плотность которых менялась по толщине сферической оболочки по законам

$$\rho^j(r) = a_j \left\{ 0.2 + \exp \left[-4(r - r_j)^2 / (r_1 - r_2)^2 \right] \right\}, \quad j = 1, 2,$$

где множитель a_j выбран так, чтобы среднее значение функции $\rho^j(r)$ по толщине оболочки было равно единице ($a_1 = a_2 = 1.56$). В качестве характерных величин

были выбраны физико-механические характеристики поливинилбутирала ($\rho^0=1070$ кг/м³, $\lambda^0=3.9 \cdot 10^9$ Н/м², $\mu^0=9.8 \cdot 10^8$ Н/м², $\alpha_T^0=2.3 \cdot 10^{-4}$ 1/К, $\lambda_T^0=0.2$ Вт/(м·К), $c_\epsilon^0=1.2 \cdot 10^6$ Дж/(м³·К)).

Для оценки влияния термоупругости материала оболочки на рассеяние звука расчеты выполнялись и для упругой оболочки при изотермическом процессе. При этом рассматривалась оболочка с законом неоднородности $\rho=\rho^1(r)$.

Краевая задача (12), (14) решена методом сплайн-коллокации [14,21]. На отрезке $[r_1, r_2]$ введена равномерная сетка. Решение краевой задачи ищется в виде трех кубических сплайнов дефекта 1 с узлами на введенной сетке, приближающих функции $U_{1n}(r)$, $U_{2n}(r)$, $U_{4n}(r)$ соответственно. Сплайны представляются в виде разложений по базису из нормализованных кубических В-сплайнов. Полагалось, что искомые сплайны удовлетворяют системе (12) и краевым условиям (14) в узлах коллокации, совпадающих с узлами сетки. Для контроля точности приближенного решения краевой задачи (для каждого значения n) расчеты проводились на сгущающихся сетках, причем каждая следующая сетка была в два раза мельче предыдущей. Вычисления заканчивались, когда относительная погрешность каждого из значений $U_{1n}(r_j)$, $U_{2n}(r_j)$, $U_{4n}(r_j)$ ($j=1,2$) на последней паре сеток не превосходила 0.1%.

При суммировании ряда (16) индекс n изменялся до значения $n=2[k_{11}r_1]+3$, где $[\cdot]$ – целая часть числа. Для рассматриваемых частот увеличение n практически не сказывается на результатах расчетов.

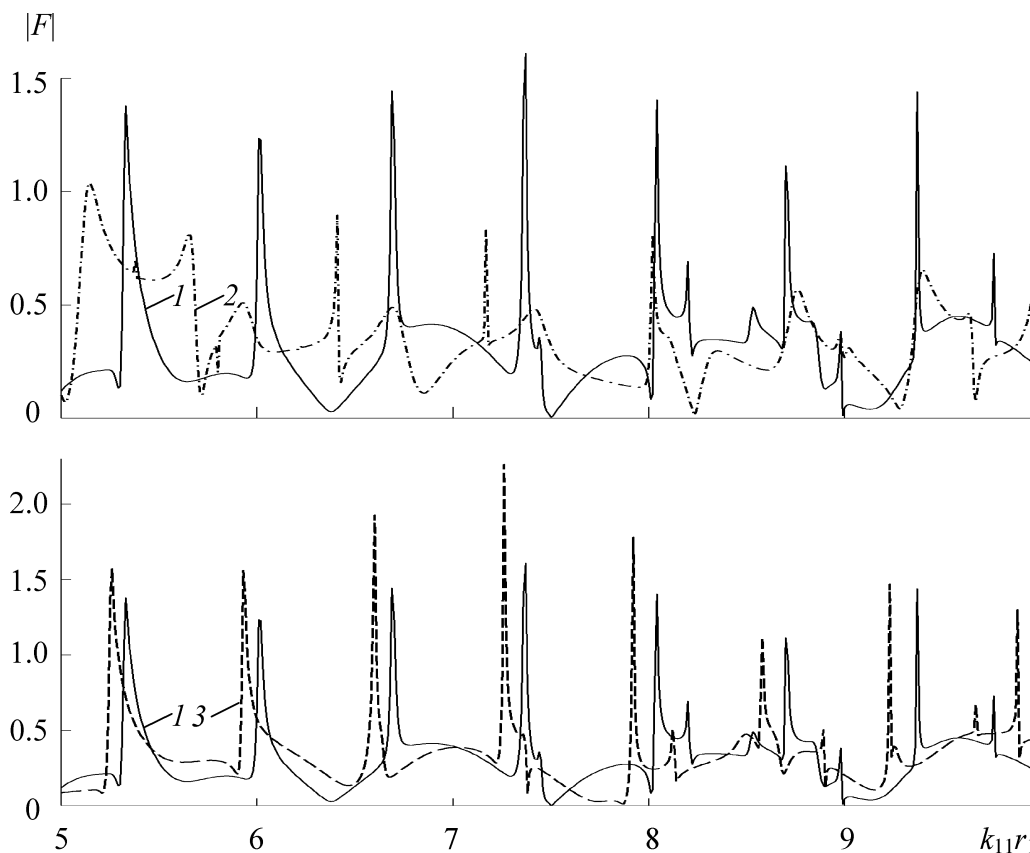


Рис.2. Зависимость амплитуды рассеяния звука от волнового числа для сферической оболочки из различных материалов: 1 – термоупругий

материал с плотностью $\rho=\rho^1(r)$, 2 – термоупругий материал с плотностью $\rho=\rho^2(r)$, 3 – упругий материал с плотностью $\rho=\rho^1(r)$.

На рис.2 приведены графики зависимости амплитуды рассеяния звука $|F|$ от волнового размера оболочки $k_{11}r_1$, рассчитанные в интервале $5 \leq k_{11}r_1 \leq 10$ при углах $\theta=\pi/2$ и $\varphi=\pi$. Из сравнения кривых 1 и 2 видно существенное отличие частотных характеристик рассеяния звука, обусловленное разными законами изменения $\rho(r)$. Сравнение кривых 1 и 3 показывает, что учет термоупругости материала оболочки приводит к отчетливому сдвигу резонансных пиков функции $|F|$.

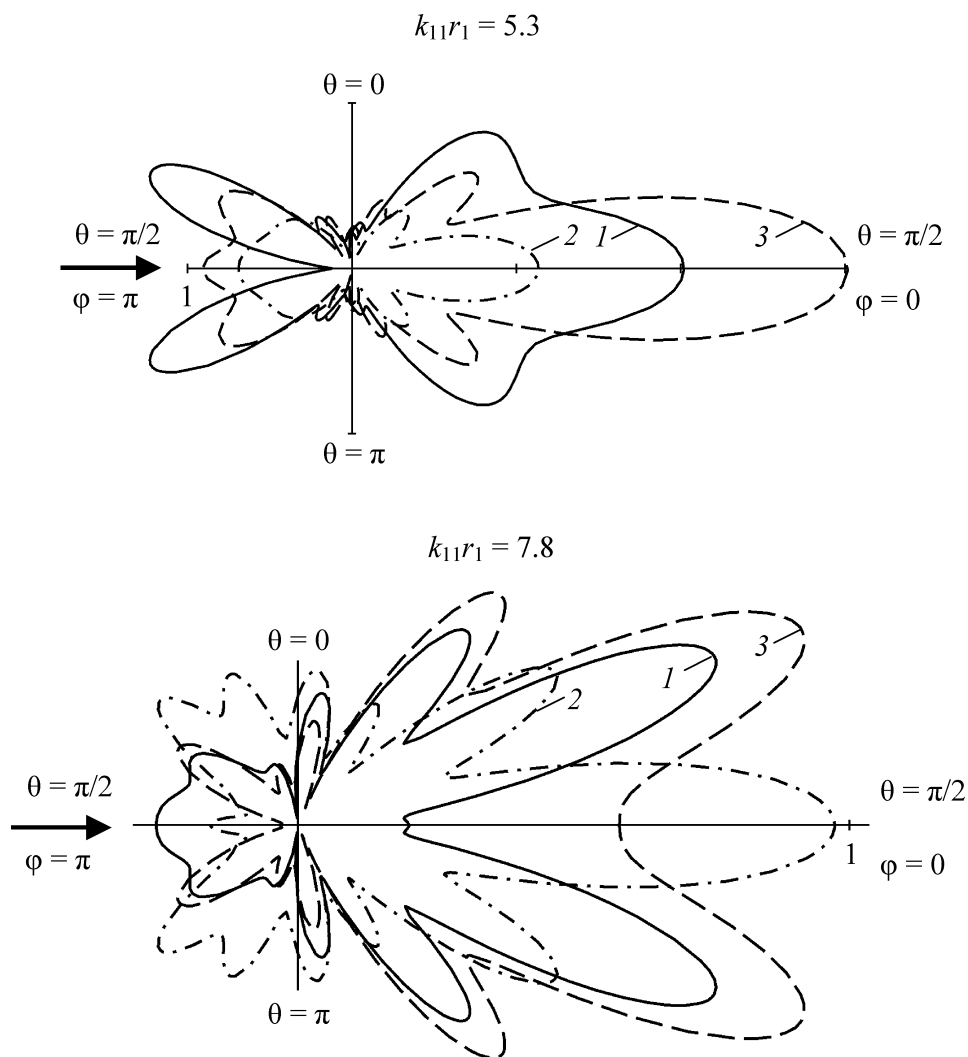


Рис.3. Полярные диаграммы направленности амплитуды рассеяния звука (обозначения приведены на рис.2).

На рис.3 представлены графики зависимости $|F|$ от полярного угла θ ($0 \leq \theta \leq \pi$), рассчитанные в плоскости $\varphi=0, \pi$ при $k_{11}r_1=5.3$ и $k_{11}r_1=7.8$. Стрелкой показано направление распространения падающей волны. Видно, что термоупругость материала сферической оболочки, как и его неоднородность, могут сильно влиять на полярные диаграммы направленности амплитуды рассеянной звуковой волны.

Показанные на рис.2 и 3 отличия характеристик рассеяния звука для упругой оболочки от соответствующих характеристик для термоупругой

оболочки обусловлены эффектом связанности полей деформации и температуры в поливинилбутирале, обладающим большим значением параметра связанности [9]. Это значение рассчитывается по формуле

$$\varepsilon^0 = \frac{\left[(3\lambda^0 + 2\mu^0) \alpha_T^0 \right]^2 T_0}{(\lambda^0 + 2\mu^0) c_\varepsilon^0}$$

и составляет 0.411. Заметим, что в работах [9,22] отмечалось, что для материалов, обладающих большим значением параметра связанности, могут существенно различаться решения связанной и несвязанной динамических задач термоупругости.

В заключение отметим, что непрерывно-неоднородный по толщине термоупругой сферической оболочки материал можно моделировать системой однородных термоупругих слоев с различными значениями материальных констант подобно тому, как это сделано в работе [23] для непрерывно-неоднородного материала термоупругой пластины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Приходько В.Ю., Тютюкин В.В. *О собственных частотах и формах колебаний радиально-слоистых упругих тел* // Прикладная механика. – 1987. – Т.23. – №6. – С.9-14.
2. Скобельцын С.А., Толоконников Л.А. *Рассеяние звука неоднородным трансверсально-изотропным сферическим слоем* // Акустический журнал. – 1995. – Т.41. – Вып.6. – С.917-923.
3. Толоконников Л.А. *Рассеяние плоской звуковой волны упругим шаром с неоднородным покрытием* // Прикладная математика и механика. – 2014. – Т.78. – Вып.4. – С.519-526.
4. Толоконников Л.А., Ларин Н.В., Скобельцын С.А. *Моделирование неоднородного покрытия упругого шара с требуемыми звукоотражающими свойствами* // Математическое моделирование. – 2017. – Т.29. – №11. – С.89-98.
5. Толоконников Л.А. *Моделирование непрерывно-неоднородного покрытия упругого шара системой однородных упругих слоев в задаче рассеяния звука* // Прикладная математика и механика. – 2017. – Т.81. – Вып.6. – С.699-707.
6. Бригадирова Т.Е., Медведский А.Л. *Дифракция нестационарной акустической волны на неоднородной трансверсально-изотропной полой сфере* // Механика композиционных материалов и конструкций. – 2007. – Т.13. – №1. – С.119-130.
7. Толоконников Л.А. *Дифракция цилиндрических звуковых волн на упругой сфере с неоднородным покрытием* // Прикладная математика и механика. – 2015. – Т.79. – Вып.5. – С.663-673.
8. Толоконников Л.А., Родионова Г.А. *Дифракция сферической звуковой волны на упругом шаре с неоднородным покрытием* // Известия Тульского государственного университета. Естественные науки. – 2014. – Вып.3. – С.131-137.
9. Коваленко А.Д. *Основы термоупругости*. – Киев: Наук. думка, 1970. – 240 с.
10. Подстригач Я.С., Ломакин В.А., Коляно Ю.М. *Термоупругость тел неоднородной структуры*. – М.: Наука, 1984. – 368 с.
11. Новацкий В. *Теория упругости*. – М.: Мир, 1975. – 872 с.
12. Швец Р.Н., Лопатьев А.А. *Распространение плоских волн в теплопроводящей слоистой среде жидкость-твердое тело* // Математические методы

- и физико-механические поля. Республиканский межведомственный сборник. – Киев: Наук. думка, 1975. – Вып.1. – С.131-135.
13. Ларин Н.В. *Дифракция сферических звуковых волн на неоднородной термоупругой сферической оболочке* // Известия Тульского государственного университета. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2003. – Т.9. – Вып.2. – С.115-128.
 14. Ларин Н.В., Толоконников Л.А. *Рассеяние звука неоднородным термоупругим сферическим слоем* // Прикладная математика и механика. – 2010. – Т.74. – Вып.4. – С.645-654.
 15. Морс Ф.М., Фешбах Г. *Методы теоретической физики.* – Т.2. – М.: Изд-во Иностран. Лит., 1960. – 886 с.
 16. Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей). *Теория звука.* – Т.2. – М.: Гостехиздат, 1955. – 475 с.
 17. Коненков Ю.К. *О волнах в вязкой жидкости* // Акустический журнал. – 1962. – Т.8. – Вып.3. – С.320-324.
 18. Allegra J.R., Hawley S.A. *Attenuation of sound in suspensions and emulsions. Theory and experiments* // J. Acoust. Soc. Amer. – 1972. – Vol.51. – No.5. – Pp.1545-1564.
 19. Шендеров Е.Л. *Волновые задачи гидроакустики.* – Л.: Судостроение, 1972. – 352 с.
 20. Лебедев Н.Н. *Специальные функции и их приложения.* – М.: Физматгиз, 1963. – 358 с.
 21. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. *Методы сплайн-функций.* – М.: Наука, 1980. – 352 с.
 22. Карташов Э.М., Ожерелкова Л.М. *Новые модельные представления в проблеме теплового удара* // Математическое моделирование. – 2002. – Т.14. – №2. – С.95-108.
 23. Толоконников Л.А., Ларин Н.В. *Прохождение звука через термоупругий дискретно-неоднородный плоский слой, граничащий с теплопроводными жидкостями* // Прикладная механика и техническая физика. – 2017. – Т.58. – №1. – С.108-116.

REFERENCES

1. Prikhod'ko V.Iu., Tiutekin V.V. *O sobstvennykh chastotakh i formakh kolebanij radial'no-sloistykh uprugikh tel [The natural frequencies and forms of the oscillations of radially laminated elastic bodies].* Prikladnaya mekhanika, 1987, Vol.23, No.6, Pp.9-14. (переводная версия журнала существует, но информация о переводе статьи отсутствует).
2. Skobel'tsyn S.A., Tolokonnikov L.A. *Sound scattering by an inhomogeneous transversely isotropic spherical layer.* Acoustical Physics, 1995, Vol.41, Iss.6, Pp.812-818.
3. Tolokonnikov L.A. *The scattering of a plane sound wave by an elastic sphere with an inhomogeneous coating.* Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2014, Vol.78, Iss.4, Pp.367-373.
4. Tolokonnikov L.A., Larin N.V., Skobel'tsyn S.A. *Modelling an inhomogeneous coating of an elastic sphere with the required sound reflecting properties.* Mathematical models and computer simulations, 2018, Vol.10, No.3, Pp.333-340.
5. Tolokonnikov L.A. *Modelling of a continuously inhomogeneous coating of an elastic sphere by a system of homogeneous elastic layers in the problem of sound*

- scattering. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2017, Vol.81, Iss.6, Pp.480-485.
6. Brigadirova T.E., Medvedskii A.L. *Difraktsiya nestatsionarnoj akusticheskoj volny na neodnorodnoj transversal'no-izotropnoj poloj sfere [Diffraction of nonstationary acoustic wave by an inhomogeneous transversely-isotropic hollow sphere]*. Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii, 2007, Vol.13, No.1, Pp.119-130.
 7. Tolokonnikov L. A. *Diffraction of cylindrical sound waves by an elastic sphere with an inhomogeneous coating*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2015, Vol.79, Iss.5, Pp.467-474.
 8. Tolokonnikov L.A., Rodionova G.A. *Difraktsiya sfericheskoy zvukovoy volny na uprugom share s neodnorodnym pokrytiem [Diffraction of spherical sound wave by an elastic sphere with an inhomogeneous coating]*. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Estestvennye nauki, 2014, Iss.3, Pp.131-137.
 9. Kovalenko A.D. *Osnovy termouprugosti [Fundamentals of thermoelasticity]*. Kiev, Naukova dumka, 1970, 240 p.
 10. Podstrigach Ia.S., Lomakin V.A., Koliano Iu.M. *Termouprugost' tel neodnorodnoj struktury [The thermoelasticity of solids of inhomogeneous structure]*. Moskva, Nauka, 1984, 368 p.
 11. Nowacki W. *Teoria spryzystosci*. Warszawa, PWN, 1973, 769 p.
 12. Shvets R.N., Lopat'ev A.A. *Rasprostranenie ploskikh voln v teploprovodyashhej sloistoj srede zhidkost'-tverdoe telo [The plane wave propagation in heat-conducting layered medium liquid-solid body]*. Matematicheskie metody i fiziko-mekhanicheskie polya. Respublikanskij mezhvedomstvennyj sbornik. Kiev, Naukova dumka, 1975, Iss.1, Pp.131-135.
 13. Larin N.V. *Difraktsiya sfericheskikh zvukovykh voln na neodnorodnoj termouprugoj sfericheskoy obolochke [Diffraction of spherical sound waves by an inhomogeneous thermoelastic spherical shell]*. Izvestiya Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika, 2003, Vol.9, Iss.2, Pp.115-128.
 14. Larin N.V., Tolokonnikov L.A. *Scattering of sound by an inhomogeneous thermoelastic spherical layer*. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 2010, Vol.74, Iss.4, Pp.460-466.
 15. Mors F.M., Feshbah H. *Methods of Theoretical Physics. Vol.2*. N.Y., McGraw-Hill, 1953, 1977 p.
 16. Strutt J.W. (Lord Rayleigh) *The theory of sound. Vol.2*. N.Y., Dover Publications, Inc., 1945, 522 p.
 17. Kononov Iu.K. *O volnakh v vyazkoj zhidkosti [Waves in viscous liquid]*. Akusticheskij zhurnal, 1962, Vol.8, Iss.3, Pp.320-324.
 18. Allegra J.R., Hawley S.A. *Attenuation of sound in suspensions and emulsions. Theory and experiments*. J. Acoust. Soc. Amer., 1972, Vol.51, No.5, Pp.1545-1564.
 19. Shenderov E.L. *Volnovye zadachi gidroakustiki [Wave problems of hydroacoustics]*. Leningrad, Sudostroenie, 1972, 352 p.
 20. Lebedev N.N. *Spetsial'nye funktsii i ikh prilozheniya [Special functions and their applications]*. Moskva, Fizmatgiz, 1963, 358 p.
 21. Zav'ialov Iu.S., Kvasov B.I., Miroshnichenko V.L. *Metody splajn-funktsij [Spline-function methods]*. Moskva, Nauka, 1980, 352 p.
 22. Kartashov E.M., Ojerelkova L.M. *Novye model'nye predstavleniya v probleme teplovogo udara [The new model ideas in the problem of thermal shock]*. Matematicheskoe modelirovanie, 2002, Vol.14, No.2, Pp.95-108.

23. Tolokonnikov L.A., Larin N.V. *Sound propagation through a discretely inhomogeneous thermoelastic plane layer adjacent to heat-conducting liquids*. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2017, Vol.58, No.1, Pp.95-102.

Поступила в редакцию 28 июня 2018 года.

Сведения об авторе:

Ларин Николай Владимирович – к.ф.-м.н., доц., Кафедра прикладной математики и информатики, Тульский государственный университет, г. Тула, Россия; e-mail: Larinaelen@mail.ru